Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais

Ano de 2005/2006 Ficha 1

Data de Entrega: 15 de Março de 2006

1. Considere o problema

$$-u'' = f, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

   (a) Usando diferenças centradas de segunda ordem, obtenha um esquema de diferenças finitas para o problema dado, e represente-o na forma $AU = F$.

   (b) Mostre que a matriz A obtida na alínea anterior é simétrica positiva definida, tem valores próprios

$$\lambda_i = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{i\pi h}{2}\right), \qquad i = 1, ..., N-1,$$

   onde $h = \frac{1}{N}$, e vectores próprios correspondentes dados por

$$v_i(x) = \sin(i\pi x), \qquad i = 1, ..., N-1.$$

   (c) Mostre que a matriz A obtida na alínea (a) é da classe M e que $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$.

2. Considere o problema

$$-(pu')' + qu = f, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

   com p uma função positiva.

   (a) Obtenha um esquema de diferenças finitas consistente para o problema dado e indique a sua ordem de consistência.

   (b) Estabeleça condições para que o método dado na alínea anterior seja convergente e indique uma estimativa para o erro global.

3. Considere o problema de condições de fronteira

$$\begin{cases} -u'' + Au' = 0, & x \in [0,1], \quad A \in IR, \\ \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{cases}$$

   (a) Determine o sistema algébrico que lhe permite obter a solução aproximada do problema usando diferenças centradas de segunda ordem.

   (b) Mostre que a solução exacta do sistema algébrico obtido é

$$u_i = \frac{1 - R^i}{1 - R^{n+1}}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{onde} \qquad R = \frac{1+P}{1-P}, \quad P = \frac{Ah}{2}$$

   e h a medida a amplitude da partição uniforme considerada na alínea anterior.

   (c) Que condições deverá impôr a h por forma a evitar oscilações na solução aproximada.

4. Considere um pêndulo de massa M (em quilos) no final de uma barra de comprimento L (em metros). Seja $\theta(t)$ o ângulo que o pêndulo forma com a vertical no instante t (em segundos). Ignorando a massa da barra e as forças de fricção (como a resistência do ar), a equação diferencial que modela o movimento do pêndulo é

$$\theta''(t) = -\frac{gM}{L}\sin(\theta(t)),$$

   com g a constante de gravidade. Supondo $L = 1$ e $M = 3$, determine o movimento do pêndulo, bem como a sua velocidade angular, por forma a que

$$\theta(0) = \frac{\pi}{6}, \qquad \theta(5) = \frac{\pi}{6}.$$