Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Matemática (Licenciatura em Ciências Farmacêuticas)

17 de Novembro de 2006 Duração: 1,5 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Supondo um peixe a nadar contra uma corrente u a uma velocidade, em relação à água, v ($v > u$), a energia total E requerida para nadar uma distância L é dada por
$$E(v) = av^3 \frac{L}{v-u}$$
onde a é uma constante de proporcionalidade positiva. Os biólogos verificaram experimentalmente que os peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% superior à velocidade da corrente. Mostre que esse valor corresponde à velocidade que minimiza a energia total requerida para nadar uma distância fixa.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.
   (a) Se f é uma função diferenciável em $]a,b[$ e $f'(c) = 0$, com $c \in]a,b[$, então f tem um extremo local em $x = c$.
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
   (c) A energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ de um corpo com massa m e velocidade v verifica
   $$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K.$$
   (d) No ponto $P = (1,0)$ a taxa máxima de crescimento da temperatura T, medida em graus Celsius, dada em cada ponto (x,y) de uma placa rectangular por $T(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, é 1.

3. Calcule o valor dos seguintes integrais
   (a) $\int x \ln \frac{x}{x+1}\, dx$;
   (b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}\, dx$.
   (c) $\int_2^4 \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\, dx$, com a substituição $x = t^2$.

4. Determine a natureza do integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx,$$
usando a mudança de variável $x = \ln t$.

5. Determine a área da figura limitada por $y \geq -x+1$, $0 \leq y \leq e^x$ e $0 \leq x \leq 2$.

Função	Primitiva
$f^m\ f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C \ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$\frac{f'}{1+f^2}$	$\text{arc tg}\, f + C$