DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS

ANO DE 2006/2007 FICHA 4

DATA DE ENTREGA: 12 DE JUNHO DE 2007

1. Considere o problema de Poisson num quadrado unitário. Deduza um esquema compacto de diferenças finitas com 9 pontos de ordem 4 para aproximar a solução do problema.

2. Considere o problema

$$-u'' = f, \qquad \Omega =]0,1[, \qquad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

   (a) Usando diferenças centradas de segunda ordem, obtenha um esquema de diferenças finitas para o problema dado, e represente-o na forma $AU = F$.

   (b) Mostre que a matriz A obtida na alínea anterior é simétrica positiva definida, tem valores próprios

$$\lambda_i = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{i\pi h}{2}\right), \qquad i = 1, ..., N-1,$$

   onde $h = 1/N$, e vectores próprios correspondentes dados por

$$v_i(x) = \sin(i\pi x), \qquad i = 1, ..., N-1.$$

   (c) Mostre que, relativamente à norma matricial que pretender, $\|A^{-1}\|$ é limitada, sendo A a matriz obtida na alínea (a).

3. Considere o esquema de diferenças finitas

$$u_j^{m+1} = (1-2r)u_j^m + r(u_{j+1}^m + u_{j-1}^m) + \Delta t f(u_j^{m+1}), \qquad u_0^{m+1} = u_N^{m+1} = 0,$$

   com $r = \beta\Delta t/h^2$ e $\beta > 0$, aplicado à resolução numérica do problema de difusão-reacção não linear $u_t = \beta u_{xx} + f(u)$, com $x \in]0,1[$, $t \in I\!R^+$, $u(x,0) = u_0(x)$ e condições de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$, definido numa rede uniforme de espaçamentos Δt no tempo e $h = 1/N$ no espaço. Seja u_j^0 a condição inicial (numérica) e $\widetilde{u}_j^0$ uma sua perturbação que produz os resultados $\widetilde{u}_j^{m+1}$.

   (a) Escreva o esquema de diferenças finitas para $w_j^{m+1} = u_j^{m+1} - \widetilde{u}_j^{m+1}$.

   (b) Mostre que se:

      i. a reacção for de consumo ($f' < 0$) o método é estável se $r \leq 1/2$;

      ii. a reacção for de produção ($f' > 0$) o método é estável se $r \leq 1/2$ e $\Delta t < 1/f'_{max}$, sendo f'_{max} o maior valor da derivada de f.

4. Considere o esquema de diferenças finitas

$$u_j^{m+1} = (1-2r)u_j^m + r(u_{j+1}^m + u_{j-1}^m), \qquad u_N^m = 0, \ u_0^m = u_1^m,$$

   com $r = \beta\Delta t/h^2$ e $\beta > 0$, aplicado à resolução numérica do problema de difusão $u_t = \beta u_{xx}$, com $x \in]0,1[$, $t \in I\!R^+$, $u(x,0) = u_0(x)$ e condições de fronteira $u_x(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, definido numa rede uniforme de espaçamentos Δt no tempo e $h = 1/N$ no espaço. Analise o método quanto à sua consistência e estabilidade.

5. Analise, relativamente à norma $\|\cdot\|_2$, a estabilidade do esquema

$$-\alpha r u_{j-1}^{m+1} + (1+2\alpha r)u_j^{m+1} - \alpha r u_{j+1}^{m+1} = (1-\alpha)r u_{j-1}^m + (1-2(1-\alpha)r)u_j^m + (1-\alpha)r u_{j+1}^m$$

   com $r = \beta\Delta t/h^2$, $\beta > 0$ e $\alpha \in [0,1]$, aplicado à resolução numérica do problema de difusão $u_t = \beta u_{xx}$, com $x \in \mathbb{R}$, $t \in I\!R^+$ e condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$, definido numa rede uniforme de espaçamentos Δt no tempo e h no espaço.