Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais

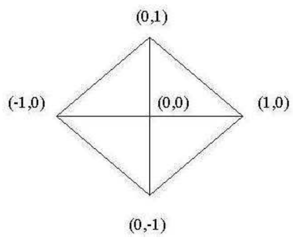
Ano de 2006/2007 Ficha 2

Data de Entrega: 19 de Abril de 2007

1. Mostre que a forma bilinear $a : V \times V \longrightarrow IR$, com $V = H_0^1([0,1])$,
$$a(u,v) = \int_0^1 (pu'v' + qu'v + ruv)dx,$$
com $\underline{p} = \inf_{x\in[0,1]} p(x) > 0$, q não nula e $\underline{r} = \inf_{x\in[0,1]} |r(x)|$ é limitada e, se $\|q\|_\infty^2 < 4\underline{p}\underline{r}$ é também elíptica. (Use o facto de $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$, para todo o $\epsilon > 0$.)

2. Considere o problema de transmissão do calor $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,1), t \in (0,T], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,T], \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & x \in (0,1). \end{cases}$ Em $[0,1]$ considere a rede uniforme de espaçamento h dada por $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$.
   (a) Obtenha o sistema de equações ordinárias que permite determinar os coeficientes da aproximação semi-discreta de Ritz-Galerkin com as funções em spline de grau 1.
   (b) Diga como poderia resolver o sistema de equações obtido na alínea anterior usando o método de Euler implícito.

3. Seja u a solução do problema $-\Delta u = f$, em Ω, $u = u_{\partial\Omega}$, em $\partial\Omega$, em que Ω é o domínio dado na figura seguinte e $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω.



   (a) Indique a formulação fraca associada ao problema dado, num enquadramento funcional adequado, e averigúe da existência e unicidade da sua solução.
   (b) Considere a partição de elementos finitos T_h indicada na figura. Estabeleça a matriz de rigidez que permite determinar a solução de elementos finitos.

4. Prove o Lema de Gronwall: Seja $\{v_i\}_{i=0}^N$ uma sucessão de números positivos tais que $v_{i+1} \leq Cv_i + D$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, com C e D constantes e $C > 0$. Então, para todo o $i = 0, \ldots, N$,
$$v_i \leq \frac{D}{1-C}(1 - C^i) + v_0 C^i, \quad C \neq 1, \qquad \text{e} \qquad v_i \leq iD + v_0, \quad C = 1.$$

5. Seja u uma função suficientemente regular, definida em $[a,b]$, e $x_k = a + k\Delta x$, $k = 0, 1, ..., N$, com $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, $N \geq 2$, uma partição regular do intervalo. Mostre que:
   (a) $D_x u(x_k) := \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{\Delta x} = u'(x_k) + \frac{\Delta x}{2} u''(\xi_k), \quad \xi_k \in]x_k, x_{k+1}[, \quad k = 0, ..., N-1;$
   (b) $D_{-x} u(x_k) := \frac{u(x_{k-1}) - u(x_k)}{\Delta x} = u'(x_k) - \frac{\Delta x}{2} u''(\xi_k), \quad \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[, \quad k = 1, ..., N;$
   (c) $D_c u(x_k) := \frac{u(x_{k+1}) - u(x_{k-1})}{2\Delta x} = u'(x_k) + \frac{\Delta x^2}{12}(u'''(\xi_k) + u'''(\eta_k)), \quad \xi_k, \eta_k \in]x_{k-1}, x_{k+1}[,$ $k = 1, ..., N-1;$
   (d) $D_2 u(x_k) := \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1})}{\Delta x^2} = u''(x_k) + \frac{\Delta x^2}{24}(u^{(iv)}(\xi_k) + u^{(iv)}(\eta_k)), \quad \xi_k, \eta_k \in]x_{k-1}, x_{k+1}[,$ $k = 1, ..., N-1.$