

DATA DE ENTREGA: 8 DE ABRIL DE 2005

1. Pretende-se determinar a solução numérica do problema

$$\begin{cases} -(pu')' = f, & \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

numa malha não uniforme. Mostre que são equivalentes as soluções obtidas com o método de elementos finitos linear e com um método de diferenças finitas apropriado.

2. Considere o problema com condições de fronteira

$$-(pu')' + qu = f, \quad \Omega = (a, b), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

e u_h a aproximação à sua solução por elementos finitos lineares segmentados de primeira ordem. Mostre que o erro na aproximação de u por u_h pode ser estimado por

$$\|u_h - u\|_0 \leq C \|u''\|_0 h^2, \quad (1)$$

com C uma constante positiva.

3. Considere o problema de Poisson num quadrado unitário.

- Deduza um esquema compacto de diferenças finitas com 9 pontos de ordem 4 para aproximar a solução do problema.
- Formule o problema discreto como a resolução de um sistema linear e mostre que a matriz associada é M .
- Mostre que o esquema deduzido na alínea (a) é convergente.

4. No interior de uma conduta cilíndrica circula um fluido a alta temperatura. Visto que a pressão exercida pelo fluido é bastante elevada, as paredes da conduta não poderão ter uma espessura muito reduzida. Para esta situação, a equação diferencial que representa a temperatura u (em *graus Celsius*), na parede metálica em função da distância radial r (em *cm*) ao eixo do cilindro é

$$ru'' + u' = 0.$$

Considerando uma conduta com raio interior de 1 *cm* e raio exterior de 2 *cm*, pretende-se determinar um valor aproximado para a temperatura no interior do cilindro, supondo que a temperatura do fluido é de 540°C e a temperatura da parede exterior é de 20°C.

- Determine a aproximação pretendida usando o método dos elementos finitos com funções segmentadas lineares.
- Confirme experimentalmente a estimativa para o erro obtida em (1).
- Compare a solução obtida em (a) com a solução obtida pelo método das diferenças finitas.