

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende-se fabricar um recipiente cilíndrico de base circular, aberto no topo, com capacidade de  $24\pi$  cm<sup>3</sup>. Se o custo do material usado no fabrico da base é três vezes superior ao custo do material da superfície lateral, determine as dimensões que minimizam o custo.
2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.
  - (a) A precisão com que se mede a voltagem num circuito eléctrico, dada pela Lei de Ohm  $V = RI$ , quando os valores da resistência  $R$  e da intensidade da corrente  $I$  são medidos com uma precisão de 1%, é de 2%.
  - (b) Se  $f$  é uma função contínua tal que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f'(x) > 0$  e  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ , então  $\int_0^1 f^{-1}(x) dx = \frac{2}{3}$ .
  - (c) Se, durante uma epidemia, a probabilidade dos indivíduos saudáveis assim permanecerem passado um dia for de 70% e a probabilidade dos indivíduos doentes continuarem doentes no dia seguinte for de 80%, a probabilidade de um indivíduo saudável adoecer passados 3 dias é de 45%.
  - (d) Quaisquer que sejam as matrizes  $A$  e  $B$  invertíveis,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

3. (a) Calcule  $\int \frac{1}{x} \ln(\ln x) dx$ .

(b) Calcule  $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$ , com a mudança de variável  $e^t = x$ .

(c) Determine a natureza do integral

$$\int_0^1 \frac{1}{2-3x} dx,$$

justificando convenientemente a sua resposta.

(d) Considere a região plana

$$R_a = \{(x, y) : 0 \leq y \leq e^{-x}, 0 \leq x \leq a\},$$

onde  $a$  é um número positivo. Determine o valor de  $a$  de modo a que o volume do sólido obtido de  $R_a$  por rotação em torno do eixo dos  $xx$  seja igual a  $\pi/4$ .

4. O plutónio-214 tem uma meia vida muito curta, de  $1,4 \times 10^{-4}$  segundos. Se uma amostra tem uma massa de 50 mg, determine:
  - (a) a massa que resta ao fim de um centésimo de segundo;
  - (b) o tempo que levará a massa a decair para 10% do seu valor inicial.

5. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' &= \frac{t}{y\sqrt{1+y^2}}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

6. Em função do valor do parâmetro real  $k$ , discuta a natureza do sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 2k \end{cases} .$$

7. Para estudar a poluição de um rio, um cientista mediu a concentração de um determinado composto orgânico ( $Y$ ) e a precipitação pluviométrica na semana anterior ( $X$ ):

|                                 |      |      |      |      |      |      |
|---------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $X$ (ml/cm <sup>2</sup> )       | 0,91 | 1,33 | 4,19 | 2,68 | 1,86 | 1,17 |
| $Y$ ( $\mu$ m/cm <sup>3</sup> ) | 0,10 | 1,10 | 3,40 | 2,10 | 2,60 | 1,0  |

Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados e estime a concentração do composto orgânico na próxima semana sabendo que a precipitação pluviométrica desta semana foi de 2,00.

| Formulário                                  |   |
|---|---|
| Primitiva de $f^m f'$                       | $\frac{f^{m+1}}{m+1} + C$ ( $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ) |
| Primitiva de $\frac{f'}{f}$                 | $\ln  f  + C$   |
| Primitiva de $a^f f'$                       | $\frac{a^f}{\ln a} + C$ ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )  |
| Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$ | $A^T Ax = A^T b$  |