

1. (a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que, para todo o $\epsilon > 0$,

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2,$$

e

$$a + b \leq \left[(1 + \epsilon)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)b^2 \right]^{1/2}.$$

- (b) Mostre que a forma bilinear $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, com $V = H_0^1([0, 1])$,

$$a(u, v) = \int_0^1 (pu'v' + qu'v + ruv)dx,$$

com $\underline{p} = \inf_{x \in [0, 1]} p(x) > 0$, q não nula e $\underline{r} = \inf_{x \in [0, 1]} |r(x)|$ é limitada e, se

$$\|q\|_\infty^2 < 4\underline{p}\underline{r}$$

é também elíptica.

2. Seja u a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + 3u = \sin(xy), & (x, y) \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω . Obtenha a formulação fraca do problema num enquadramento funcional adequado e averigüe da existência e unicidade da sua solução.

3. Considere o problema de Dirichlet não homogéneo

$$\begin{cases} -\nabla^T(a(x)\nabla u(x)) + b(x)^T\nabla u(x) + d(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^2$, $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$, $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em Ω , $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$. Seja $w \in H^1(\Omega)$ tal que $w(x) = g(x)$ para $x \in \partial\Omega$ e $\tilde{u}(x) = u(x) - w(x)$.

- (a) Deduza a equação diferencial para $\tilde{u}$.

- (b) Deduza a formulação fraca da equação diferencial obtida na alínea anterior.

4. Prove o Lema de Gronwall: Seja $\{v_i\}_{i=0}^N$ uma sucessão de números positivos tais que $v_{i+1} \leq Cv_i + D$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, com C e D constantes e $C > 0$. Então, para todo o $i = 0, \dots, N$,

$$v_i \leq \frac{D}{1-C}(1-C^i) + v_0C^i, \quad C \neq 1, \quad \text{e} \quad v_i \leq iD + v_0, \quad C = 1.$$

5. Seja u uma função suficientemente regular, definida em $[a, b]$, e $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, com $h = \frac{b-a}{N}$, $N \geq 2$, uma partição regular do intervalo. Mostre que:

(a) $D_x^+ u(x_i) := \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(\xi_i)$, $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \dots, N-1$;

(b) $D_x^- u(x_i) := \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} = u'(x_i) - \frac{h}{2}u''(\xi_i)$, $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \dots, N$;

(c) $D_{2x} u(x_i) := D_x^+ D_x^- u(x_i) := \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{12}u^{(iv)}(\xi_i)$, $\xi_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$, $i = 1, \dots, N-1$.