Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática (Licenciatura em Ciências Farmacêuticas)

## Funções polinomiais

Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ forem números reais, uma função polinomial tem a forma

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \end{array}$$

Podemos tomar para $D$ qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$.

## Funções irracionais

Seja $P(x)$ um polinómio. As funções do tipo

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left(\sqrt[q]{P(x)}\right)^p \end{array}$$

são ditas irracionais. O seu maior domínio será $\mathbb{R}$ de $q$ for ímpar e $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se $q$ for par.

## Fracções racionais

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinómios. As fracções racionais são funções do tipo

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}. \end{array}$$

Podemos tomar para $D$ qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ onde $Q$ não se anule.

## Função exponencial

Se $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ então

$$a^{p/q}, \qquad a \in \mathbb{R}^+,$$

tem uma definição elementar. Se $x$ é um número irracional então a definição $a^x$ pode ser dada como se segue: se $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ for o termo geral de uma sucessão de números racionais convergente para $x$, então $a^x$ é o limite (que existe sempre) da sucessão de termo geral $a^{x_n}$.

Temos assim que para todo o $a > 0$ é possível definir a função exponencial de domínio $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $a^x$. Quando $a = e$ (número de Euler), sendo

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459045\ldots,$$

temos a chamada função exponencial natural.

### Propriedades

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad (e^x)^y = e^{xy}.$$

## Função logarítmica

$$
\begin{array}{llll}
\text{Logarítmo de base } a: & y = \log_a x & \Leftrightarrow & a^y = x, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \\
\text{Logarítmo de base 10:} & y = \log x & \Leftrightarrow & 10^y = x; \\
\text{Logarítmo natural:} & y = \ln x & \Leftrightarrow & e^y = x.
\end{array}
$$

**Propriedades**

$$
\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \quad \ln x^y = y \ln x; \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \ \ \text{(mudança de base).}
$$

## Funções $f(x)^{g(x)}$

Por definição

$$
f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)},
$$

onde $e$ é o número de Euler. Isto significa que $f(x)^{g(x)}$ só está definida se $f(x) > 0$. Nalguns casos particulares que não exijam esta definição, como é o caso de $f(x)^{p/q} = \left(\sqrt[q]{f(x)}\right)^p$, o domínio pode ser alargado.

## Funções trigonométricas directas

**Fórmulas fundamentais**

$$
\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \qquad \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).
$$

**Outras funções trigonométricas**

$$
\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.
$$

**Outras fórmulas importantes**

$$
\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.
$$

## Funções trigonométricas inversas

$$
\begin{array}{llllll}
y = \operatorname{arc\,sen} x & \Leftrightarrow & \operatorname{sen} y = x, \ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}; & y = \operatorname{arc\,cos} x & \Leftrightarrow & \cos y = x, \ 0 \leq y \leq \pi; \\
y = \operatorname{arc\,tg} x & \Leftrightarrow & \operatorname{tg} y = x, \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}; & y = \operatorname{arc\,cotg} x & \Leftrightarrow & \operatorname{cotg} y = x, \ 0 < y < \pi; \\
y = \operatorname{arc\,sec} x & \Leftrightarrow & \sec y = x, \ 0 < y < \pi; & y = \operatorname{arc\,cosec} x & \Leftrightarrow & \operatorname{cosec} y = x, \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.
\end{array}
$$

**Principais fórmulas**

$$
\operatorname{arg\,th} x = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arc\,cosec}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right);
$$

$$
\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x + \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x = \operatorname{arc\,cosec} x + \operatorname{arc\,sec} x = \frac{\pi}{2}.
$$

## Funções hiperbólicas directas

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

**Fórmula fundamental**

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

**Outras fórmulas importantes**

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

**Outras funções hiperbólicas**

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

## Funções hiperbólicas inversas

$$\begin{array}{llllll}
y = \arg \operatorname{sh} x & \Leftrightarrow & \operatorname{sh} y = x; & y = \arg \operatorname{ch} x & \Leftrightarrow & \operatorname{ch} y = x, \quad 0 \le y; \\
y = \arg \operatorname{th} x & \Leftrightarrow & \operatorname{th} y = x; & y = \arg \operatorname{coth} x & \Leftrightarrow & \operatorname{coth} y = x, \quad y \neq 0; \\
y = \arg \operatorname{sech} x & \Leftrightarrow & \operatorname{sech} y = x, \quad 0 \le y; & y = \arg \operatorname{cosech} x & \Leftrightarrow & \operatorname{cosech} y = x, \quad y \neq 0.
\end{array}$$

**Fórmulas de redução**

$$\arg \operatorname{sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \arg \operatorname{ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \ge 1,$$

$$\arg \operatorname{th} x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| < 1, \qquad \arg \operatorname{coth} x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| > 1,$$

$$\arg \operatorname{sech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \le 1 \qquad \arg \operatorname{cosech} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right).$$

**Principais fórmulas que relacionam as funções hiperbólicas inversas**

$$\arg \operatorname{sh} x = \operatorname{sgn}(x) \arg \operatorname{ch}\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \arg \operatorname{th}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \qquad \arg \operatorname{ch} x = \arg \operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \ge 1.$$

## Funções descontínuas

**Função sinal**

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

**Função Heaviside**

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

**Função rectângulo**

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

**Função característica**

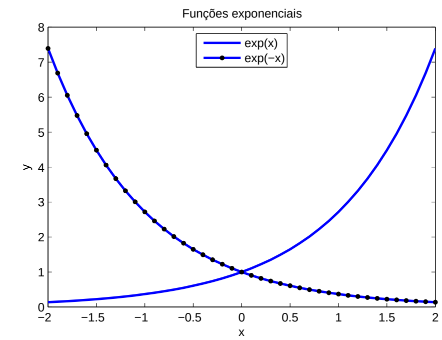
Se $n \le x \le n+1, n \in \mathbb{Z}$, $\qquad \mathrm{C}(x) := [x] = n \qquad$ (maior inteiro inferior ou igual a $x$).

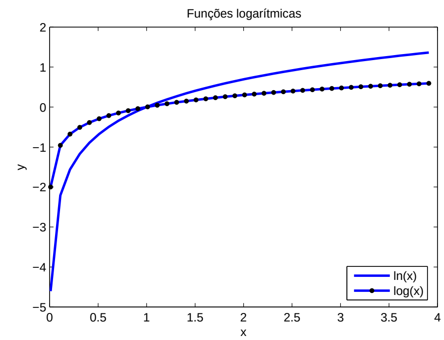
**Função mantissa**

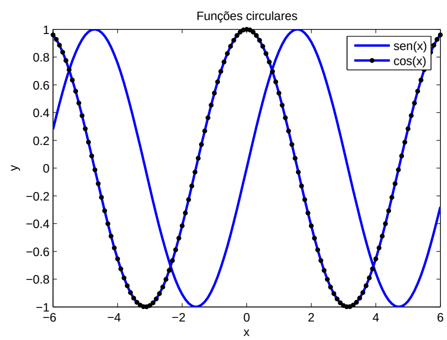
$\mathrm{M}(x) = x - [x] \qquad$ (parte decimal de $x$).

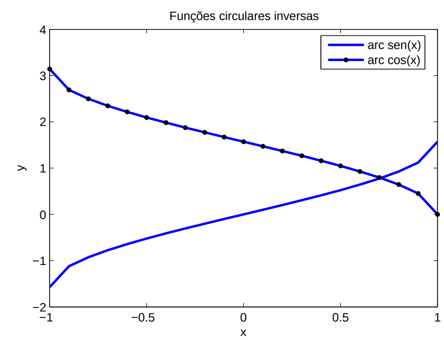
**Relações importantes**

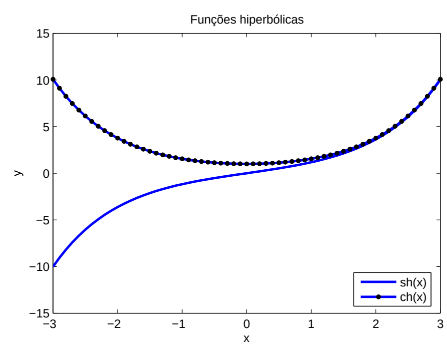
$$\Pi(x) = \mathrm{H}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{H}\left(x - \frac{1}{2}\right), \qquad \operatorname{sgn}(x) = 2\mathrm{H}(x) - 1.$$

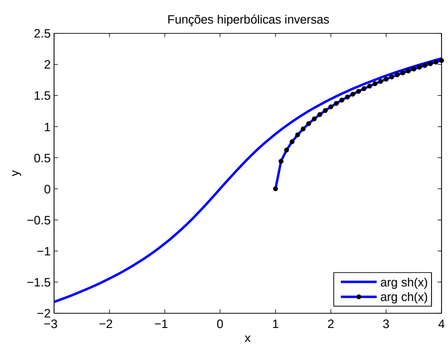

Funções exponenciais
exp(x)
exp(−x)
x
y

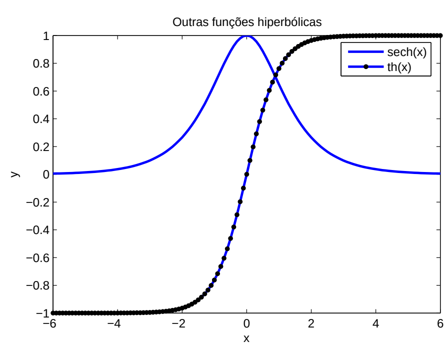

Funções logarítmicas
ln(x)
log(x)
x
y

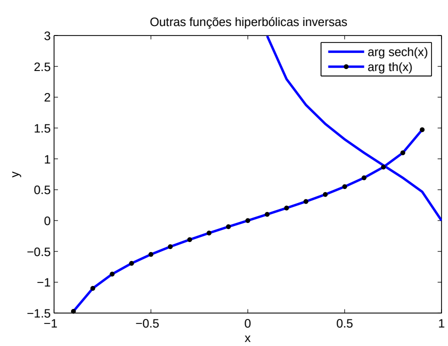

Funções circulares
sen(x)
cos(x)
x
y


Funções circulares inversas
arc sen(x)
arc cos(x)
x
y


Funções hiperbólicas
sh(x)
ch(x)
x
y


Funções hiperbólicas inversas
arg sh(x)
arg ch(x)
x
y


Outras funções hiperbólicas
sech(x)
th(x)
x
y


Outras funções hiperbólicas inversas
arg sech(x)
arg th(x)
x
y