

DATA DE ENTREGA: 18 DE MARÇO DE 2005

1. (a) Obtenha a formulação fraca simétrica para o problema

$$-u'' + (1 + \cos x)u = \sin x, \quad \Omega = (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (1)$$

(b) Mostre que a forma bilinear obtida na alínea (a) é elíptica.

(c) Formule o problema de Ritz-Galerkin num espaço de funções polinomiais de dimensão três, indicando funções de base que lhe pareçam adequadas.

(d) Diga, justificando convenientemente, se o problema de Ritz-Galerkin dado na alínea anterior tem solução única.

2. Consideremos uma rede I_h dada por $I_h = \{x_i, i = 0, \dots, n\}$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$, e V_h o espaço gerado pelas funções chapéu

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}} & x \in]x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \in [a, x_{i-1}[\cup]x_{i+1}, b] \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

onde $h_i = x_i - x_{i-1}$.

(a) Prove que V_h é um subespaço de $H_0^1([a, b])$ de dimensão $n - 1$.

(b) Considerando o problema (1), obtenha o sistema algébrico que lhe permite calcular uma solução aproximada no espaço V_h , usando o método de Ritz-Galerkin.

3. Diga a que espaços de Sobolev $H^m([0, 1])$, $m = 0, 1, \dots$, pertencem as seguintes funções definidas em $[0, 1]$: a) \sqrt{x} ; b) $\ln x$; c) $x \ln x$; d) $1/x$.

4. Considere o problema de condições de fronteira

$$\begin{cases} -u'' + Au' = 0, & x \in [0, 1], \quad A \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{cases}$$

(a) Determine o sistema algébrico que lhe permite obter a solução aproximada do problema usando diferenças centradas de segunda ordem.

(b) Mostre que a solução exacta do sistema algébrico obtido é

$$u_i = \frac{1 - R^i}{1 - R^{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{onde} \quad R = \frac{1 + P}{1 - P}, \quad P = \frac{Ah}{2}$$

e h a medida a amplitude da partição uniforme considerada na alínea anterior.

(c) Que condições deverá impôr a h por forma a evitar oscilações na solução aproximada.

5. No interior de uma conduta cilíndrica circula um fluido a alta temperatura. Visto que a pressão exercida pelo fluido é bastante elevada, as paredes da conduta não poderão ter uma espessura muito reduzida. Para esta situação, a equação diferencial que representa a temperatura u (em *graus Celsius*), na parede metálica em função da distância radial r (em *cm*) ao eixo do cilindro é

$$ru'' + u' = 0.$$

Considerando uma conduta com raio interior de 1 *cm* e raio exterior de 2 *cm* determine um valor aproximado para a temperatura no interior do cilindro, supondo que a temperatura do fluido é de 540°C e a temperatura da parede exterior é de 20°C.