Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática (Mestrado Integrado em Ciências Farmacêuticas)

11 de Janeiro de 2011 — Duração: 2,5 horas

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Determine as dimensões de uma folha de papel rectangular, onde serão impressos 18 cm$^2$ de texto, sendo as margens superior e inferior de 2 cm cada e as margens laterais de 1 cm cada, de modo que a superfície de papel necessária seja mínima.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

   (a) Se o raio de um círculo aumenta a uma taxa de 2 cm/s, a sua área, quando o raio é de 10 cm, aumenta a uma taxa de 1 cm$^2$/s.

   (b) A função de produção Cobb-Douglas $P = L^\alpha K^\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação
   $$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha+\beta)P.$$

   (c) A taxa de variação máxima de $f(x,y) = x^2 + \cos(xy)$ em $P = (1,0)$ é igual a 1.

   (d) Se $b$ é uma coluna de $A$ então o sistema $Ax = b$ é possível.

3. (a) Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos^3(x)|\, dx$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{2}{x((\ln x)^2 + 5\ln x + 6)}\, dx$, com a substituição $t = \ln x$.

   (c) Determine um valor de $a$ tal que
   $$\int_a^{+\infty} \frac{x}{e^x}\, dx \leq 0,001,$$
   justificando convenientemente a sua resposta.

   (d) Determine a área da região definida pelas condições $0 \leq y \leq x$ e $\dfrac{\ln x}{2} \leq y \leq 1$.

4. A taxa a que a informação $I$ adquirida pelos alunos ao longo das 15 semanas de duração de uma determinada disciplina é proporcional à informação já adquirida e à informação ainda não adquirida. Supondo que, no início, um aluno possui já 10% dos conhecimentos necessários para efectuar a disciplina e que, ao fim de uma semana, já adquiriu 15%, determine a percentagem de conhecimento adquirida pelo aluno ao fim das 15 semanas.

5. Determine a solução do problema de condição inicial
$$\begin{cases} (x+1)y' + y &= \ln x, \\ y(1) &= 10. \end{cases}$$

v.s.f.f.

6. Considere o sistema linear $Ax = b$ com $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule a matriz $A$.

   (b) Para que valores de $\alpha$ o sistema é possível e determinado?

   (c) Admita que $\alpha = 4$.

      i. A matriz $A$ é ortogonal, isto é, $A^{-1} = A^T$?

      ii. Resolva o sistema linear $Ax = b$.

7. Os seguintes dados mostram a relação entre número de horas que uma dada substância esteve no corpo de uma pessoa e a sua concentração no corpo (partes por milhão)

| $N$ (número de horas) | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $C$ (concentração) | 2,1 | 1,6 | 1,4 | 1,0 |

.

Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados e estime a concentração da substância após 5 horas.

---

| Formulário | |
|---|---|
| Primitiva de $f^m\ f'$ | $\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C\ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$ |
| Primitiva de $\dfrac{f'}{f}$ | $\ln\|f\| + C$ |
| Primitiva de $a^f\ f'$ | $\dfrac{a^f}{\ln a} + C\ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$ |
| Primitiva de $f'\ \operatorname{sen} f$ | $-\cos f + C$ |
| Primitiva de $f'\ \cos f$ | $\operatorname{sen} f + C$ |
| Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$ | $I(x) = e^{\int P(x)dx}$ |
| Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$ | $A^TAx = A^Tb$ |