Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência Modelo de Matemática (Licenciatura em Ciências Farmacêuticas)

10 de Novembro de 2006 — Duração: 1,5 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Às 5 horas da tarde a fragata Vasco da Gama encontra-se a 30 milhas a sul do navio-escola Sagres e navega rumo a norte a uma velocidade de 15 milhas por hora. Supondo que o navio-escola navega para oeste a uma velocidade de 10 milhas por hora, determine o instante em que a distância entre as duas embarcações é mínima.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

   (a) Se uma função é contínua num ponto então é diferenciável nesse ponto.

   (b) A função de produção Cobb-Douglas $P = L^{\alpha}K^{\beta}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação

   $$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P.$$

   (c) A taxa de variação máxima de $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, em $(1,0)$ ocorre na direcção do vector $v = (1,1)$.

   (d) $\ln a \leq \int_1^a \frac{e^t}{t}\,dt, \qquad a \geq 1.$

3. Calcule o valor dos seguintes integrais

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$

   (b) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$, com a substituição $x = t^2$;

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \operatorname{sen} 2x\,dx.$

4. Determine a natureza do integral

   $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}\,dx,$$

   justificando convenientemente a sua resposta.

5. Calcule o volume de um cone de altura h e raio da base r.