Departamento de Matemática da FCTUC

Exame de Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais

22 de Julho de 2005 — Duração: 3 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

PARTE 1

1. Pretende-se determinar a solução numérica do problema

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f, & \Omega = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

numa malha não uniforme de espaçamento h.

   (a) Mostre que são equivalentes as soluções obtidas com o método de elementos finitos linear e com um método de diferenças finitas apropriado.

   (b) Seja u_h a aproximação à sua solução obtidas com o método de elementos finitos linear. Mostre que o erro na aproximação de u por u_h pode ser estimado por $\|u_h - u\|_0 \leq C\|u''\|_0 h^2$, com C uma constante positiva.

2. Seja u a solução do problema $-\Delta u + g(u) = f$, em $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e $u = u_{\partial\Omega}$ em $\partial\Omega$, em que e $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω. Em $\overline{\Omega}$ considere a rede uniforme de espaçamento $h = 1/N$, $\overline{\Omega}_h$ e seja $\partial\Omega^* = \partial\Omega - \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

   (a) Considere $g = 0$ e seja u_h a aproximação a u obtida pelo esquema de diferenças finitas

$$\begin{cases} -\Delta_h u_h = f_h, & (x,y) \in \Omega_h, \\ u_h = u_{\partial\Omega,h}, & (x,y) \in \partial\Omega^*. \end{cases}$$

      i. Escreva o esquema de diferenças finitas dado na forma $L_h u_h = \widetilde{f_h}$ e mostre que L_h é invertível com $\|L_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$.

      ii. Mostre que $\|u_h\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f_h\|_\infty + \|u_{\partial\Omega,h}\|_\infty$.

   (b) Considere

$$\begin{cases} -\Delta_h u_h(P) + g\left(\frac{1}{4}\sum_{Q\in V(P)} u_h(Q)\right) = f_h(P), & P \in \Omega_h, \\ u_h = u_{\partial\Omega,h}, & \text{em } \partial\Omega^*, \end{cases}$$

   em que $V(P) = \{P \pm he_i, i = 1,2\}$. Supondo que $g' \leq \frac{1}{8}$ determine $\|u - u_h\|_\infty$.

PARTE 2

3. Seja u a solução do problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u + x^2 y, & (x,y) \in \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ u = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

onde $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω.

(a) Indique um problema variacional associado num enquadramento funcional adequado.

(b) Supondo que o problema variacional dado na alínea anterior tem solução, averigúe da sua unicidade bem como da sua estabilidade relativamente a perturbações da condição inicial.

(c) Considere a partição de elementos finitos Q_h numa rede quadrangular uniforme de espaçamento $h = \frac{1}{2}$. Obtenha o sistema de equações diferenciais ordinárias que permite determinar os coeficientes da aproximação semi-discreta de Ritz-Galerkin.

4. Considere o método de diferenças finitas $u_h^{n+1} = L_{h,\Delta t} u_h^n$ para a aproximação da solução de um problema parabólico numa rede uniforme de espaçamentos Δt no tempo e h no espaço.

(a) Mostre que o método é estável relativamente à norma $\|\cdot\|_h$ se e só se

$$\|L_{h,\Delta t}\|_h \leq K \exp\left(\beta(m+1)\Delta t\right),$$

para constantes $K, \beta > 0$. Conclua que se

$$\|L_{h,\Delta t}\|_h \leq 1 + C\Delta t,$$

para alguma constante C independente de h e Δt, então o método é estável.

(b) Considere o esquema de diferenças finitas

$$\frac{u_i^{n+1} - (1-\alpha)u_i^n - \alpha u_i^n}{(1+\alpha)\Delta t} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \qquad \alpha \in \{0,1\},$$

para o problema $u_t = u_{xx}$ em $0 \leq x \leq 1$, com $t \in \mathbb{R}^+$, $u(x,0) = x^2 y$ e condições de fronteira $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$.

i. Estude a estabilidade do esquema de diferenças finitas relativamente a uma norma que considere adequada, em função de α e $r = \Delta t/h^2$.

ii. Mostre que, para $\alpha = 0$ o método esquema de diferenças finitas é convergente.