

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Os biólogos colocaram num lago 400 peixes e estimaram que a capacidade de suporte de peixes nesse lago como sendo 10000. O número de peixes triplicou no primeiro ano.

- (a) Assumindo que o tamanho da população de peixes satisfaz a equação logística, encontre uma expressão para o tamanho da população depois de t anos.
- (b) Quanto tempo levará a população a aumentar para 5000?

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

- (a) A matriz $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ é ortogonal, isto é, $A^{-1} = A^T$.
- (b) Se A é uma matriz invertível então, se $BA^{-1} = AC$ tem-se que $B = A^2C$.
- (c) A função $y(t) = e^{-\sin t}$ é uma solução da equação diferencial $y' = -y \cos t$.

3. Seja dado o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= 3y + t \\ y(0) &= 1 \end{cases}$, com $t \in [0, 1]$.

- (a) Aproxime o valor da sua solução em $t = 1$ usando o método de Euler com $h = 0.5$.
- (b) Compare o resultado obtido com o da solução exacta.

4. Em função do valor do parâmetro real p , discuta a natureza do sistema

$$\begin{cases} x - y + z &= p \\ py - z &= 1 \\ x + (p - 1)y + (p - 2)z &= p - 2 \end{cases}.$$

5. O proprietário de uma empresa em rápido crescimento económico verificou que, nos primeiros seis anos, o lucro, L , da sua empresa em função do número de anos decorridos, N , poderia ser aproximado por uma transformação linear $L = a + bN$. Atendendo a que os resultados do seu negócio foram

| | | | | |
|-----------------------------------|---|---|---|---|
| N (número de anos) | 0 | 1 | 3 | 6 |
| L (lucro, em milhares de euros) | 0 | 1 | 3 | 4 |

determine:

- (a) a recta dos mínimos quadrados para o problema descrito;
- (b) um valor para o lucro previsível no final do sétimo ano.

| Formulário | |
|--|---|
| Primitiva de $f^m f'$ | $\frac{f^{m+1}}{m+1} + C$ ($m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) |
| Primitiva de $\frac{f'}{f}$ | $\ln f + C$ |
| Primitiva de $a^f f'$ | $\frac{a^f}{\ln a} + C$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) |
| Método de Euler | $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ |
| Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$ | $I(x) = e^{\int P(x)dx}$ |
| Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$ | $A^T Ax = A^T b$ |