

DATA DE ENTREGA: 12 DE ABRIL DE 2006

1. Considere o problema de Poisson num quadrado unitário.
 - (a) Deduza um esquema compacto de diferenças finitas com 9 pontos de ordem 4 para aproximar a solução do problema.
 - (b) Formule o problema discreto como a resolução de um sistema linear e mostre que a matriz associada é M.
 - (c) Mostre que o esquema deduzido na alínea (a) é convergente.
2. Considere o problema com condições de fronteira

$$-(pu')' + qu = f, \quad \Omega = (a, b), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

e u_h a aproximação à sua solução por elementos finitos lineares segmentados de primeira ordem. Mostre que o erro na aproximação de u por u_h pode ser estimado por

$$\|u_h - u\|_0 \leq C\|u''\|_0 h^2,$$

com C uma constante positiva.

3. Seja u a solução do problema

$$-\Delta u = f, \quad \text{em } \Omega, \quad u = u_{\partial\Omega} \quad \text{em } \partial\Omega,$$

em que Ω é o domínio dado na figura seguinte e $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω .

- (a) Indique um problema variacional associado num enquadramento funcional adequado.
 - (b) Averigúe da existência e unicidade do problema variacional indicado na alínea anterior.
 - (c) Considere a partição de elementos finitos T_h indicada na figura. Estabeleça a matriz de rigidez que permite determinar a solução de elementos finitos.
4. O problema da determinação da distribuição da temperatura num domínio Ω é dado, no caso estacionário, pela equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Considere Ω um quadrado de lado de medida 12 cm dotado de um orifício quadrado (centrado) de lado 6 cm. As condições de fronteira são: a temperatura interior é de -1 grau e a temperatura exterior é $+1$ grau. Determine a temperatura entre as duas fronteiras usando o método dos elementos finitos numa rede uniforme de espaçamento 1 cm. Determine numericamente a ordem de convergência do método na norma euclidiana.