

DATA DE ENTREGA: 22 DE MARÇO DE 2007

1. (a) Obtenha a formulação fraca simétrica para o problema

$$-u'' + (1 + \cos x)u = \sin x, \quad \Omega = (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (1)$$

- (b) Mostre que a forma bilinear obtida na alínea (a) é elíptica.
(c) Formule o problema de Ritz-Galerkin num espaço de funções polinomiais de dimensão três, indicando funções de base que lhe pareçam adequadas.
(d) Diga, justificando convenientemente, se o problema de Ritz-Galerkin dado na alínea anterior tem solução única.

2. Consideremos uma rede I_h dada por $I_h = \{x_i, i = 0, \dots, n\}$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$, e V_h o espaço gerado pelas funções chapéu

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}} & x \in]x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \in [a, x_{i-1}[\cup]x_{i+1}, b] \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

onde $h_i = x_i - x_{i-1}$.

- (a) Prove que V_h é um subespaço de $H_0^1([a, b])$ de dimensão $n - 1$.
(b) Considerando o problema (1), obtenha o sistema algébrico que lhe permite calcular uma solução aproximada no espaço V_h , usando o método de Ritz-Galerkin.

3. Considere o problema com condições de fronteira

$$-(pu')' + qu = f, \quad \Omega = (a, b), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

e u_h a aproximação à sua solução por elementos finitos lineares segmentados de primeira ordem. Mostre que o erro na aproximação de u por u_h pode ser estimado por

$$\|u_h - u\|_0 \leq C \|u''\|_0 h^2,$$

com C uma constante positiva.

4. No interior de uma conduta cilíndrica circula um fluido a alta temperatura. Visto que a pressão exercida pelo fluido é bastante elevada, as paredes da conduta não poderão ter uma espessura muito reduzida. Para esta situação, a equação diferencial que representa a temperatura u (em *graus Celsius*), na parede metálica em função da distância radial r (em *cm*) ao eixo do cilindro é

$$ru'' + u' = 0.$$

Considerando uma conduta com raio interior de 1 *cm* e raio exterior de 2 *cm*, pretende-se determinar um valor aproximado para a temperatura no interior do cilindro, supondo que a temperatura do fluido é de 540°C e a temperatura da parede exterior é de 20°C.

- (a) Determine a aproximação pretendida usando o método dos elementos finitos com funções segmentadas lineares.
(b) Determine, numericamente, uma estimativa para o erro cometido.