DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

FREQUÊNCIA DE MATEMÁTICA (MESTRADO INTEGRADO EM CIÊNCIAS FARMACÊUTICAS)

11 DE NOVEMBRO DE 2011 — DURAÇÃO: 1,5 HORAS

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. A temperatura no ponto (x, y) de uma placa de metal é dada por

$$T(x, y) = 400e^{-(x^2+y^2)/2}, \qquad x \geq 0, y \geq 0.$$

   (a) Determine a direcção de maior crescimento de calor a partir do ponto $(3, 5)$. Qual a taxa de variação da temperatura, neste caso?

   (b) Encontre a direcção segundo a qual não ocorrem variações do calor da placa a partir do ponto $(3, 5)$.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

   (a) A função f tal que $\int_0^x f(t)dt = x\cos x$, isto é, tal que o seu valor médio entre 0 e x é $\cos x$, é dada por $f(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$.

   (b) A função $z = e^{-t}\cos x$ satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

   (c) Sabendo que, para uma caixa cilíndrica com raio r e altura h, o custo do material usado em sua confecção é proporcional à área do material utilizado, o valor aproximado do acréscimo do custo da caixa quando as dimensões sofrerem um acréscimo de 1% no raio e 2% na altura é de 6%.

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx < \frac{\pi}{4}$.

3. Calcule os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int \frac{a^x \ln(a)}{9+a^{2x}}\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 7\cos x + 10}\,dx$, com a substituição $t = \cos x$. Nota: $(\operatorname{arc\,cos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Determine, justificando convenientemente a sua resposta, a natureza do seguinte integral

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx.$$

Função	Primitiva
$f^m\ f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C\ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
$a^f\ f'$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C\ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arc\,tg} f + C$