

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende-se fabricar um recipiente cilíndrico de base circular, aberto no topo, com capacidade de 24π cm³. Se o custo do material usado no fabrico da base é três vezes superior ao custo do material da superfície lateral, determine as dimensões que minimizam o custo.
2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.
 - (a) A precisão com que se mede a voltagem num circuito eléctrico, dada pela Lei de Ohm $V = RI$, quando os valores da resistência R e da intensidade da corrente I são medidos com uma precisão de 1%, é de 2%.
 - (b) Se f é uma função contínua tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ e $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$, então $\int_0^1 f^{-1}(x) dx = \frac{2}{3}$.
 - (c) Se, durante uma epidemia, a probabilidade dos indivíduos saudáveis assim permanecerem passado um dia for de 70% e a probabilidade dos indivíduos doentes continuarem doentes no dia seguinte for de 80%, a probabilidade de um indivíduo saudável adoecer passados 3 dias é de 45%.
 - (d) Quaisquer que sejam as matrizes A e B invertíveis, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. (a) Calcule $\int \frac{1}{x} \ln(\ln x) dx$.

(b) Calcule $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$, com a mudança de variável $e^t = x$.

(c) Determine a natureza do integral

$$\int_0^1 \frac{1}{2-3x} dx,$$

justificando convenientemente a sua resposta.

(d) Considere a região plana

$$R_a = \{(x, y) : 0 \leq y \leq e^{-x}, 0 \leq x \leq a\},$$

onde a é um número positivo. Determine o valor de a de modo a que o volume do sólido obtido de R_a por rotação em torno do eixo dos xx seja igual a $\pi/4$.

4. O plutónio-214 tem uma meia vida muito curta, de $1,4 \times 10^{-4}$ segundos. Se uma amostra tem uma massa de 50 mg, determine:
 - (a) a massa que resta ao fim de um centésimo de segundo;
 - (b) o tempo que levará a massa a decair para 10% do seu valor inicial.

5. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' &= \frac{t}{y\sqrt{1+y^2}}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

6. Em função do valor do parâmetro real k , discuta a natureza do sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 2k \end{cases} .$$

7. Para estudar a poluição de um rio, um cientista mediu a concentração de um determinado composto orgânico (Y) e a precipitação pluviométrica na semana anterior (X):

X (ml/cm ²)	0,91	1,33	4,19	2,68	1,86	1,17
Y (μ m/cm ³)	0,10	1,10	3,40	2,10	2,60	1,0

Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados e estime a concentração do composto orgânico na próxima semana sabendo que a precipitação pluviométrica desta semana foi de 2,00.

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C$ ($m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln f + C$
Primitiva de $a^f f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$