Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais (2008/2009)

Data de recepção: **30/04/2009** **Ficha 2** Data de entrega: **4/06/2009**

1. Seja $u$ a solução do problema

$$\begin{cases} u_t - \nabla^T(a(x)\nabla u) + cu = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}, \quad t \in ]0,T], \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

onde $c > 0$ e $a(x)$ uma função positiva e limitada para todo o $x$ em $\Omega$. Mostre que:

(a) $\|u(t)\|_0 \leqslant \|u_0\|_0, \quad t \geqslant 0$;

(b) $\|\nabla u(t)\|_0 \leqslant C\|\nabla u_0\|_0, \quad t \geqslant 0$.

(c) Considere o caso em que $n = 1$, $\Omega = ]0,1[$, $c = 0$ e $a(x) = a > 0$, para todo o $x \in \Omega$. Para resolver numericamente este problema, considere o esquema de diferenças finitas

$$U_j^{m+1} = U_j^m + r(U_{j+1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j-1}^{m+1}), \qquad U_0^m = U_N^m = 0,$$

com $r = a\Delta t/h^2$, definido numa rede uniforme de espaçamentos $\Delta t$ no tempo e $h = 1/N$ no espaço. Mostre que o método é incondicionalmente estável relativamente à versão discreta da norma $\|\cdot\|_0$.

2. Para determinar a relação tensão-deformação e as propriedades do material de um cilindro sujeito a um processo alternado de aquecimento e arrefecimento, Sagar e Paine (Journal of the Mechanics of Solids, 1975) consideraram a equação

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{1}{4K}\dfrac{\partial T}{\partial t}, & r \in ]0{,}5, 1[, \quad t > 0, \\ u(0{,}5, t) = g_1(t), \quad u(1,t) = g_2(t) & t \geqslant 0, \\ u(r,0) = u_0(r), & [0{,}5, 1], \end{cases}$$

onde $T = T(r,t)$ é a temperatura, $r$ a distância radial medida a partir do centro do cilindro, $t$ o tempo e $K$ o coeficiente de difusividade.

(a) Determine uma aproximação para a temperatura $T(r,t)$, $t \in [0,10]$, para um cilindro de raio 1, dada a condição inicial $u_0(r) = 200(r - 0{,}5)$ e as condições de fronteira $g_1(t) = t$, $g_2(t) = 100 + 40t$. Use diferentes métodos numéricos e diferentes valores para o ceficiente de difusividade e compare os resultados obtidos.

(b) Usando a distribuição de temperatura considerada na alínea anterior, calcule uma aproximação para a tensão

$$I = \int_{0{,}5}^{1} \alpha T(r,t) r dr,$$

com $\alpha = 10{,}7$ e $t = 10$.