Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática (Licenciatura em Ciências Farmacêuticas)

16 de Fevereiro de 2007 Duração: 2,5 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. A tosse faz contrair a traqueia, o que afecta a velocidade do ar que passa por ela. A velocidade do ar durante a tosse é dada por
$$v = k(R - r)r^2,$$
onde k é uma constante, R é o raio normal da traqueia e r o raio da traqueia durante a tosse. Qual o valor de r que produzirá a velocidade máxima de ar?

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

   (a) Se f e g são duas funções diferenciáveis tais que $f'(x) = g'(x)$, para $0 < x < 1$, então $f(x) = g(x)$, para $0 < x < 1$.

   (b) A taxa de variação máxima de $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$ em $P = (1, 0)$ é igual a 1.

   (c) A função $y = (\ln x)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

   (d) Se a matriz invertível A verifica $A^2 - 3A + I = 0$, em que I é a matriz identidade, então
$$A^{-1} = 3I - A.$$

3. (a) Calcule
$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\, dx,$$
usando a mudança de variável $x = t^2$.

   (b) Determine o valor de a por forma a que a área da figura limitada por $0 \le y \le e^{-x}$ e $-a \le x \le a$ seja $\frac{8}{3}$.

   (c) Determine a natureza do integral
$$\int_0^1 x \ln x \, dx.$$

4. A taxa de propagação de um boato numa população é proporcional não apenas ao número y de pessoas que ouviu o boato mas também ao número de pessoas que ainda não o ouviu.

   (a) Escreva uma equação diferencial que seja satisfeita por y, supondo uma população com S indivíduos.

   (b) Resolva a equação diferencial.

   (c) Numa cidade com 1000 habitantes, 80 pessoas tinham ouvido o boato às 8h00 da manhã. Ao meio-dia metade da cidade já tinha ouvido o boato. A que horas 90% da população terá ouvido o boato?

5. Determine a solução do problema de condição inicial
$$\begin{cases} y' &= \dfrac{2x}{1-x^2}y + 2x \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

v.s.f.f.

6. Resolva o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + 2u & = & 0 \\ -2x + z - 2u & = & 2 \\ -x + 4y + z & = & 2 \end{array} \right. .$$

7. Os seguintes dados mostram a relação entre número de horas que uma substância esteve no corpo de uma pessoa e a sua concentração no corpo (partes por milhão)

N (número de horas)	2	4	6	8
C (concentração)	2,1	1,6	1,4	1,0

(a) Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados.

(b) Estime a concentração da substância após 5 horas, usando o resultado obtido na alínea anterior.

Formulário	
Primitiva de $f^m\ f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C\ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
Primitiva de $\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T A x = A^T b$