Departamento de Matemática da FCTUC

Exame de Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais

5 de Julho de 2005 Duração: 2h30m

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

PARTE 1

1. Considere o problema

$$-(pu')' + qu' + ru = f, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

com p uma função positiva e q uma função não nula.

(a) Deduza a formulação fraca do problema anterior e mostre que a forma bilinear obtida é limitada e se

$$\|q\|_\infty^2 < 4\underline{p}\underline{r},$$

com $\underline{p} = \inf_{x\in[0,1]} p(x) > 0$ e $\underline{r} = \inf_{x\in[0,1]} |r(x)|$, é também elíptica. (Nota: Considere a desigualdade $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$, válida para $a, b \in \mathbb{R}$ e todo o $\epsilon > 0$)

(b) Formule o problema de Ritz-Galerkin num espaço de funções que considere adequado.

(c) Diga, justificando convenientemente, se o problema de Ritz-Galerkin dado na alínea anterior tem solução única.

2. Seja u a solução do problema $-\Delta u = f$, em $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g$ em $\partial\Omega$, em que e $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω e η a normal exterior unitária. Em $\overline{\Omega}$ considere a rede uniforme de espaçamento h, $\overline{\Omega}_h$ e seja $\partial\Omega^* = \partial\Omega - \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

Seja u_h a aproximação a u obtida pelo esquema de diferenças finitas

$$\begin{cases} -\Delta_h u_h = f_h, & (x,y) \in \Omega, \\ B_\eta u_h = g_h, & (x,y) \in \partial\Omega^*. \end{cases}$$

(a) Escreva o esquema de diferenças finitas dado na forma $L_h u_h = \widetilde{f}_h$, quando se consideram 4 pontos em Ω.

(b) Diga qual a condição de compatibilidade que permite concluir que o esquema de diferenças finitas tem solução. Será que a solução é única?

(c) Como poderia demonstrar a convergência do método?

3. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,1), t \in (0,T], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

Em $[0,1]$ considere a rede uniforme de espaçamento h dada por $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$.

(a) Mostre que, se para cada $t \in (0,T]$ o problema de Ritz-Galerkin semi-discreto associado ao problema dado tem solução $u_h(t) \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $(u_h)_t(t) \in L^2(\Omega)$, então essa solução é estável relativamente a perturbações da condição inicial.

(b) Obtenha o sistema de equações ordinárias que permite determinar os coeficientes da aproximação semi-discreta de Ritz-Galerkin com as funções em spline de grau 1.

(c) Diga como poderia resolver o sistema de equações obtido na alínea anterior usando o método de Euler implícito.

4. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_x + \beta u_{xx} + \gamma u, & x \in (0,1), t \in (0,T], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

com $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma < 0$. Em $[0,1]$ considere a rede uniforme de espaçamento h dada por $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$.

(a) Seja $u_h(t)$ a aproximação semi-discreta obtida discretizando a derivada parcial de primeira ordem no espaço pelo operador de diferenças progressivo de primeira ordem e a segunda derivada no espaço pelo operador centrado de segunda ordem. Mostre que se $-\frac{\alpha}{4\gamma} < \frac{\beta}{\alpha}$, então

$$\|u_h(t)\|_h \leq \|u_0\|_h, \qquad t \in [0,T],$$

em que $\|v_h\|_h = \left(h \sum_{i=1}^{N-1} v_h(x_i)^2\right)^{1/2}$.

(b) Em $[0,T]$ considere a rede uniforme de espaçamento Δt dada por $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{M-1} < t_M = T$.

i. Enuncie e demonstre o Teorema de Lax.

ii. Estude a estabilidade e convergência do método de diferenças ($r = \Delta t / h^2$)

$$u_i^{m+1} = \beta r u_{i-1}^m + (1 + \gamma \Delta t - 2\beta r - \alpha h r) u_i^m + (\beta r + \alpha h r) u_{i+1}^m, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

(c) Considere o método particionado ($i = 1, \ldots, N-1$)

- $p_i^m := u_i^m, \qquad p_i^{m+1} = p_i^m + \alpha h r (p_{i+1}^m - p_i^m),$
- $v_i^m := p_i^{m+1}, \qquad v_i^{m+1} = \beta r v_{i-1}^m + (1 - 2\beta r) v_i^m + \beta r v_{i+1}^m,$
- $w_i^m := v_i^{m+1}, \qquad w_i^{m+1} = \frac{1}{1-\gamma\Delta t} w_i^m,$

em que $w_i^{m+1} \approx u(x_i, t_{m+1})$.

i. Diga como foi deduzido o método anterior.

ii. Comente a afirmação: "O método particionado anterior é mais estável que o método apresentado na alínea anterior."