

José Augusto M. Ferreira

Métodos Numéricos  
para  
Equações com Derivadas Parciais

Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade de Coimbra  
2004

As notas que a seguir apresentamos constituem a base teórica de uma disciplina semestral - Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais - que leccionei, nos anos lectivos 2002-2003 e 2003-2004, no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, aos alunos do quarto ano da Licenciatura em Matemática - Ramo Científico, Especialização em Matemática Pura e Matemática Aplicada.

# Conteúdo

<b>Capítulo 1 - Introdução</b>	<b>2</b>
<b>Capítulo 2 - Equações Diferenciais Ordinárias: MDF e MEF</b>	<b>4</b>
<b>1 O Método de Diferenças Finitas</b>	<b>4</b>
1.1 Os métodos de diferenças finitas . . . . .	4
1.2 Resultados matriciais . . . . .	9
<b>2 O Método de Elementos Finitos - caso unidimensional</b>	<b>15</b>
2.1 Formulação variacional . . . . .	15
2.2 O método de Ritz-Galerkin- o método de elementos finitos . . . . .	18
2.3 Estimativas de Erro . . . . .	21
<b>Capítulo 3 - Métodos Numéricos para Equações Elípticas</b>	<b>25</b>
<b>1 Métodos de Diferenças Finitas</b>	<b>25</b>
1.1 Introdução . . . . .	25
1.2 A equação de Poisson: o esquema de 5 pontos . . . . .	25
1.3 Propriedades qualitativas: o teorema da média aritmética, o princípio do máximo . . . . .	27
1.4 Propriedades quantitativas . . . . .	29
1.5 Esquemas de diferenças de ordem elevada . . . . .	32
1.6 Equação de Poisson com condição de Neumann . . . . .	34
1.7 Convergência relativamente a normas de Sobolev discretas . . . . .	40
1.8 Outras equações elípticas . . . . .	41
<b>2 Método de Elementos Finitos</b>	<b>43</b>
2.1 Introdução . . . . .	43
2.2 Formulação variacional . . . . .	43
2.3 Construção dos espaços de elementos finitos . . . . .	49
2.4 Estimativa para o erro da solução de EF . . . . .	55
2.5 Alguns problemas . . . . .	63
<b>Capítulo 4- Problemas de evolução</b>	<b>66</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>66</b>
<b>2 MEF para problemas de evolução</b>	<b>66</b>
2.1 Equação do calor unidimensional . . . . .	66
2.1.1 Formulação variacional . . . . .	66
2.1.2 Aproximação de Ritz-Galerkin . . . . .	68
2.1.3 Aproximação de Ritz-Galerkin discreta no tempo . . . . .	71
2.2 Um problema parabólico modelo . . . . .	71
2.2.1 Formulação variacional . . . . .	71

2.2.2	Aproximação de Ritz-Galerkin . . . . .	73
2.2.3	Aproximação de Ritz-Galerkin discreta . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Métodos de diferenças finitas</b>	<b>77</b>
3.1	Os métodos . . . . .	77
3.2	Propriedades qualitativas e quantitativas . . . . .	81
3.2.1	Convergência . . . . .	81
3.2.2	A aproximação semi-discreta-convergência . . . . .	82
3.2.3	Consistência . . . . .	83
3.2.4	Estabilidade . . . . .	87
3.2.5	O Teorema de Lax . . . . .	89
	<b>Bibliografia</b>	<b>90</b>

## Capítulo 1 - Introdução

As equações diferenciais com derivadas parciais complementadas com condições inicial e ou de fronteira surgem em modelos matemáticos utilizados na modelação de diversos fenómenos físicos, biológicos, . . .

Questões de existência e unicidade de solução dos problemas mencionados foram abordadas na disciplina de Equações com Derivadas Parciais: para uma grande variedade de problemas foram estabelecidas condições que garantem a existência e unicidade de solução. No entanto no que diz respeito à determinação da solução, apenas para um número reduzido de problemas lineares definidos em geometrias muito simples conseguimos obter expressões para as soluções utilizando integrais impróprios dependentes de parâmetros, séries de funções. Observamos finalmente que somente para casos muito simples obtemos expressões de simples manipulação.

Para problemas lineares gerais definidos em geometrias mais complexas, problemas não lineares definidos em geometrias mesmo simples, não são conhecidas técnicas que nos permitam obter a expressão da solução mesmo em termos dos elementos utilizados nos casos considerados nos estudos anteriores.

A substituição do problema diferencial - contínuo em que a solução pertence a um espaço de dimensão infinita - por um problema definido num espaço de dimensão finita em que a solução obtida por esta substituição é uma aproximação - num sentido a especificar - da solução do problema diferencial parece-nos um processo razoavelmente eficiente para determinar, pelo menos de modo aproximado, a solução do problema diferencial.

A construção da aproximação é feita fundamentalmente utilizando dois tipos de métodos:

- Método de Ritz-Galerkin - o problema diferencial é substituído por um problema variacional definido num espaço de Sobolev adequado que, em seguida, é substituído por um espaço de dimensão finita. A escolha da base do espaço de dimensão finita tem um papel central no processo de construção da aproximação. A construção de uma base a partir de uma partição em elementos com propriedades geométricas específicas que têm papel importante na estrutura das funções base, induz uma classe de métodos bastante populares entre os matemáticos mas principalmente de grande interesse em aplicações em engenharia - os métodos de elementos finitos. Nesta última classe de métodos, as funções da base têm o suporte num conjunto finito de elementos e esta característica desempenha um papel central no estabelecimento de um processo eficaz, rápido e robusto para a determinação dos coeficientes da aproximação pertencente ao espaço de dimensão

finita. De facto, a determinação da solução aproximada é feita resolvendo um sistema linear em que a estrutura da matriz depende das propriedades dos suportes das funções da base.

- Métodos de diferenças finitas - o domínio é substituído por um conjunto estruturado de pontos e as derivadas parciais são aproximadas por cocientes de diferenças. Obtemos deste modo um processo que permite construir uma aproximação para a solução apenas no conjunto discreto de pontos.

A eficácia do método numérico - processo que permite construir a solução aproximada - é medida em função do erro com que vem afectada a aproximação para a solução. De facto, se  $u \in V$  é a solução do problema em estudo e  $u_h \in V_h$  é a aproximação obtida, o erro com que vem afectada a aproximação é  $u_h - R_h u$  em que  $R_h$  depende do método considerado -  $R_h$  representa um operador de restrição no caso dos métodos de diferenças finitas,  $R_h = I$  se o método considerado é um método de elementos finitos - e a eficácia do método é determinada por  $\|u_h - R_h u\|$ .

No curso de Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais pretendemos estudar fundamentalmente as propriedades dos métodos numéricos pertencentes às duas classes anteriormente referidas- métodos de diferenças finitas (DF), métodos de elementos finitos (EF). As propriedades anteriores serão de dois tipos : propriedades quantitativas, propriedades qualitativas. O primeiro tipo diz respeito às propriedades do erro com que vem afectada a aproximação construída enquanto que o segundo tipo diz respeito ao comportamento da aproximação numérica.

A apresentação das classes de métodos a estudar é feita num capítulo introdutório ao curso recorrendo a problemas diferenciais ordinários de condição de fronteira em 2 pontos. Deste modo são introduzidos os métodos bem como uma classe de resultados matriciais que consideramos importantes como ferramenta de análise dos métodos de diferenças finitas. Mais ainda e no que diz respeito aos métodos de elementos finitos, consideramos alguns resultados sobre problemas variacionais abstractos e que foram já objecto de estudo do curso de Equações com Derivadas Parciais.

Nos capítulos seguintes estudamos os métodos de DF e EF quando considerados para problemas diferenciais: estacionários, evolução. Na classe dos problemas estacionários consideramos com grande particularidade as equações elípticas sendo dado grande realce à equação de Poisson. Na classe dos problemas de evolução estudamos fundamentalmente as equações parabólicas.

# Capítulo 2 - Equações Diferenciais Ordinárias: MDF e MEF

## 1 O Método de Diferenças Finitas

### 1.1 Os métodos de diferenças finitas

Nesta breve introdução apresentamos seguidamente o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos quando considerados para determinar uma aproximação da solução de uma equação diferencial ordinária.

Consideremos o problema de condições de fronteira em dois pontos

$$-u''(x) = f(x), x \in (a, b), u(a) = u_a, u(b) = u_b. \quad (1)$$

Seja  $h > 0$  e  $I_h = \{x_i, i = 0, \dots, n\}$  a rede em que  $x_i - x_{i-1} = h, i = 1, \dots, n$ , com  $x_0 = a, x_n = b$ . Sejam  $V_h(I_h)$  e  $V_h(I'_h)$  os espaços das funções de rede definidas em  $I_h$  e  $I'_h = I_h - \{x_i, i = 0, n\}$  respectivamente. Para  $u_h \in V_h$  definimos

$$D_{-x}u_h(x_i) = \frac{u_h(x_i) - u_h(x_{i-1}))}{h}, i = 1, \dots, n,$$

$$D_xu_h(x_i) = \frac{u_h(x_{i+1}) - u_h(x_i)}{h}, i = 0, \dots, n-1,$$

$$D_cu_h(x_i) = \frac{u_h(x_{i+1}) - u_h(x_{i-1}))}{2h}, i = 1, \dots, n-1,$$

$$D_2u_h(x_i) = \frac{u_h(x_{i+1}) - 2u_h(x_i) + u_h(x_{i-1}))}{h^2}, i = 1, \dots, n-1.$$

Observamos que se  $u \in C^2(a, b)$ , então

$$D_{-x}u(x_i) = u'(x_i) - \frac{h}{2}u''(\xi_i), \xi_i \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, \dots, n,$$

$$D_xu(x_i) = u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(\xi_i), \xi_i \in (x_i, x_{i+1}), i = 0, \dots, n-1.$$

Se  $u \in C^3(a, b)$ , então

$$D_cu(x_i) = u'(x_i) + \frac{h^2}{12}(u'''(\xi_i) + u'''(\eta_i)), \xi_i, \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1,$$

$$D_2u(x_i) = u''(x_i) + \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i)), \xi_i, \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Consideremos na equação diferencial de (1),  $x = x_i \in (a, b)$ . Atendendo a (2) obtemos

$$-D_2u(x_i) - \frac{h^3}{24}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i)) = f(x_i), i = 1, \dots, n-1,$$

e deste modo somos conduzidos ao seguinte método numérico

$$-D_2u_h(x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, n-1, u_h(x_0) = u_a, u_h(x_n) = u_b, \quad (3)$$

em que  $u_h(x_i)$  representa uma aproximação para  $u(x_i)$ . O método numérico anterior é um exemplo de um método de diferenças finitas.

Um outro método pode ser estabelecido substituindo no segundo membro  $f(x_i)$  por uma sua aproximação  $f_h(x_i)$

$$-D_2u_h(x_i) = f_h(x_i), i = 1, \dots, n-1, u_h(x_0) = u_a, u_h(x_n) = u_b. \quad (4)$$

A equação (3) (ou (4)) podem ser reescritas na forma reduzida

$$L_h u_h = \tilde{f}_h$$

em que  $L_h u_h$  é uma função de rede definida por

$$L_h u_h(x_i) = \begin{cases} -\frac{u_h(x_2) - 2u_h(x_1)}{h^2}, & , i = 1 \\ -D_2u_h(x_i) & , i = 2, \dots, n-1 \\ -\frac{2u_h(x_{n-1}) + u_h(x_{n-2})}{h^2}, & , i = n-1. \end{cases}$$

e  $\tilde{f}_h = (f_h(x_1) + \frac{u_a}{h^2}, f_h(x_2), \dots, f_h(x_{n-1}) + \frac{u_b}{h^2})$

A equação de diferenças de (4) (ou equivalentemente um sistema linear) permite-nos calcular uma aproximação  $u_h$  definida na rede  $I'_h$ . Esta aproximação está afectada de um erro que nos interessa estimar.

Consideramos seguidamente um problema de condição de fronteira genérico

$$Lu = f \text{ em } (a, b), u(a) = u_a, u(b) = u_b \quad (5)$$

em que  $L$  é um operador diferencial de segunda ordem linear(ou não linear) . Consideremos o seguinte método de diferenças finitas

$$L_h u_h = \tilde{f}_h \quad (6)$$

em que  $u_h \in V_h(I'_h)$  e  $L_h$  é um operador de diferenças. Seja  $u \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$  e  $R_h : C^2(a, b) \cap C[a, b] \rightarrow V_h(I'_h)$  um operador de restrição. Em  $V_h(I'_h)$  consideramos uma norma  $\|\cdot\|_h$ .



**Definição 1.1** A  $e_h = u_h - R_h u$  chamamos erro da aproximação  $u_h$ . A  $T_h = \tilde{R}_h(Lu) - L_h(R_h u)$  chamamos erro de truncatura.

O método de diferenças diz-se consistente se  $\|T_h\|_h \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ . Diz-se convergente se  $\|e_h\|_h \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ , e diz-se de ordem  $p$  se  $\|e_h\|_h = O(h^p)$ .

Um operador de diferenças finitas  $F_h : V_h(I'_h) \rightarrow V_h(I'_h)$  (linear ou não) diz-se estável se  $\|F_h(u_h) - F_h(v_h)\|_h \rightarrow 0$  então  $\|u_h - v_h\|_h \rightarrow 0$ .

Estabelecemos seguidamente uma equação - equação para o erro - que nos permite estimar a partir de  $\|T_h\|_h$  o erro  $\|e_h\|_h$ . Se  $L_h$  é linear, então

$$L_h e_h = L_h u_h - L_h(R_h u) = f_h - L_h(R_h u) = \tilde{R}_h Lu - L_h(R_h u) = T_h,$$

isto é

$$L_h e_h = T_h.$$

A equação anterior tem um papel central no estudo das propriedades de convergência do método de diferenças finitas.

Uma condição suficiente para a estabilidade no caso linear é estabelecida no seguinte resultado.

**Teorema 1.1** Se o operador  $L_h : V_h(I'_h) \rightarrow V_h(I'_h)$  é injectivo e existe uma constante positiva  $C$  independente de  $h$  tal que  $\|L_h^{-1}\|_h \leq C$  para  $h \leq h_0$ , então  $L_h$  é estável. ■

Notamos se  $L_h$  satisfaz as hipóteses do teorema anterior, da equação de erro, vem

$$e_h = L_h^{-1} T_h,$$

e portanto

$$\|e_h\|_h \leq C \|T_h\|_h.$$

Logo se o método de diferenças finitas é consistente concluímos que é convergente e a ordem de convergência é pelo menos igual à ordem do erro de truncatura.

Provámos o seguinte teorema:

**Teorema 1.2** Nas hipóteses do Teorema 1.1, se o método é consistente, então é convergente. ■

No caso mais geral, e pelo menos para o caso linear, vale o teorema de convergência:

**Teorema 1.3** Se o método de diferenças finitas é estável e consistente, então é convergente.

**Demonstração:** Se  $\|T_h\|_h \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ , então  $\|L_h e_h\|_h \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ . Atendendo a que o método é estável vem finalmente  $\|e_h\|_h \rightarrow 0$ . ■

A convergência é estabelecida relativamente a uma norma específica e que é considerada no espaço das funções de rede. As normas mais usuais são a norma  $\|\cdot\|_\infty$  e a norma  $\|\cdot\|_2$  definida por

$$\|u_h\|_2 = \left( \sum_{j=1}^{n-1} h u_h(x_j)^2 \right)^{1/2}, \quad u_h \in V_h(I'_h).$$

Para determinar uma estimativa para o erro, tendo por hipótese a convergência do método, na prática utilizamos como solução analítica uma solução numérica determinada utilizando uma rede espacial com um número elevado de pontos.

Estudar a invertibilidade do operador  $L_h$  é equivalente a estudar a invertibilidade da matriz que lhe está associada. No exemplo considerado, atendendo a que se trata de uma matriz tridiagonal diagonal dominante e estritamente diagonal dominante na primeira e última linha, concluímos que é invertível.

**Exercício 1.1** *Mostre que  $L_h$  definido pelo método de diferenças finitas (3) tem os valores próprios*

$$\lambda_m = \frac{4}{h^2} \text{sen}^2\left(\frac{m\pi h}{2}\right), \quad m = 1, \dots, n-1,$$

*e os vectores próprios correspondentes*

$$\mu_m(x) = \text{sen}(m\pi x), \quad m = 1, \dots, n-1.$$

**Exercício 1.2** *Determine o erro de truncatura do método de diferenças finitas (4) com*

$$\tilde{f}_h(x_i) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

**Exercício 1.3** *Suponha que a solução do problema (1) pertence a  $C^4[a, b]$ . Determine uma estimativa para o erro da solução obtida com o método (3) relativamente à norma  $\|\cdot\|_2$ .*

**Exercício 1.4** *Mostre que  $\|L_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$  e determine uma estimativa para o erro da solução obtida com o método (3) relativamente à norma  $\|\cdot\|_\infty$  supondo que a solução pertence a  $C^4[a, b]$ .*

**Exercício 1.5** *Considere o problema (1) com condições de Neumann para a fronteira. Efectue a discretização das condições anteriores utilizando diferenças finitas forward e backward. Estabeleça o sistema linear que lhe permite calcular uma aproximação utilizando diferenças finitas.*

**Exercício 1.6** *Considere o problema*

$$-u'' + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), x \in (a, b), u(a) = u_a, u(b) = u_b.$$

*Aproxime a segunda e a primeira derivadas utilizando diferenças centradas. Estabeleça uma condição suficiente para que exista uma solução única.*

*Determine o erro de truncatura.*

Vejamos seguidamente com mais algum detalhe o estudo dos método de diferenças finitas no caso não linear. Consideremos o problema diferencial não linear

$$F(u) = f$$

e o método

$$F_h u_h = \tilde{f}_h.$$

Seja

$$T_h = -\tilde{R}_h F(u) + F_h(R_h u)$$

o erro de truncatura, isto é,

$$F_h(R_h u) = \tilde{R}_h F(u) + T_h.$$

Atendendo a que  $\tilde{f}_h = \tilde{R}_h f$ , obtemos

$$F_h(R_h u) - F_h u_h = T_h.$$

Assim, se o método é estável e consistente concluímos que também é convergente e portanto vale o Teorema 1.3. Com o objectivo de estimar  $\|e_h\|_h$  notamos que se tem

$$T_h = F_h(R_h u) - F_h u_h = F'_h(R_h u + \theta e_h)e_h$$

e portanto, se  $F'_h(R_h u + \theta e_h)$  é invertível e tem inversa limitada

$$\|F'_h(R_h u + \theta e_h)^{-1}\|_h \leq C,$$

obtemos

$$\|e_h\|_h \leq C \|T_h\|_h.$$

**Exercício 1.7** *Considere o problema diferencial*

$$-u''(x) + g(u(x)) = f(x), x \in (a, b), u(a) = u_a, u(b) = u_b,$$

*e o método de diferenças*

$$-D_2 u_h(x_i) + g(u_h(x_i)) = f(x_i), i = 1, \dots, n-1, u_0 = u_a, u_n = u_b.$$

*Estude o erro de truncatura do método anterior e estabeleça uma condição suficiente sobre  $g$  que lhe permite concluir que o método é convergente.*

Para equações diferenciais de ordem superior a 2 podem também ser construídos métodos de diferenças finitas que permitem determinar de modo aproximado a solução de tais problemas.

**Exercício 1.8** 1. Mostre que não existem fórmulas de aproximação para a terceira derivada  $u'''(x_i)$  envolvendo os pontos  $x_{i-1}, x_i$  e  $x_{i+1}$  que sejam consistentes.

2. Determine fórmulas de aproximação para  $u'''(x_i)$  em função de  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  e  $x_{i+2}$  que sejam consistentes.

Os métodos de diferenças finitas foram apresentados considerando uma partição uniforme do intervalo da equação diferencial. No entanto podem também ser estabelecidas fórmulas de diferenças tendo por base uma malha não uniforme. De facto, numa rede não uniforme  $x_i, i = 0, \dots, n$ , em que  $x_i - x_{i-1} = h_i$  temos

$$D_{-x}u_h(x_i) = \frac{u_h(x_i) - u_h(x_{i-1})}{h_i}, i = 1, \dots, n,$$

$$D_x u_h(x_i) = \frac{u_h(x_{i+1}) - u_h(x_i)}{h_{i+1}}, i = 0, \dots, n-1,$$

$$D_c u_h(x_i) = \frac{u_h(x_{i+1}) - u_h(x_{i-1})}{h_i + h_{i+1}}, i = 1, \dots, n-1,$$

$$D_2 u_h(x_i) = \frac{h_i u_h(x_{i+1}) - (h_i + h_{i+1})u_h(x_i) + h_{i+1}u_h(x_{i-1})}{h_i h_{i+1} (h_i + h_{i+1})/2}, i = 1, \dots, n-1.$$

**Exercício 1.9** Determine o erro de truncatura para as fórmulas anteriores.

O teorema geral de convergência é válido mas no entanto a demonstração da estabilidade do método de diferenças torna-se mais delicado pois as entradas da matriz do método dependem dos espaçamentos entre os pontos da malha. Observamos que para o método definido pela discretização com diferenças centradas temos ordem de consistência igual a 1 e ordem de convergência igual a 2. Este fenómeno é chamado supraconvergência.

As propriedades dos operadores de diferenças, ou equivalentemente das matrizes que lhe estão associadas, são fundamentais no estudo do erro global. Apresentamos na secção seguinte alguns resultados que têm um papel de relevo no estudo anterior.

## 1.2 Resultados matriciais

**Definição 1.2** Sejam  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  duas matrizes do mesmo tipo. Dizemos que  $A \geq B$  se  $a_{ij} \geq b_{ij}$ .

As desigualdades  $\leq, <$  e  $>$  são definidas de modo análogo.

**Definição 1.3** Uma matriz  $A = [a_{ij}]$  diz-se  $M$  se

$$a_{ii} > 0, \forall i, a_{ij} \leq 0, i \neq j,$$

$A$  não singular e  $A^{-1} \geq 0$ .

Associamos seguidamente a uma matriz  $A = [a_{ij}]$  um grafo. Para o efeito consideremos os índices  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Dizemos que  $i$  está directamente ligado a  $j$  se  $a_{ij} \neq 0$ . Dois índices  $i$  e  $j$  dizem-se ligados se existe uma sequência de índices  $\alpha_0 = i, \alpha_1, \dots, \alpha_k = j$  tais que  $a_{\alpha_{\ell-1}\alpha_\ell} \neq 0$ . O conjunto de índices  $\{1, \dots, n\}$  com os índices com que estão directamente ligados formam um grafo a que chamamos grafo de  $A$ .

**Definição 1.4** Uma matriz  $A$  de ordem  $n$  diz-se irredutível se qualquer  $i \in \{1, \dots, n\}$  está ligado a qualquer  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definição 1.5** A matriz  $A = [a_{ij}]$  diz-se diagonal dominante se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Diz-se irredutivelmente diagonal dominante se é irredutível e vale a desigualdade

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

e em sentido estrito pelo menos para um índice  $i$ .

A não singularidade de uma matriz  $A$  pode ser concluída a partir do enquadramento dos valores próprios de  $A$ .

**Teorema 1.4 [Teorema de Gershgorin]** Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz real de ordem  $n$  e seja  $\lambda$  é valor próprio de  $A$ . Então

$$\lambda \in \cup_{i \in \{1, \dots, n\}} \overline{B}_{r_i}(a_{ii}).$$

Se  $A$  é irredutível, então

$$\lambda \in \cup_{i \in \{1, \dots, n\}} B_{r_i}(a_{ii}) \cup \cap_{i \in \{1, \dots, n\}} S_{r_i}(a_{ii}),$$

onde  $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ .

**Demonstração:** Seja  $x$  o vector próprio associado ao valor próprio  $\lambda$  e  $i$  tal que  $|x_i| = \|x\|_\infty$ . É imediato que

$$Ax = \lambda x \implies |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq r_j.$$

Se  $A$  irredutível e  $\lambda \in \cup_{i \in \{1, \dots, n\}} B_{r_i}(a_{ii})$ , então o resultado está provado. Suponhamos agora que  $\lambda \notin \cup_{i \in \{1, \dots, n\}} B_{r_i}(a_{ii})$ . Provemos que  $\lambda \in \cap_{i \in \{1, \dots, n\}} S_{r_i}(a_{ii})$ .

Suponhamos que  $a_{ij} \neq 0$ , isto é,  $i$  está ligado a  $j$ , e  $|x_i| = 1$ . Admitamos que

$$|\lambda - a_{ii}| = r_i \implies |x_j| = 1, |\lambda - a_{jj}| = r_j. \quad (7)$$

Existe pelo menos um índice  $i$  tal que  $\|x\|_\infty = |x_i| = 1$  e  $|\lambda - a_{ii}| \leq r_i$ . Mas, pela primeira parte do resultado,  $\lambda \in \cup_{i \in \{1, \dots, n\}} S_{r_i}(a_{ii})$  e portanto  $|\lambda - a_{ii}| = r_i$ . Atendendo a que  $A$  é irredutível concluímos que, para qualquer  $j \in \{1, \dots, n\}$ , existe uma sequência de índices  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tais que  $a_{\alpha_{\ell-1}\alpha_\ell} \neq 0$  e

$$|x_{\alpha_\ell}| = 1, |\lambda - a_{\alpha_\ell\alpha_\ell}| = r_{\alpha_\ell}.$$

Em particular  $\lambda \in S_{r_j}(a_{jj})$ . Atendendo à arbitrariedade de  $j$  concluímos que  $\lambda \in \cap_{j \in \{1, \dots, n\}} S_{r_j}(a_{jj})$ .

Provemos (7). Atendendo a que  $|\lambda - a_{ii}| = r_i$  vem

$$\sum_{\ell \neq i} |a_{i\ell}| |x_\ell| = \sum_{\ell \neq i} |a_{i\ell}|,$$

e ainda  $|a_{i\ell}| |x_\ell| = |a_{i\ell}|$  pois  $|x_\ell| \leq \|x\|_\infty$ . Logo  $|x_\ell| = 1$  e  $|\lambda - a_{\ell\ell}| \leq r_\ell$ . Finalmente, atendendo a que  $\lambda \notin \cup_{j \in \{1, \dots, n\}} B_{r_j}(a_{jj})$ , vem  $|\lambda - a_{\ell\ell}| = r_\ell$ . ■

Consideremos a seguinte partição de  $A = [a_{ij}]$  :

$$D = [a_{ii}]; B = D - A, b_{ii} = 0, b_{ij} = -a_{ij}.$$

Seja  $C = D^{-1}B$ . Caracterizamos seguidamente o raio espectral de  $C$ .

**Teorema 1.5** *Se  $A$  é diagonal dominante ou irredutivelmente diagonal dominante, então*

$$\rho(C) < 1 \quad (8)$$

**Demonstração:** Seja  $\lambda$  um valor próprio de  $C$ . Pelo Teorema de Gershgorin  $\lambda \in \cup_{i=1, \dots, n} \overline{B}_{r_i}(0)$ , com  $r_i = \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$ . Logo se  $A$  é diagonal dominante, então  $r_i < 1$ .

Por outro lado, se  $A$  é irredutivelmente diagonal dominante, então  $\lambda \in \cup_{i=1, \dots, n} B_{r_i}(0) \cup \cap_{i=1, \dots, n} S_{r_i}(0)$ . Atendendo a que, para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se tem  $r_i < 1$ , então

$$r_j = r_i, \forall j, \text{ ou } \exists j \in \{1, \dots, n\} : r_j \neq r_i.$$

Consideremos apenas o segundo caso. Temos  $S_{r_i}(0) \cap S_{r_j}(0) = \emptyset$  e portanto  $\lambda \in \cup_{i=1, \dots, n} B_{r_i}(0)$  isto é  $\rho(C) < 1$ . ■

O teorema seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma matriz  $A$  de elementos diagonais positivos e não diagonais não positivos, seja uma matriz  $M$ .

**Teorema 1.6** Uma matriz  $A = [a_{ij}]$  tal que  $a_{ii} > 0, a_{ij} \leq 0$ , é  $M$  se e só se  $\rho(C) < 1$ .

**Demonstração:**

- Se  $\rho(C) < 1$ , então  $\sum_{j=0}^{\infty} C^j$  é uma série de matrizes convergente para  $(I - C)^{-1}$ .

De facto,  $S_m = \sum_j^m C^j$  verifica

$$S_m(I - C) = (I - C)S_m \rightarrow I$$

1

Logo

$$\sum_j C^j = S = (I - C)^{-1}$$

e portanto

$$I = S(I - C) = S(I - D^{-1}B) = SD^{-1}(D - B) = SD^{-1}A.$$

Logo  $A$  é invertível e além disso  $A^{-1} \geq 0$ . De facto,  $S \geq 0$  e  $D^{-1} \geq 0$ .

- Suponhamos que  $A$  é  $M$ . Provemos que  $\rho(C) < 1$ .

Sejam  $\lambda$  valor próprio de  $C$  e  $x$  o vector próprio associado. Seja  $|x|$  o vector cujas componentes são os módulos das componentes de  $x$ . Então

$$|\lambda x| = |\lambda||x| = |D^{-1}Bx| \leq D^{-1}B|x|,$$

e portanto  $|\lambda|D|x| \leq B|x|$ , e ainda  $|\lambda|A^{-1}D|x| \leq A^{-1}B|x|$ . Desta desigualdade vem finalmente

$$-|\lambda|A^{-1}D|x| \geq -A^{-1}B|x|.$$

Mas

$$|x| = A^{-1}A|x| = A^{-1}(D - B)|x| = A^{-1}D|x| - A^{-1}B|x| \leq A^{-1}D(|x| - |\lambda||x|)$$

ou seja

$$|x| \leq A^{-1}D(1 - |\lambda|)|x|.$$

Da desigualdade anterior, se  $|\lambda| \geq 1$  concluímos  $|x| = 0$  o que é absurdo pois  $x$  é vector próprio.

---

<sup>1</sup>Teorema de Schur: Se  $C$  é de ordem  $n$ , então existe uma matriz  $Q$  unitária tal que  $C = Q^T R Q$  em que  $R$  é uma matriz triangular superior com elementos diagonais iguais aos valores próprios de  $C$ .

Se  $\rho(C) < 1$  então  $\|C^m\|_{\infty} \leq k\|R^m\|_{\infty} \leq k\rho(C)^m \rightarrow 0$ .

Se  $C^m \rightarrow 0$ , isto é,  $Q^T R^m Q \rightarrow 0$  e portanto  $\lambda_i^m \rightarrow 0$  e deste modo concluímos  $\rho(C) < 1$ .

Vale o seguinte corolário: ■

**Corolário 1.7** *Seja  $A$  uma matriz de entradas diagonais positivas e não diagonais não positivas. Se  $A$  é diagonal dominante ou irredutivelmente diagonal dominante, então  $A$  é  $M$ .*

No estabelecimento de estimativas para o erro global presente na solução de diferenças finitas, é fundamental o conhecimento de estimativas para a norma da inversa da matriz do método. Vejamos seguidamente no caso das matrizes  $M$  como obter tais estimativas sem calcular a inversa da matriz do método. Por  $\mathbb{1}$  denotamos o vector de componentes iguais à unidade.

Recordamos o conceito de norma matricial subordinada a uma norma vectorial  $\|\cdot\|$ . Por definição

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

A norma matricial  $\|\cdot\|_\infty$  é a norma subordinada à norma vectorial  $\|\cdot\|_\infty$  tendo-se

$$\|A\|_\infty = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Mais ainda, as normas matriciais  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  são subordinadas às normas vectoriais correspondentes.

**Teorema 1.8** *Seja  $A$  uma matriz  $M$  e  $w$  tal que  $Aw \geq \mathbb{1}$ . Então  $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|w\|_\infty$ .*

**Demonstração:** Seja  $x \in \mathbb{R}^n$ . Então

$$|x| \leq \|x\|_\infty \mathbb{1} \leq \|x\|_\infty Aw.$$

Logo

$$A^{-1}|x| \leq \|x\|_\infty w$$

e portanto

$$\|A^{-1}|x|\|_\infty \leq \|x\|_\infty \|w\|_\infty,$$

ou ainda

$$\|A^{-1}x\|_\infty \leq \|x\|_\infty \|w\|_\infty.$$

A desigualdade anterior permite concluir

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \|w\|_\infty. ■$$

No resultado seguinte é caracterizada a norma  $\|\cdot\|_2$  de uma matriz utilizando o raio espectral de uma matriz adequada.



Por definição

$$\|A\|_2 = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{(x^T A^T A x)^{1/2}}{\|x\|_2}.$$

Observamos que se  $A$  é não singular, então  $A^T A$  é uma matriz definida positiva e é simétrica, e portanto os seus valores próprios são positivos.<sup>2</sup>

Mais ainda  $A^T A$  é diagonalizável tendo-se

$$\|Ax\|_2^2 = (Q^T x)^T Q^T A^T A Q (Q^T x) = y^T \text{Diag}[\lambda_i] y.$$

Assim, obtemos ainda

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_i \lambda_i y_i^2 \leq \rho(A^T A) \|x\|_2^2.$$

Logo

$$\|A\|_2 \leq \rho(A^T A)^{1/2}.$$

Por outro lado

$$\|A\|_2^2 = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq \frac{u^T A^T A u}{\|u\|_2^2},$$

em que  $u$  representa um vector próprio de  $A^T A$  arbitrário associado ao valor próprio  $\lambda$ . Logo

$$\|A\|_2 \geq \rho(A^T A)^{1/2}.$$

Provámos o seguinte resultado:

---

2

**Teorema 1.9** *Se  $A$  é real simétrica e definida positiva então os valores próprios de  $A$  são positivos.*

**Demonstração:** Sejam  $\lambda$  um valor próprio e  $x$  o vector próprio associado. Então

$$0 < x^T A x = \lambda x^T x \implies \lambda > 0.$$

**Teorema 1.10** *Se  $A$  é real simétrica e definida positiva, então  $A$  é não singular e  $A^{-1}$  é definida positiva.*

**Demonstração:** Atendendo a que  $A$  é real simétrica e definida positiva então  $A = Q^T \text{Diag}[\lambda_i] Q$  em que  $Q$  é ortogonal. Assim,  $A^{-1} = Q^T \text{Diag}[1/\lambda_i] Q$ .

Se  $\lambda > 0$  é valor próprio de  $A$ , então  $\lambda^{-1}$  é valor próprio de  $A^{-1}$ . Logo os valores próprios de  $A^{-1}$  são positivos. Assim, se  $y \neq 0$ , tem-se

$$y^T A^{-1} y = (Q^T y)^T \text{Diag}[1/\lambda_i] (Q^T y) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} y_i^2 > 0.$$

**Teorema 1.11**

$$\|A\|_2 = \rho(A^T A)^{1/2}.$$

Se  $A$  é simétrica, então

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

■

Como consequência do resultado anterior concluímos que se  $A$  é simétrica e definida positiva, então

$$\|A\|_2 = \lambda_{max}, \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}}.$$

O Teorema de Gershgorin permite caracterizar o raio espectral de uma matriz e deste modo concluir se tal matriz é definida positiva.

**Teorema 1.12** *Seja  $A$  real simétrica de elementos diagonais positivos. Se  $A$  é diagonal dominante ou irredutivelmente diagonal dominante então  $A$  é definida positiva*

**Demonstração:** Se  $A$  é diagonal dominante e  $\lambda$  é valor próprio de  $A$ , então

$$\lambda \in \cup_{i=1, \dots, n} \overline{B}_{r_i}(a_{ii}),$$

e portanto  $\lambda > 0$ .

Se  $A$  é irredutivelmente diagonal dominante, então

$$\lambda \in \cup_{i=1, \dots, n} B_{r_i}(a_{ii}) \cup \cap_{i=1, \dots, n} S_{r_i}(a_{ii}).$$

Para algum  $i$  tem-se  $r_i < a_{ii}$  e portanto

$$0 \notin \cap_{j=1, \dots, n} S_{r_j}(a_{jj}).$$

Logo, também neste case, se tem  $\lambda > 0$ .

## 2 O Método de Elementos Finitos - caso unidimensional

### 2.1 Formulação variacional

Consideremos o problema diferencial de segunda ordem

$$Lu = f \text{ em } (a, b),$$

complementado com condições de Dirichlet homogêneas. Consideremos o problema variacional associado: Determinar  $u \in H_0^1(a, b)$  tal que

$$a(u, v) = f(v), v \in H_0^1(a, b),$$

em que

$$a(u, v) = (Lu, v), f(v) = (v, f).$$

**Exemplo 2.1** Para

$$Lu(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), x \in (a, b), u \in C^2(a, b), p \in C^1(a, b), q \in C(a, b),$$

temos

$$a(u, v) = \int_a^b (pu'v' + quv) dx, u, v \in H_0^1(a, b),$$

e

$$f(v) = \int_a^b fv dx.$$

Notemos que se  $u$  é solução do problema diferencial, então  $u$  é também solução do problema variacional. No entanto a solução do problema variacional só é solução do problema diferencial se satisfizer determinadas condições de regularidade. Assim e relativamente ao exemplo considerado, a solução do problema variacional pertence ao espaço  $H_0^1(a, b)$ . No entanto, para dar sentido ao conceito de solução do problema diferencial,  $u$  deverá ter segunda derivada. Logo a solução do problema variacional nem sempre é solução do problema diferencial.

O recurso ao problema variacional em substituição do problema diferencial permite deste modo obter uma solução que em certas condições é solução do problema diferencial.

O problema variacional anterior é um caso particular do seguinte problema variacional:

Seja  $V$  um espaço de Hilbert e  $a(., .)$  uma forma bilinear definida em  $V$ ,  $f \in V'$  (dual de  $V$ ), determinar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = f(v), v \in V.$$

O problema variacional anterior tem uma solução única quando a forma bilinear  $a(., .)$  satisfaz certas condições:

**Definição 2.1** A forma bilinear  $a(., .)$  definida em  $V$  diz-se

- *simétrica* se

$$a(v, w) = a(w, v), \forall v, w \in V;$$

- *limitada( contínua )* se

$$\exists C_c > 0 : |a(v, w)| \leq C_c \|v\| \|w\|, \forall v, w \in V;$$

- *elíptica* se é limitada e

$$\exists C_e > 0 : a(v, v) \geq C_e \|v\|^2, \forall v \in V;$$

**Teorema 2.1** *Seja  $V$  um espaço de Hilbert. Se  $a(.,.)$  é elíptica em  $V$  e  $f \in V'$ , então existe  $u \in V$ , único, tal que*

$$a(u, v) = f(v), \forall v \in V.$$

A solução  $u$  satisfaz

$$\|u\| \leq \frac{1}{C_e} \|f\|_{-1}$$

em que  $\|\cdot\|_{-1}$  representa a norma em  $V'$ .

**Demonstração:** Seja  $A : V \rightarrow V'$  o operador linear definido por

$$Au(v) = a(u, v), \forall v \in V, \forall u \in V.$$

Atendendo a que  $a(.,.)$  é contínua concluímos que  $A$  é limitado e, por outro lado, atendendo a que a forma bilinear é elíptica vem que  $A$  é injectivo e  $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C_e}$ .

Provemos que  $R(A) = V'$ . Começemos por notar que  $R(A)$  é fechado.<sup>3</sup> Se  $R(A) \neq V'$ , tem-se  $V'$  igual à soma directa de  $R(A)$  com o seu "complemento ortogonal." Seja  $\ell \in V'$  e  $\ell \neq 0$ . Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe  $0 \neq u \in V$  tal que

$$a(v, u) = Av(u) = (Av, \ell) = 0, \forall v \in V.$$

Logo  $a(u, u) = 0$  o que contradiz a elipticidade de  $a(.,.)$ .

Provámos deste modo que  $A$  é bijectivo o que finaliza a demonstração. ■

Suponhamos agora que o problema diferencial é complementado com condições de Dirichlet não homogéneas  $u(a) = u_a, u(b) = u_b$ . Consideremos a título ilustrativo, o Exemplo 2.1. A partir da equação diferencial e efectuando o produto interno, membro a membro, com  $v \in C_0^\infty(a, b)$ , obtemos a mesma equação variacional. No entanto, a solução que se pretende deverá satisfazer as condições de Dirichlet não homogéneas. Consideramos então a solução do problema variacional: determinar  $u \in H^1(a, b)$  :

$$u(a) = u_a, u(b) = u_b, a(u, v) = f(v), \forall v \in H_a^1(a, b).$$

Seja

$$w(x) = \frac{x-a}{b-a} u_b + \frac{x-b}{a-b} u_a, x \in [a, b].$$

Observamos que  $w \in H^1(a, b)$  e  $w$  verifica as condições de fronteira. Por outro lado,  $\hat{u} = u - w \in H_0^1(a, b)$ , e verifica

$$a(\hat{u}, v) = a(u, v) - a(w, v) = f(v) - a(w, v), v \in H_0^1(a, b).$$

---

<sup>3</sup>Seja  $(w_n)$  uma sucessão em  $R(A)$  que converge para  $w \in V'$  e seja  $w_n = Au_n, u_n \in V$ . Então, atendendo a que

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{C_e} \|w_n - w_m\| \rightarrow 0,$$

concluímos que  $(u_n)$  é de Cauchy em  $V$ , e portanto convergente para  $u \in V$ . Finalmente, atendendo à continuidade de  $A$ , obtemos  $Au = w \in R(A)$ .

Seja

$$\hat{f}(v) = f(v) - a(w, v), v \in H_0^1(a, b).$$

Assim, para determinar a solução do problema variacional associado ao problema diferencial com condições de Dirichlet não homogêneas, temos apenas de especificar  $w$  e determinar a solução do problema variacional: determinar  $u \in H_0^1(a, b)$  tal que

$$a(u, v) = \hat{f}(v), \forall v \in H_0^1(a, b).$$

A existência de solução do problema variacional associado ao problema diferencial com condições de Dirichlet não homogêneas é garantida pelo Teorema 2.1 com as convenientes adaptações relativamente à funcional linear.

Notemos que o termo variacional está associado ao cálculo de variações de uma funcional.

**Teorema 2.2** *Seja  $V$  um espaço de Hilbert,  $f \in V'$ ,  $a(.,.)$  uma forma bilinear elíptica e simétrica. Seja  $J(v) = a(v, v) - 2f(v)$ ,  $v \in V$ . Então o problema variacional*

$$\text{Determinar } u \in V : a(u, v) = f(v), v \in V,$$

*tem solução única e*

$$\min_{v \in V} J(v) = J(u).$$

**Demonstração:** Seja  $v \in V$  e  $z = u - v$ . Então  $v = z + u$  e tem-se

$$J(v) = a(u, u) + 2(a(u, z) - f(z)) + a(z, z) - 2f(z).$$

Atendendo a que  $a(.,.)$  é elíptica e  $u$  é solução do problema variacional obtemos

$$J(v) \geq C_e \|u - v\|^2 + J(u),$$

que permite concluir o pretendido. ■

## 2.2 O método de Ritz-Galerkin- o método de elementos finitos

Consideremos um subespaço  $V_h$  de  $V$  com dimensão finita  $N_h$  e o problema variacional definido substituindo  $V$  por  $V_h$ . A solução deste novo problema variacional constitui uma aproximação para a solução do problema variacional inicial sendo  $e_h = u - u_h \in V$  o erro cometido ao tomar esta aproximação em substituição da solução  $u$ .

Obtemos deste modo um processo para a construção de uma aproximação para a solução do problema variacional. Este processo é usualmente chamado método de Ritz-Galerkin. A solução  $u_h \in V_h$  é chamada solução de Ritz-Galerkin.

Vejamos seguidamente como construir a solução de Ritz-Galerkin. Seja  $\{\phi_j, j = 1, \dots, N_h\}$  uma base de  $V_h$ . A aproximação  $u_h \in V_h$  é solução de Ritz-Galerkin do problema variacional

$$\text{Determinar } u \in V : a(u, v) = f(v), \forall v \in V, \tag{9}$$

se

$$a(u_h, v) = f(v_h), \forall v_h \in V_h,$$

se e só se  $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \phi_j$  e

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\phi_j, \phi_i) \alpha_j = f(\phi_i) \quad i = 1, \dots, N_h,$$

se e só se

$$A\alpha = F, \quad A = [a(\phi_j, \phi_i)], \quad \alpha = [\alpha_j], \quad F = [f(\phi_i)]. \quad (10)$$

Notemos que  $A$  é simétrica se e só se  $a(., .)$  é simétrica.

Provamos parte do seguinte resultado:

**Teorema 2.3** *Seja  $\{\phi_j, j = 1, \dots, N_h\}$  uma base de  $V_h$ . Existe e é única a solução de Ritz-Galerkin para (9) se e só se o sistema (10) é possível e determinado.*

*Se  $a(., .)$  é elíptica, então  $[a(\phi_i, \phi_j)]$  é não singular.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $[a(\phi_j, \phi_i)]$  é singular. Então existe um vector  $[\alpha_i]$  não nulo tal que

$$[a(\phi_j, \phi_i)][\alpha_i] = 0$$

e portanto

$$a\left(\sum_j \alpha_j \phi_j, \sum_i \alpha_i \phi_i\right) = 0.$$

Atendendo a que  $a(., .)$  é elíptica concluímos que  $\sum_j \alpha_j \phi_j = 0$  e portanto vem finalmente  $\alpha_j = 0$  para todo  $j$ . ■

**Exemplo 2.2** *Consideremos o problema introduzido no exemplo 2.1. Em  $[a, b]$  consideremos a rede  $\{x_i, i = 0, \dots, n\}$  com  $x_0 = a, x_n = b$  e  $x_i - x_{i-1} = h_i$ . Consideremos o espaço das funções segmentadas lineares  $V_h$  associado à malha definida. O conjunto  $\{\phi_i, i = 1, \dots, n-1\}$  com*

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1}} & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \in [a, x_{i-1}) \cup (x_{i+1}, b] \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1,$$

*é linearmente independente.*

*O espaço gerado pelas funções  $\phi_i, i = 1, \dots, n-1$ , é um subespaço de  $H_0^1(a, b)$ . Determinemos o sistema linear para o cálculo da aproximação de Ritz Galerkin  $u_h$  para*

a solução fraca do problema variacional definido anteriormente. Assim, os coeficientes da aproximação de Ritz-Galerkin

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \phi_i(x), x \in [a, b],$$

satisfazem

$$A[\alpha_i] = \left[ \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx \right],$$

com  $A = [a_{ij}]$  definida por

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( p(x) \frac{1}{h_i^2} + q(x) \frac{(x-x_i)^2}{h_i^2} \right) dx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( p(x) \frac{1}{h_{i+1}^2} + q(x) \frac{(x-x_{i+1})^2}{h_{i+1}^2} \right) dx, \\ a_{i-1i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( p(x) \left( -\frac{1}{h_i^2} \right) - q(x) \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{h_i^2} \right) dx, \\ a_{ii+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( p(x) \left( -\frac{1}{h_{i+1}^2} \right) - q(x) \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{h_{i+1}^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Seja  $[a, b] = [0, 1]$ . Determinemos seguidamente a aproximação de Ritz-Galerkin no espaço dos polinómios de grau menor ou igual a  $n - \mathcal{P}_n$ . As funções  $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ ,  $i =$

$0, \dots, n$ , constituem uma base do espaço  $\mathcal{P}_n$  e portanto, se  $u_h(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j l_j(x)$  temos

$\alpha_0 = 0, \alpha_n = 0$  e portanto os coeficientes são solução do sistema linear cuja matriz de entradas  $a(\ell_j, l_i)$  não apresenta uma estrutura esparsa. Computacionalmente a determinação da aproximação de Ritz-Galerkin é, neste caso, um processo dispendioso.

Observamos que a determinação de uma aproximação de Ritz-Galerkin num espaço em que os elementos da base apresentam o suporte numa parte do domínio e tal que cada elemento tem o seu suporte com intersecção não vazia apenas com um número de elementos da referida base vai induzir um sistema linear cuja matriz tem estrutura esparsa.

A escolha da base do espaço da solução de Ritz-Galerkin tem, como vimos, um papel central na eficiência do processo de construção. Assim, no caso particular em que a base  $\{\phi_i\}$  é construída tendo por base uma partição do domínio em *elementos finitos*  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 0, \dots, n$ , tais que

$$[a, b] = \cup_{i=0}^n [a_i, b_i], (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, i \neq j,$$

e a base é definida de modo a que, para cada  $i$ , o conjunto de índices  $j$  tais que

$$\text{suporte}(\phi_i) \cap \text{suporte}(\phi_j) \neq \emptyset$$

é "pequeno", o método de Ritz-Galerkin toma a designação de método de elementos finitos e a solução de Ritz-Galerkin designa-se solução de elementos finitos.

**Exemplo 2.3** Considere o contexto do exemplo 2.2. Determinemos a solução de elementos finitos no espaço das funções segmentadas quadráticas nulas nas extremidades. Notamos que uma base deste espaço é, para  $n$  par

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})}{(h_{i-1} + h_i)h_i} & x \in [x_{i+2}, x_i] \\ \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(h_{i+1} + h_{i+2})h_{i+1}} & x \in (x_i, x_{i+2}] \\ 0 & x \in [x_0, x_{i-2}] \cup (x_{i+2}, x_n], \end{cases}$$

para  $n$  ímpar

$$\phi_i(x) = \begin{cases} -\frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h_i h_{i+1}} & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & x \in [x_0, x_{i-1}] \cup (x_{i+1}, x_n], \end{cases}$$

e

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(h_1 + h_2)h_1} & x \in (x_0, x_2] \\ 0 & x \in (x_2, x_n] \end{cases}$$

e  $\phi_{n-1}$  é definida de modo análogo. A matriz do sistema para o cálculo da solução de elementos finitos é pentadiagonal tendo-se em cada linha apenas não nulas as componentes  $a_{i-2i}, a_{i-1i}, a_{ii}, a_{ii+1}, a_{ii+2}$ .

## 2.3 Estimativas de Erro

Consideramos agora o estudo do erro  $u - u_h$  em que  $u_h$  é a solução de Ritz-Galerkin determinada a partir de um subespaço  $V_h$  de dimensão finita. Começamos por estimar  $\|u - u_h\|$  em que  $\|\cdot\|$  é a norma induzida pelo produto interno que confere a  $V$  a estrutura de espaço de Hilbert.

**Teorema 2.4 [Teorema de Céa]** Seja  $V$  um espaço de Hilbert,  $f \in V'$  e  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear elíptica em  $V$ . Seja  $u \in V$  a solução do problema variacional  $a(u, v) = f(v), v \in V$ . Seja  $V_h$  um subespaço de  $V$  de dimensão finita. Então existe uma única aproximação de Ritz-Galerkin  $u_h \in V_h$  que satisfaz

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{C_c}{C_e}\right) \text{dist}(u, V_h),$$

em que  $\text{dist}(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$ .



**Demonstração:** Vale a desigualdade

$$\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|w_h - u_h\|, w_h \in V_h. \quad (11)$$

Notamos que

$$a(u, v_h) = f(v_h), v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = f(v_h), v_h \in V,$$

e portanto

$$a(u - u_h, v_h) = 0, v_h \in V_h.$$

Assim

$$a(w_h - u_h, v_h) = a(w_h - u, v_h) + a(u - u_h, v_h) = a(w_h - u, v_h).$$

Consideremos  $v_h = (w_h - u_h)/\|w_h - u_h\|$ . Atendendo a que  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua vem

$$a(w_h - u, v_h) \leq C_c \|w_h - u\|.$$

Por outro lado, atendendo a que  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica,

$$a(w_h - u_h, \frac{w_h - u_h}{\|w_h - u_h\|}) = \frac{1}{\|w_h - u_h\|} a(w_h - u_h, w_h - u_h) \geq C_e \|w_h - u_h\|.$$

Logo

$$\|w_h - u_h\| \leq \frac{C_c}{C_e} \|u - w_h\|. \quad (12)$$

Conjugando (11) e (12) obtemos a desigualdade

$$\|u - u_h\| \leq (1 + \frac{C_c}{C_e}) \|u - w_h\|, w_h \in V_h$$

que permite concluir o pretendido. ■

Concretizemos agora a estimativa obtida no teorema anterior quando consideramos a solução de elementos finitos segmentada linear construída no Exemplo 2.2. Notemos que

$$\text{dist}(u, V_h) \leq \|u - u_I\|_1$$

em que  $u_I$  denota a função interpoladora segmentada linear. Assim, na hipótese de  $u \in C^2(a, b)$  obtemos

$$|u(x) - u_I(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (x - x_i)(x_{i+1} - x) \|u''\|_\infty = \frac{h_{i+1}^2}{8} \|u''\|_\infty, x \in [x_i, x_{i+1}].$$

A desigualdade anterior não permite inferir qual o comportamento de  $\text{dist}(u, V_h)$ .

Estudamos seguidamente  $\|u - u_I\|_1$ . Para tal é suficiente analisar o comportamento de  $\|(u - u_I)'\|_{L^2(a,b)}$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \|(u - u_I)'\|_{L^2(a,b)}^2 &= \int_a^b (u - u_I)'(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (u - u_I)'(x)^2 dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h_{j+1}} \int_0^1 v'(\xi)^2 d\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

em que  $x = x_j + \xi h_{j+1}$ , e  $v(\xi) = (u - u_I)(x_j + \xi h_{j+1})$ .

Provemos que

$$\int_0^1 v'(\xi)^2 d\xi \leq \int_0^1 v''(\xi)^2 d\xi. \quad (14)$$

Comecemos por notar que atendendo a que  $v(x) = u(x) - u_I(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , existe  $\eta \in (a, b)$  tal que  $v'(\eta) = 0$ . Logo

$$v'(y) = \int_{\eta}^y v''(\gamma) d\gamma,$$

ou ainda

$$|v'(y)| \leq |y - \eta|^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 v''(y)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

e portanto concluímos (13).

Conjugando (13) com (14) obtemos

$$\begin{aligned} \|(u - u_I)'\|_{L^2}^2 &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{h_{j+1}} \int_0^1 v''(\xi)^2 d\xi \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} h_{j+1}^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} (u - u_I)''(x)^2 dx \\ &\leq h^2 \|u''\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Céa concluímos: Se a solução do problema variacional  $u$  pertence a  $H^2$  então a solução de elementos finitos segmentada linear construída no Exemplo 2.2 satisfaz

$$\|u - u_h\|_1 \leq h \|u''\|_{L^2}.$$

Consideramos ainda para a solução obtida no Exemplo 2.2 o caso particular  $p = 1$ ,  $q = 0$  e provemos

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2}. \quad (15)$$

Seja  $w$  a solução do seguinte problema auxiliar

$$-w'' = u - u_h \text{ em } (0, 1), \quad w(0) = w(1) = 0$$

Temos

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2}^2 &= (u - u_h, u - u_h) \\ &= (u - u_h, -w'') \\ &= \int_0^1 (u - u_h)' w' dx \\ &= a(u - u_h, w) \\ &= a(u - u_h, w - v) \quad \forall v \in V_h \\ &\leq \|u - u_h\|_1 \|w - v\|_1 \quad \forall v \in V_h. \end{aligned}$$

Logo

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq \|u - u_h\|_1 \frac{\|w - v\|_1}{\|w''\|_{L^2}} \quad \forall v \in V_h.$$

e atendendo a que, para  $v = w_h$  solução de elementos finitos segmentada linear, se tem  $\|w - w_h\|_1 \leq h\|w''\|_{L^2}$ , vem

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq h\|u - u_h\|_1,$$

e finalmente, atendendo a que  $\|u - u_h\|_1 \leq Ch\|u''\|_{L^2}$ ,

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq h^2\|u''\|_{L^2}.$$

# Capítulo 3 - Métodos Numéricos para Equações Elípticas

## 1 Métodos de Diferenças Finitas

### 1.1 Introdução

O Método de Diferenças Finitas - MDF - é, como vimos no caso unidimensional, um método simples, de entendimento fácil e não apresenta um corpo teórico demasiadamente elaborado pelo menos no caso linear. As características anteriores são apresentadas pelo MDF para equações diferenciais - estacionárias ou de evolução - definidos em domínios de  $\mathbb{R}^n$ .

Neste capítulo vamos considerar o estudo do MDF para equações elípticas. Iniciamos este estudo considerando a equação elíptica mais simples - a equação de Poisson definida num rectângulo. Estudamos as propriedades da aproximação numérica obtida pelo método definido pelos operadores de diferenças centradas de segunda ordem em duas vertentes : quantitativas - convergência da solução de diferenças, qualitativas. Consideramos condições de Dirichlet e em seguida condições de Neumann. O estudo de fórmulas de aproximação com ordem mais elevada é também objecto deste capítulo bem como MDF em domínios de fronteira curva. Terminamos esta digressão pelo MDF para equações elípticas considerando equações elípticas com coeficientes variáveis.

### 1.2 A equação de Poisson: o esquema de 5 pontos

Seja  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  e  $\partial\Omega$  a sua fronteira. Consideremos o problema diferencial

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega, u = g \text{ em } \partial\Omega. \quad (1)$$

Em  $\bar{\Omega}$  consideremos a rede

$$\bar{\Omega}_H = \{(x_i, y_j), i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m, x_0 = y_0 = 0, x_n = a, y_m = b\}$$

em que

$$H = (h, k), x_i - x_{i-1} = h, y_j - y_{j-1} = k.$$

Sejam

$$\partial\Omega_H = \bar{\Omega}_H \cap \partial\Omega, \Omega_H = \bar{\Omega}_H \cap \Omega.$$

Consideremos os espaços de funções de rede definidas em  $\bar{\Omega}_H$ ,  $\Omega_H$  e  $\partial\Omega_H$  respectivamente  $W_H(\bar{\Omega}_H)$ ,  $W_H(\Omega_H)$  e  $W_H(\partial\Omega_H)$ . Seja  $u_H \in W_H(\bar{\Omega}_H)$  e  $\Delta_H$  o operador definido por

$$\Delta_H : W_H(\bar{\Omega}_h) \rightarrow W_H(\Omega_H),$$

$$\Delta u_H(x_i, y_j) = D_{2,x}u_H(x_i, y_j) + D_{2,y}u_H(x_i, y_j)$$

em que  $(x_i, y_j) \in \Omega_H$  e  $D_{2,x}, D_{2,y}$  são respectivamente os operadores de diferenças centradas de segunda ordem em relação às variáveis  $x$  e  $y$ . Este operador é designado operador de 5 pontos. Associamos ao operador anterior, no caso particular de  $h = k$ , a seguinte matriz

$$\frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Sejam  $f_H \in W_H(\Omega_H)$  e  $g_H \in W_H(\partial\Omega_H)$  aproximações de  $f$  e  $g$  respectivamente. Consideremos o método de diferenças finitas

$$-\Delta_H u_H = f_H \text{ em } \Omega_H, u_H = g_H \text{ em } \partial\Omega_H. \quad (2)$$

O método de diferenças pode ser reescrito na forma

$$L_h u_H = \tilde{f}_H \text{ em } \Omega_H. \quad (3)$$

Por exemplo, para  $h = k$  e  $a = b$ , e considerando os nodos numerados da esquerda para a direita e de baixo para cima,

$$L_H := \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -I & T & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I & T \end{bmatrix} \quad (4)$$

em que  $I$  denota a matriz identidade de ordem  $n - 1$  e

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_h = \begin{cases} \begin{cases} f_H(x_1, y_1) + \frac{1}{h^2}(g_H(x_1, y_0) + g_H(x_0, y_1)), \\ f_H(x_i, y_1) + \frac{1}{h^2}g_H(x_i, y_0), i = 2, \dots, n-2, \\ f_H(x_{n-1}, y_1) + \frac{1}{h^2}(g_H(x_{n-1}, y_0) + g_H(x_n, y_1)) \end{cases} \\ j = 2, \dots, n-2 \begin{cases} f_H(x_1, y_j) + \frac{1}{h^2}g_H(x_0, y_j) \\ f_H(x_i, y_j), i = 2, \dots, n-2 \\ f_H(x_{n-1}, y_j) + \frac{1}{h^2}g_H(x_n, y_j) \end{cases} \\ \begin{cases} f_H(x_1, y_{n-1}) + \frac{1}{h^2}(g_H(x_1, y_n) + g_H(x_0, y_{n-1})), \\ f_H(x_i, y_{n-1}) + \frac{1}{h^2}g_H(x_i, y_n), i = 2, \dots, n-2, \\ f_H(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{1}{h^2}(g_H(x_{n-1}, y_n) + g_H(x_n, y_{n-1})) \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

A existência e unicidade da solução de (2) é uma consequência das propriedades de  $L_H$ . No resultado seguinte apresentamos algumas propriedades de  $L_H$ .

**Teorema 1.1** *Seja  $L_H$  definida por (4). Então*

1.  $L_H$  é M;
2.  $L_H$  é definida positiva;
3.  $\|L_H\|_\infty \leq \frac{8}{h^2}$ ,  $\|L_H^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$ ,
4.  $\|L_H\|_2 \leq \frac{8}{h^2} \cos^2(\frac{\pi h}{2})$ ,  $\|L_H^{-1}\|_2 \leq \frac{h^2}{8} \operatorname{cosec}^2(\frac{\pi h}{2})$ .

**Demonstração:**

1.  $L_H$  é uma matriz irredutivelmente diagonal dominante e portanto é M;
2. Atendendo a que  $L_H$  é simétrica e irredutivelmente diagonal dominante, os seus valores próprios são positivos e portanto é uma matriz definida positiva;
3.  $\|L_H\|_\infty \leq \frac{8}{h^2}$  é imediata. Atendendo a que  $L_H$  é M e, com  $w_H \in W_H(\Omega_H)$  definida por  $w_H(x, y) = \frac{x}{2}(1-x)$ ,  $(x, y) \in \Omega_H$ , se tem  $L_H w_H(x, y) \geq \mathbb{1}$ , concluímos  $\|L_H^{-1}\|_\infty \leq \|w_H\|_\infty = \frac{1}{8}$ ;
4. Os valores próprios  $\lambda_{ij}$  e os vectores próprios  $\mu_{ij}$  de  $L_H$  são definidos por

$$\lambda_{ij} = \frac{4}{h^2} \left( \operatorname{sen}^2\left(\frac{i\pi h}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi h}{2}\right) \right), \quad \mu_{ij}(x, y) = \operatorname{sen}(i\pi x) \operatorname{sen}(j\pi y), \quad (x, y) \in \Omega_H,$$

para  $i, j = 1, \dots, n-1$ , e portanto de imediato concluímos o pretendido.

### 1.3 Propriedades qualitativas: o teorema da média aritmética, o princípio do máximo

Consideramos seguidamente o estudo de algumas propriedades qualitativas da solução do problema de Poisson discreto (2) considerando  $h = k$  e que são a versão discreta das Propriedades da Média Aritmética, Princípio de Máximo estudadas para as funções harmónicas.

Consideramos  $f = 0$  em  $\Omega$ . Seja  $u_H \in W_H(\bar{\Omega}_H)$  a solução de diferenças finitas definida na secção anterior e que designamos por função harmónica discreta. O resultado seguinte é uma consequência imediata da definição de  $\Delta_H$ . Seja  $P \in \Omega_H$  e

$$\mathcal{V}(P) = \{P \pm he_1, P \pm he_2\}.$$

**Teorema 1.2** *Se  $u_H \in W_H(\bar{\Omega}_H)$  é harmónica discreta e  $P \in \Omega_H$ . Então*

$$u_H(P) = \frac{1}{4} \sum_{Q \in \mathcal{V}(P)} u_H(Q).$$

■

O resultado seguinte é a versão discreta do Princípio do máximo estudado para as funções harmónicas.

**Teorema 1.3** *Se  $u_H \in W_H(\overline{\Omega}_H)$  é harmónica discreta, então*

$$\max_{\overline{\Omega}_H} u_H = \max_{\partial\Omega_H} u_H, \quad \min_{\overline{\Omega}_H} u_H = \min_{\partial\Omega_H} u_H.$$

**Demonstração:** Provemos apenas

$$\max_{\overline{\Omega}_H} u_H = \max_{\partial\Omega_H} u_H.$$

Se  $u_H$  é constante então o resultado é válido. Suponhamos agora que  $u_H$  é harmónica discreta e que tem o seu máximo em  $P \in \Omega_H$ . Atendendo a que

$$u_H(P) = \frac{1}{4} \sum_{Q \in \mathcal{V}_H(P)} u_H(Q)$$

vem que

$$u_H(P) = u_H(Q), \quad Q \in \mathcal{V}_H(P).$$

Repetindo o processo anterior concluímos que  $u_H$  é constante em  $\overline{\Omega}_H$  o que contraria a hipótese inicial. ■

**Corolário 1.4** *Se  $u_H \in W_H(\overline{\Omega}_H)$  é uma função harmónica discreta e  $u_H = g_H$  em  $\partial\Omega_H$ , então*

$$\|u_H\|_\infty \leq \|g_H\|_\infty.$$
■

Sejam  $u_H^{(i)} \in W_H(\overline{\Omega}_H), i = 1, 2$  definidas por

$$\begin{cases} -\Delta_H u_H^{(i)} = f_H & \text{em } \Omega_H \\ u_H^{(i)} = g_H^{(i)} & \text{em } \partial\Omega_H. \end{cases}$$

Então  $u_H^{(1)} - u_H^{(2)}$  é uma função harmónica discreta que verifica

$$\|u_H^{(1)} - u_H^{(2)}\|_\infty \leq \|g_H^{(1)} - g_H^{(2)}\|_\infty.$$

Mais ainda, se

$$g_H^{(1)} \geq g_H^{(2)} \text{ em } \partial\Omega_H,$$

atendendo a que  $L_H^{-1} \geq 0$ , vem ainda

$$u_H^{(1)} - u_H^{(2)} \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}_H.$$

Concluímos deste modo o seguinte corolário:

**Corolário 1.5** *Sejam  $u_H^{(i)} \in W_H(\overline{\Omega}_H)$ ,  $i = 1, 2$ , definidas por*

$$\begin{cases} -\Delta_H u_H^{(i)} = f_H \text{ em } \Omega_H \\ u_H^{(i)} = g_H^{(i)} \text{ em } \partial\Omega_H \end{cases}$$

em que  $g_H^{(1)} \geq g_H^{(2)}$  em  $\partial\Omega$ . Então

$$\|u_H^{(1)} - u_H^{(2)}\|_\infty \leq \|g_H^{(1)} - g_H^{(2)}\|_\infty,$$

e  $u_H^{(1)} \geq u_H^{(2)} \geq 0$  em  $\overline{\Omega}_H$ . ■

Uma estimativa para  $\|u_H\|_\infty$ , em que  $u_H$  é a solução da equação de Poisson discreta com condição de Dirichlet para a fronteira, em função de  $\|f_H\|_\infty$  e  $\|g_H\|_\infty$  é dada no resultado seguinte:

**Teorema 1.6** *Se  $u_H \in W_H(\overline{\Omega}_H)$  é a solução da equação de Poisson discreta (2) então*

$$\|u_H\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f\|_\infty + \|g_H\|_\infty. \quad (6)$$

**Demonstração:** A função de rede  $\tilde{f}_H$ , definida por (2), pode ser reescrita na soma  $\tilde{f}_H = f_H + \tilde{g}_H$  com  $\tilde{g}_h$  conveniente. Sejam  $u_H^{(i)} \in W_H(\overline{\Omega}_H)$ ,  $i = 1, 2$ , as soluções dos problemas:  $u_H^{(1)}$  solução da equação de Poisson discreta com segundo membro igual a  $f_H$  e condição de Dirichlet homogênea para a fronteira,  $u_H^{(2)}$  solução da equação de Laplace com condição de Dirichlet para a fronteira definida por  $g_H$ . Para  $u_H^{(1)}$  tem-se

$$\|u_H^{(1)}\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f_H\|_\infty.$$

Por outro lado, pelo Corolário 1.4, tem-se

$$\|u_H^{(2)}\|_\infty \leq \|g_H\|_\infty.$$

Atendendo a que  $u_H = u_H^{(1)} + u_H^{(2)}$ , das duas últimas desigualdades concluímos (6). ■

## 1.4 Propriedades quantitativas

É nosso objectivo estudar nesta secção o comportamento da aproximação obtida por diferenças finitas quando a sucessão de espaçamentos converge para zero. Os conceitos e resultados envolvidos neste comportamento foram já introduzidos no caso unidimensional. Apresentamos seguidamente os mesmos conceitos para o caso bidimensional embora o formalismo adoptado permita reescrever de modo simples os mesmos conceitos para dimensões superiores.



Seja  $\Lambda$  uma sucessão de uplos positivos  $H = (h, k)$  em que  $h \in \Lambda_1, k \in \Lambda_2$ , e  $\Lambda_i$  converge para zero,  $i = 1, 2$ . A equação de diferenças finitas poderá ser escrita em  $\Omega_H$  ou  $\overline{\Omega}_H$  dependendo do problema e, atendendo a este facto, consideramos esta equação em  $\Omega_H^*$ . A mesma observação vale para a equação de diferenças finitas envolvendo os pontos fronteiros.

Seja  $u_H \in W_H(\overline{\Omega}_H)$  a aproximação de diferenças finitas definida pela discretização

$$\begin{cases} \mathcal{A}_H u_H = f_H \text{ em } \Omega_H^* \\ B_H u_H = g_H \text{ em } \partial\Omega_H^* \end{cases} \quad (7)$$

e que "pretende" aproximar  $u \in \mathcal{W}$ , solução de um problema diferencial linear segunda ordem

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = f \text{ em } \Omega \\ Bu = g \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

em que  $B$  denota o operador de fronteira e  $B_H$  a sua discretização.

Seja  $R_H : \mathcal{U} \rightarrow W_H(\overline{\Omega}_H)$  um operador de restrição. Consideramos em  $W_H(\overline{\Omega}_H)$  a norma  $\|\cdot\|_H$ .

**Definição 1.1** *A discretização (7) diz-se convergente se*

$$\|u_H - R_H u\|_H \rightarrow 0, H \rightarrow 0.$$

Notamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(u_H - R_H u) &= f_H - \mathcal{A}_H(R_H u) \\ &= \tilde{R}_H f - \mathcal{A}_H(R_H u) \\ &= \tilde{R}_H \mathcal{A}u - \mathcal{A}_H(R_H u), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_H(u_H - R_H u) &= g_H - B_H(R_H u) \\ &= R_{H,\partial\Omega} g - B_H(R_H u) \\ &= R_{H,\partial\Omega} B u - B_H(R_H u), \end{aligned}$$

em que  $R_{H,\partial\Omega}$  denota um operador de restrição das funções que definem a condição de fronteira.

**Definição 1.2** *A  $T_H \in W_H(\overline{\Omega}_H)$  definida por*

$$T_H = \tilde{R}_H \mathcal{A}u - \mathcal{A}_H(R_H u) \text{ em } \Omega_H^*$$

e

$$T_H = R_{H,\partial\Omega} B u - B_H(R_H u) \text{ em } \partial\Omega_H$$

chamamos erro de truncatura ou erro local. O método (7) diz-se consistente com o (8) se  $\|T_H\|_H \rightarrow 0$ . Se  $\|T_H\|_H = O(H_{max}^p)$ , então diz-se com ordem de consistência  $p$ .

**Definição 1.3** O método (7) diz-se estável se

$$\|B_H v_h\|_{\partial\Omega_H} \rightarrow 0, \|\mathcal{A}_H v_H\|_H \rightarrow 0$$

então

$$\|v_H\|_H \rightarrow 0.$$

Vale o teorema geral de convergência que é uma consequência imediata dos conceitos de estabilidade e consistência.

**Teorema 1.7** Se o método (7) é estável e consistente então é convergente. ■

Concretizamos seguidamente os conceitos e resultados anteriores ao método de diferenças finitas definido pela fórmula de 5 pontos ((2)). Tomemos  $f_H(P) = f(P)$ ,  $P \in \Omega_H$ , e  $g_H(P) = g(P)$ ,  $P \in \partial\Omega_H$ . Então, e para as definições anteriores, temos

$$-\Delta_H R_H u(P) = -\Delta u(P) - \frac{h^2}{24} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(P_1) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(P_2) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(P_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(P_4) \right)$$

em que  $P_i \in (x_P - h, x_P + h) \times (y_P - h, y_P + h)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Logo, se  $u \in C^4(\bar{\Omega})$ , concluímos

$$\|T_H\|_\infty \leq \frac{h^2}{6} \|u\|_{C^4}.$$

Assim, atendendo ao Teorema 1.1, vem a seguinte estimativa para o erro da aproximação  $u_H$  definida por (2)

$$\|u_H - R_H u\|_\infty \leq \frac{h^2}{48} \|u\|_{C^4}.$$

No estabelecimento da estimativa anterior exigimos que  $u \in C^4(\bar{\Omega})$ . No entanto tal exigência pode ser enfraquecida atendendo a que com  $P = (x_i, y_j)$  se tem

$$\begin{aligned} -D_{2,x}u(P) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) - \frac{1}{6h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(s, y_j)(x_{i+1} - s)^3 ds \\ &\quad - \frac{1}{6h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(s, y_j)(x_{i-1} - s)^3 ds \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{1}{6h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(s, y_j)(x_{i+1} - s)^3 ds &= \frac{1}{2h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s, y_j) \right) (x_{i+1} - s)^2 ds \\ &\leq \frac{h^2}{24} \|u\|_{C^{3,1}(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{6h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(s, y_j)(x_{i-1} - s)^3 ds \leq \frac{h^2}{24} \|u\|_{C^{3,1}(\bar{\Omega})}.$$

Logo

$$\|T_H\|_\infty \leq \frac{h^2}{6} \|u\|_{C^{3,1}(\bar{\Omega})}$$

e portanto o erro da aproximação  $u_H$  definida por (2) satisfaz

$$\|u_H - R_H u\|_\infty \leq \frac{h^2}{48} \|u\|_{C^{3,1}(\bar{\Omega})}.$$

## 1.5 Esquemas de diferenças de ordem elevada

Na secção anterior estudámos um método de diferenças que permite determinar uma aproximação para a solução da equação de Poisson com condição de Dirichlet para a fronteira. Admitimos para o efeito que a solução do problema em estudo é suficientemente regular e provámos que a aproximação tem convergência quadrática. Vejamos seguidamente como determinar um esquema de diferenças com melhores propriedades de convergência.

Para construir um operador que aproxime o operador de Laplace com melhores propriedades de convergência do que o Laplaciano discreto  $\Delta_H$ , determinemos operadores de diferenças finitas que discretizem as derivadas parciais  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  ordem com ordem mais elevada.

Consideremos o caso unidimensional. Seja  $D_h$  definido por

$$D_h u_h(x) = \sum_{j=-k}^k c_j u_h(x + jh).$$

Consideremos agora  $u_h$  substituída por uma função  $u$  suficientemente regular. Utilizando a fórmula de Taylor estabelecemos

$$D_h u(x) = \sum_{m=0}^{2k} a_m h^m u^{(m)}(x) + O(h^{2k+1}), \quad a_m = \frac{1}{m!} \sum_{j=-k}^k c_j j^m.$$

Assim, se pretendermos uma fórmula de aproximação para  $u''(x)$ , determinamos os coeficientes  $c_j$  de modo a serem válidas as seguintes condições

$$a_2 = \frac{1}{h^2}, a_j = 0, j = 0, 1, 3, \dots, 2k.$$

Para  $k = 1$  obtemos o fórmula de aproximação de diferenças centradas de segunda ordem e para  $k = 2$  obtemos o seguinte cociente de diferenças

$$D_h u_h(x) = \frac{-1}{12h^2} (u_h(x - 2h) + u_h(x + 2h)) + \frac{4}{3h^2} (u_h(x - h) + u_h(x + h)) - \frac{5}{2h^2} u_h(x), \quad (9)$$

que tem orde 4. Notemos que sendo  $u_h$  uma função de rede, o cociente anterior só tem significado para pontos da rede tais que  $x - 2h$  e  $x + 2h$  sejam ainda pontos da dita rede.

A adaptação do procedimento anterior ao caso bidimensional permite estabelecer facilmente fórmulas de aproximação para as derivadas parciais. Assim, a título exemplificativo considerando o operador  $D_h$  definido por (9) obtemos o operador que aproxima  $-\Delta$  a que associamos a seguinte matriz

$$\frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & -1 & & \\ 1 & -16 & 60 & -15 & 1 \\ & & -16 & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Tal como no caso unidimensional, a aplicação da fórmula de aproximação associada à matriz anterior na discretização da equação de Laplace num retângulo, requer a utilização de outra(s) fórmula(s) de aproximação em pontos tais que  $(x \pm 2h, y)$  ou  $(x, y \pm 2h)$  não são pontos de  $\bar{\Omega}_H$ . Tais fórmulas envolvem menos pontos e portanto têm ordem mais baixa. Deste modo, obtemos esquemas de aproximação de ordem mais baixa.

A dificuldade anterior não ocorre se considerarmos o esquema associado à matriz

$$\frac{-1}{6h^2} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Este esquema

$$-\tilde{\Delta}_H u_H = f_H \text{ em } \Omega_H,$$

apresenta apenas ordem 3 se admitirmos que a equação de Poisson com condição de Dirichlet para a fronteira tem solução em  $C^8(\bar{\Omega})$ . No entanto se definirmos  $f_H$  de modo conveniente e com  $H = (h, h)$ , obtemos um esquema com ordem 4. Notemos que

$$-\tilde{\Delta}_H u(x, y) = -\Delta u - \frac{h^2}{12} \Delta^2 u - \frac{h^4}{360} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Delta u + O(h^6).$$

Seja

$$\tilde{f}_H(x, y) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} & & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ & & & & \\ & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} f(x, y).$$

Atendendo a que

$$\tilde{f}_H(x, y) = f(x, y) + \frac{h^2}{12} \Delta f(x, y) + O(h^4)$$

concluimos que se  $u$  é solução da equação de Poisson e  $u$  é suficientemente regular, então o erro de truncatura do esquema

$$\tilde{\Delta}_H u_H = \tilde{f}_H \text{ em } \Omega_H$$

tem ordem 4.

## 1.6 Equação de Poisson com condição de Neumann

Seja  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Consideremos a equação de Poisson com condição de Neumann para a fronteira

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g \text{ em } \partial\Omega.$$

É manifesto que a condição anterior não tem significado nos pontos fronteiros

$$V = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

Consideremos, como anteriormente,  $-\Delta$  discretizado utilizando o operador de 5 pontos  $-\Delta_H$ . A derivada relativamente à normal discretizada do modo seguinte

$$B_\eta u_H(P) = \frac{u_H(P) - u_H(P - h\eta)}{h}, \quad P \in \partial\Omega_H - V.$$

Seja então  $u_H \in W_H(\bar{\Omega}_H^*)$  solução de

$$\begin{cases} -\Delta_H u_H = f_H & \text{em } \Omega_H \\ B_\eta u_H = g_H, & \text{em } \partial\Omega_H - V \end{cases} \quad (10)$$

sendo  $\bar{\Omega}_H^* = \bar{\Omega}_H - V$ . Notemos que, tal como anteriormente, podemos reescrever o método de diferenças finitas na forma matricial devendo para o efeito ser considerada uma ordenação dos nodos.

Consideremos os nodos numerados da esquerda para a direita e de baixo para cima. Obtemos deste modo a seguinte igualdade

$$L_H u_H = \tilde{f}_H \text{ em } \Omega_H, \quad (11)$$

em que  $L_H$  pode ser identificado com uma matriz de ordem  $(n-1)^2$  definida por

$$L_H = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T_1 & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -I & T & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I & T_1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

em que

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

e

$$\tilde{f}_h = \begin{cases} \begin{cases} f_H(x_1, y_1) + \frac{1}{h}(g_H(x_1, y_0) + g_H(x_0, y_1)), \\ f_H(x_i, y_1) + \frac{1}{h}g_H(x_i, y_0), i = 2, \dots, n-2, \\ f_H(x_{n-1}, y_1) + \frac{1}{h}(g_H(x_{n-1}, y_0) + g_H(x_n, y_1)) \end{cases} \\ j = 2, \dots, n-2 \begin{cases} f_H(x_1, y_j) + \frac{1}{h}g_H(x_0, y_j) \\ f_H(x_i, y_j), i = 2, \dots, n-2 \\ f_H(x_{n-1}, y_j) + \frac{1}{h}g_H(x_n, y_j) \end{cases} \\ \begin{cases} f_H(x_1, y_{n-1}) + \frac{1}{h}(g_H(x_1, y_n) + g_H(x_0, y_{n-1})), \\ f_H(x_i, y_{n-1}) + \frac{1}{h}g_H(x_i, y_{n-1}), i = 2, \dots, n-2, \\ f_H(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{1}{h}(g_H(x_{n-1}, y_n) + g_H(x_n, y_{n-1})) \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

Observamos que o problema contínuo não tem em geral solução. Para garantir a existência de solução deste problema, os dados  $f$  e  $g$  deverão verificar uma condição de compatibilidade.

Notemos que a matriz  $L_H$  embora irredutível, não é uma matriz irredutivelmente diagonal dominante e  $L_H$  é singular pois que  $L_H \mathbb{1} = 0$ . Por outro lado notamos que retirando uma linha e a coluna correspondente obtemos uma matriz irredutivelmente diagonal dominante. Logo

$$\text{car}(L_H) = (n-1)^2 - 1 \text{ e } \mathcal{N}(L_H) = \mathcal{L}\{\mathbb{1}\}.$$

Assim, existe  $u_H \in W_H(\overline{\Omega}_H^*)$  a verificar (11) se e só se  $\tilde{f}_H \in \mathcal{C}(L_H)$ , se e só se  $\tilde{f}_H$  é ortogonal a  $\mathcal{N}(L_H)$ , isto é

$$0 = \langle \tilde{f}_H, \mathbb{1} \rangle = \sum_{P \in \Omega_H} \tilde{f}_H,$$

ou ainda, atendendo à definição de  $\tilde{f}_H$ ,

$$h^2 \sum_{P \in \Omega_H} f_H(P) = -h \sum_{P \in \partial \Omega_H^*} g_H(P) \quad (14)$$

Mais ainda, se  $u_H, v_H \in W_H(\overline{\Omega}_H^*)$  são duas soluções, então  $u_H - v_H$  pertence ao espaço nulo de  $L_H$  e portanto

$$u_H - v_H = \alpha \mathbb{1}.$$

Provamos o seguinte resultado:

**Teorema 1.8** *O esquema de diferenças finitas (10) tem solução em  $W_H(\overline{\Omega}_H)$  se e só vale a relação de compatibilidade (14). Duas quaisquer soluções de (10) diferem numa constante.* ■

Suponhamos que é válida a condição de compatibilidade (14) e fixemos um ponto arbitrário  $Q$  de  $\Omega_H$ . Então existe uma solução única de (10) tal que  $u_H(Q) = 0$ . Esta solução pode ser determinada eliminando em (11) a linha e a coluna correspondente ao ponto  $Q$ .

Consideremos novamente o sistema (11) e consideremos a sua extensão

$$\bar{L}_H \bar{u}_H = \bar{f}_H \quad (15)$$

em que

$$\bar{L}_H = \begin{bmatrix} L_H & \mathbb{1} \\ \mathbb{1}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_H = \begin{bmatrix} u_H \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_H = \begin{bmatrix} \tilde{f}_H \\ \sigma \end{bmatrix}.$$

Notemos que o sistema (15) é sempre possível e determinado pois que  $[L_H \ \mathbb{1}]$  tem característica  $(n-1)^2$  (as  $(n-1)^2$  linhas são linearmente independentes). Por outro lado, atendendo a que  $(\mathbb{1}^T, 0)$  é linearmente independente com as linhas de  $[L_H \ \mathbb{1}]$ , concluímos que a característica de  $\bar{L}_H$  é  $(n-1)^2 + 1$ .

Se  $\bar{u}_H$  é tal que  $\lambda = 0$ , então vale a condição de compatibilidade (14), e portanto  $u_H$  é a solução de (11) com  $\sigma = \mathbb{1}u_H$ . Contudo, se  $\lambda \neq 0$ , então  $u_H$  é solução de um problema modificado

$$L_H u_H = \tilde{f}_H - \lambda \mathbb{1}.$$

O problema discreto anterior está associado à equação de diferenças

$$-\Delta_H u_H = f_H - \lambda \text{ em } \Omega_H$$

complementada com a condição de fronteira

$$B_\eta u_H = g_H \text{ em } \partial\Omega_H^*.$$

O erro de truncatura verifica

$$-\Delta_H(u_H - R_H u) = \Delta_H R_H u - \tilde{R}_H \Delta u - \lambda = T_H^{(1)} - \lambda,$$

$$B_\eta(R_H u - u_H) = B_\eta R_H u - g_H = B_\eta R_H u - R_{H,\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} = T_H^{(2)},$$

em que

$$\|T_H^{(1)}\|_\infty \leq Ch^2 \|u\|_{C^4(\bar{\Omega})}, \quad \|T_H^{(2)}\|_\infty \leq Ch \|u\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega})}.$$

Notamos que

$$\mathbb{1}\lambda = -L_H u_H + \tilde{f}_H$$

e portanto, atendendo a que  $\langle \mathbb{1}, L_H u_H \rangle = 0$ , vem

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\mathbb{1}^T \tilde{f}_H}{\mathbb{1}^T \mathbb{1}} \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} \left( \sum_{P \in \Omega_H} f_H(P) + \frac{1}{h} \sum_{P \in \partial\Omega_H^*} g_H(P) \right) \\ &= \frac{1}{h^2 (n-1)^2} \left( h^2 \sum_{P \in \Omega_H} f_H(P) + h \sum_{P \in \partial\Omega_H^*} g_H(P) \right). \end{aligned}$$

Temos

$$\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} \int_{y-\frac{h}{2}}^{y+\frac{h}{2}} f \, dy \, dx = h^2 f(x, y) + I_H$$

com

$$|I_H| \leq Ch^3 \|u\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}.$$

Logo

$$\int_{\Omega} f \, dx \, dy = h^2 \sum_{P \in \Omega_H} f(P) + I_{\Omega}$$

com

$$|I_{\Omega}| \leq Ch \|u\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}.$$

De igual modo se prova que

$$\int_{\partial\Omega} g \, ds = h \sum_{P \in \partial\Omega'_H} g(P) + I_{\partial\Omega}$$

com

$$|I_{\partial\Omega}| \leq Ch \|u\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}.$$

Conjugando as estimativas obtidas e supondo que é válida a condição de compatibilidade no caso contínuo  $\int_{\Omega} f \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega} g \, ds = 0$ , concluímos que

$$|\lambda| \leq C \frac{1}{h(n-1)^2} \|u\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})} = Ch \|u\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}.$$

Observamos que

$$\begin{bmatrix} L_H & \mathbb{I} \\ \mathbb{I}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_H - R_H u - \mathbf{d} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_H^{(1)} + \psi(T_H^{(2)}) \\ \mathbb{I}^T(u_H - R_H u) - \mathbf{d}^T \mathbb{I} \end{bmatrix},$$

e portanto, com  $c = \mathbb{I}^T(R_H u - u_H)$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} L_H & \mathbb{I} \\ \mathbb{I}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_H - R_H u - \mathbf{d} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_H^{(1)} + \psi(T_H^{(2)}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, procedendo como no caso da equação de Poisson com condição de Dirichlet não homogénea (admitindo que a solução do problema não homogéneo pode ser decomposta na soma de duas soluções: a primeira do problema não homogéneo com condição de fronteira homogénea e a segunda, solução da equação não homogénea com condição de fronteira homogénea) e supondo que se tem estabilidade do esquema ampliado ( não é objecto de estudo a estabilidade neste caso) vem

$$\|u_H - R_H u - \frac{\mathbb{I}^T(u_H - R_H u)}{\mathbb{I}^T \mathbb{I}}\|_{\infty} \leq C \left( \|T_H^{(1)}\|_{\infty} + \|T_H^{(2)}\|_{\infty} \right)$$



ou ainda

$$\|u_H - R_H u - \frac{\mathbb{1}^T(u_H - R_H u)}{\mathbb{1}^T \mathbb{1}}\|_\infty \leq C \left( h \|u\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega})} + h^2 \|u\|_{C^{3,1}(\bar{\Omega})} \right).$$

Estudamos agora uma outra discretização possível para o problema estudado. Para o efeito definimos os seguintes pontos exteriores a  $\bar{\Omega}_H$  :

$$(x_{-1}, y_j) = (-h, y_j), (x_{n+1}, y_j) = (1 + h, y_j), j = 0, \dots, n,$$

$$(x_i, y_{-1}) = (x_i, -h), (x_i, y_{n+1}) = (x_i, 1 + h), i = 0, \dots, n.$$

Os pontos anteriores permitem considerar a escrita da equação de Poisson discreta em  $\bar{\Omega}_H$ , especialmente nos pontos vizinhos dos pontos de  $\partial\Omega$  surgindo, neste caso, os pontos definidos anteriormente. Tais pontos são eliminados do sistema algébrico final devendo ser considerada para o efeito uma discretização da condição de fronteira cautelosa.

Consideremos

$$\begin{cases} -\Delta_H u_H = f_H \text{ em } \bar{\Omega}_H \\ B_\eta u_H = g_H \text{ em } \partial\Omega_H \end{cases} \quad (16)$$

em que

$$B_\eta u_H(P) = \frac{u_H(P + h\eta) - u_H(P - h\eta)}{2h}, P \in \partial\Omega_H.$$

Notamos que nos pontos  $V$  consideramos "duas normais" exteriores a  $\Omega$ : as normais que são o limite da normais aos lados que têm  $P$  como vértice. Numeremos os pontos como anteriormente. Obtemos

$$L_H u_H = \tilde{f}_H \text{ em } \Omega_H \quad (17)$$

que pode ser identificado com um sistema linear com

$$L_H = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & -2I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -I & T & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2I & T \end{bmatrix}, \quad (18)$$

em que

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{f}_h = \begin{cases} \begin{cases} f_H(x_0, y_0) + \frac{4}{h}g_H(x_0, y_0), \\ f_H(x_i, y_0) + \frac{2}{h}g_H(x_i, y_0), i = 2, \dots, n-1, \\ f_H(x_n, y_0) + \frac{4}{h}g_H(x_n, y_0) \end{cases} \\ j = 1, \dots, n-1 \begin{cases} f_H(x_0, y_j) + \frac{2}{h}g_H(x_0, y_j) \\ f_H(x_i, y_j), i = 1, \dots, n-1 \\ f_H(x_n, y_j) + \frac{2}{h}g_H(x_n, y_j) \end{cases} \\ \begin{cases} f_H(x_0, y_n) + \frac{4}{h}g_H(x_0, y_n), \\ f_H(x_i, y_n) + \frac{2}{h}g_H(x_i, y_n), i = 1, \dots, n-1, \\ f_H(x_n, y_n) + \frac{4}{h}g_H(x_n, y_n) \end{cases} \end{cases} \quad (19)$$

O sistema anterior não apresenta uma estrutura simétrica. A resolução do sistema anterior é computacionalmente mais simples no caso simétrico e portanto é vantajoso definir um sistema equivalente cuja matriz seja simétrica. Seja  $D_H$  uma matriz diagonal por blocos

$$D_H = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

e

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

O problema discreto (17) é equivalente a

$$D_H L_H u_H = D_H \tilde{f}_H$$

em que a matriz do sistema é

$$\tilde{L}_H := D_H L_H = \begin{bmatrix} \hat{T}_1 & \hat{T}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{T}_2 & \hat{T} & \hat{T}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{T}_2 & \hat{T}_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{T}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Notamos que  $\tilde{L}_H$  é uma matriz singular pois  $\tilde{L}_H \mathbb{1} = 0$ . Mais ainda, retirando uma linha e a coluna correspondente à referida matriz obtemos uma matriz irredutivelmente diagonal dominante. Logo  $\text{car}(\tilde{L}_H) = (n+1)^2 - 1$  e  $\mathcal{N}(\tilde{L}_H) = \mathcal{L}(\mathbb{1})$ . Concluimos deste modo que existe solução (16) se e só se

$$\mathbb{1}^T D_H \tilde{f}_H = 0$$

e duas quaisquer soluções de (16) diferem numa constante.

## 1.7 Convergência relativamente a normas de Sobolev discretas

Vamos estabelecer nesta secção uma estimativa para a solução de (2) considerando uma norma que podemos interpretar como a discretização da norma usual de  $H^1(\Omega)$ .

Consideremos a equação do erro  $e_H = R_H u - u_H$  associada ao método (2) com  $f_H(P) = f(P), P \in \Omega$ , e  $g_H(P) = g(P), P \in \partial\Omega$ ,

$$-\Delta_H e_H = T_H \text{ em } \Omega_H, e_H = 0 \text{ em } \partial\Omega_H. \quad (20)$$

A função de rede  $e_H$  está definida em  $\bar{\Omega}_H$  mas é nula em  $\partial\Omega$ . Consideremos o espaço de funções de rede deste tipo  $W_0(\bar{\Omega}_H)$ . Neste espaço consideramos

$$(u_H, v_H) = h^2 \sum_{\Omega_H} u_H(P) v_H(P), u_H, v_H \in W_0(\bar{\Omega}_H),$$

$$\|u_H\|_1^2 = \|u_H\|^2 + \sum_{\Omega_{H,l}} h(D_{-x} u_H(P))^2 + \sum_{\Omega_{H,t}} h(D_{-y} u_H(P))^2, u_H \in W_0(\bar{\Omega}_H),$$

em que  $\Omega_{H,l}$  e  $\Omega_{H,t}$  denotam a união de  $\Omega_H$  com os pontos de  $\partial\Omega_H$  colocados na fronteira esquerda e fronteira superior respectivamente.

Notemos que

$$u_H(x_i, y_j) = \sum_{\ell=0}^i h D_{-x} u_H(x_\ell, y_j)$$

e portanto

$$\sum_{\Omega_H} h^2 u_H(P)^2 \leq c \sum_{\Omega_{H,l}} h^2 (D_{-x} u_H(P))^2.$$

Logo vale a desigualdade

$$\|u_H\|^2 \leq c \left( \sum_{\Omega_{H,l}} h^2 (D_{-x} u_H(P))^2 + \sum_{\Omega_{H,t}} h^2 (D_{-y} u_H(P))^2 \right), \forall u_H \in W_0(\bar{\Omega}_H). \quad (21)$$

O operador  $-\Delta_H$  pode ser encarado como um operador de  $W_0(\bar{\Omega}_H)$  no seu dual e que a uma função de rede  $u_H$  associa a funcional linear

$$-\Delta_H u_H(v_H) = (-\Delta_H u_H, v_H), v_H \in W_0(\bar{\Omega}_H).$$

Provemos o seguinte resultado:

**Teorema 1.9** *Existe uma constante positiva independente de  $H$  tal que*

$$\|-\Delta_H u_H\|_{-1} \geq C \|u_H\|_1, \forall u_H \in W_0(\bar{\Omega}_H). \quad (22)$$

**Demonstraçãõ:** Atendendo a que se tem sucessivamente

$$\begin{aligned}
\| -\Delta u_H \|_{-1} &= \sup_{0 \neq v_H \in W_0(\bar{\Omega})} \frac{|-\Delta u_H(v_H)|}{\|v_H\|_1} \\
&= \sup_{0 \neq v_H \in W_0(\bar{\Omega})} \frac{|\sum_{\Omega_{H,l}} h^2 D_{-x} u_H(P) D_{-x} v_H(P) + \sum_{\Omega_{H,t}} h^2 D_{-y} u_H(P) D_{-y} v_H(P)|}{\|v_H\|_1} \\
&\geq \frac{|\sum_{\Omega_{H,l}} h^2 (D_{-x} u_H(P))^2 + \sum_{\Omega_{H,t}} h^2 (D_{-y} u_H(P))^2|}{\|u_H\|_1} \\
&\geq C \|u_H\|_1,
\end{aligned}$$

concluimos o pretendido. ■

Atendendo ao resultado anterior concluimos que o operador  $-\Delta_H$  é injetivo. Mais ainda, substituindo na desigualdade (22),  $u_H$  por  $e_H$ , obtemos

$$\|T_H\|_{-1} \geq C \|e_H\|_1.$$

Uma vez que

$$\|T_H\|_{-1} = \sup_{0 \neq v_H \in W_0(\bar{\Omega})} \frac{|T_H(v_H)|}{\|v_H\|_1} = \sup_{0 \neq v_H \in W_0(\bar{\Omega})} \frac{|(T_H, v_H)|}{\|v_H\|_1} \leq Ch^2 \|u\|_{C^4(\bar{\Omega})}$$

concluimos que

$$\|e_H\|_1 \leq Ch^2 \|u\|_{C^4(\bar{\Omega})},$$

ou ainda, assumindo menos regularidade,

$$\|e_H\|_1 \leq Ch^2 \|u\|_{C^{3,1}(\bar{\Omega})}.$$

## 1.8 Outras equações elípticas

1. Equações elípticas mais gerais: Consideremos a equaçãõ diferencial envolvendo derivadas mistas  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  calculada em  $(x_i, y_j)$ . A fórmula de aproximaçãõ

$$D_{c,x} D_{c,y} u(x_i, y_j) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} u(x_i, y_j)$$

é consistente com  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  e a ordem de consistência é 2. Deste modo podemos construir esquemas de diferenças finitas com ordem de consistência 2. Assim, por exemplo, o esquema de diferenças finitas

$$-\Delta_H u_H + D_{c,x} u_H + D_{c,x} D_{c,y} u_H + u_H = f_H \text{ em } \Omega_H$$

com  $f_H(P) = f(P)$ ,  $P \in \Omega_H$ ,  $H = (h, k)$ , é consistente com

$$\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = f \text{ em } \Omega.$$

2. As equações diferenciais com coeficientes variáveis têm um tratamento análogo ao das equações com coeficientes constantes. Estude a consistência da discretização

$$\frac{a(x_{i+1/2}, y_j) D_{-x} u_H(x_{i+1}, y_j) - a(x_{i+1/2}, y_j) D_{-x} u_H(x_i, y_j)}{h} = f(x_i, y_j)$$

com

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f.$$

3. O estudo das propriedades quantitativas das aproximações obtidas utilizando métodos de diferenças finitas definidos em redes não uniformes é mais envolvente do que o correspondente estudo quando considerámos redes não uniformes. A análise da estabilidade tem dificuldades acrescidas pois a matriz que permite calcular a aproximação de diferenças finitas depende dos espaçamentos entre os pontos. Assim, por exemplo, numa malha não uniforme  $\Omega_H$ ,  $h = (h, k)$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots)$ ,  $k = (k_1, k_2, \dots)$ , o operador de Laplace discreto é definido por

$$\begin{aligned} \Delta_H u_H(x_i, y_j) &= \frac{h_i u_H(x_{i+1}, y_j) - (h_i + h_{i+1}) u_H(x_i, y_j) + h_{i+1} u_H(x_{i-1}, y_j)}{h_i h_{i+1} (h_i + h_{i+1}) / 2} \\ &+ \frac{k_j u_H(x_i, y_{j+1}) - (k_j + k_{j+1}) u_H(x_i, y_j) + k_{j+1} u_H(x_i, y_{j-1})}{k_j k_{j+1} (k_j + k_{j+1}) / 2}. \end{aligned}$$

A utilização de malhas não uniformes implica, em geral, a diminuição da ordem de consistência. No entanto, tal diminuição pode não implicar uma diminuição da ordem de convergência.

4. Um procedimento usualmente seguido para construir a aproximação de diferenças finitas para a solução de problemas diferenciais definidos em domínios de fronteira curva é considerar um problema modificado definido sobre o "maior" domínio poligonal que se inscreve no referido domínio. Deste modo, as dificuldades que surgem atendendo à configuração da fronteira são eliminadas. No entanto, uma alternativa consiste em definir uma malha rectangular em  $\mathbb{R}^2$  que induz a rede  $\Omega_H$  em  $\Omega$  e de  $\partial\Omega \cup \mathbb{R}^2$  obtemos os pontos  $\partial\Omega_H$ . Tal procedimento implica necessariamente a utilização de esquemas de diferenças finitas definidos com malhas não uniformes pelo menos nos pontos de  $\Omega_H$  que têm pontos vizinhos em  $\partial\Omega_H$ .
5. O estudo apresentado pode ser facilmente generalizado para domínios de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ .

## 2 Método de Elementos Finitos

### 2.1 Introdução

O método de elementos finitos foi introduzido anteriormente no contexto dos problemas diferenciais ordinários com condições nas extremidades do domínio. Tal como no caso anterior, no contexto das equações elípticas, o MEF é uma particularização do método de Ritz-Galerkin em que o espaço de dimensão finita usado na construção da solução de Ritz-Galerkin tem a particularidade de induzir uma matriz de rigidez - matriz do sistema da determinação dos coeficientes da solução de Ritz-Galerkin - altamente esparsa. Para o efeito as funções de base são construídas de modo a terem por suporte a união de um número reduzido de elementos finitos.

No método de Ritz-Galerkin para equações elípticas, o problema com condições de fronteira é substituído por um problema variacional definido num contexto funcional adequado. Atendendo a este facto, começamos por estudar na Secção 2, a formulação variacional de alguns problemas elípticos de segunda ordem com diferentes tipos de condições de fronteira. Daremos realce particular à questão da existência e unicidade de solução fraca do problema construído.

Na Secção 3 apresentamos os espaços de elementos finitos quando o domínio é poligonal plano. O estudo do erro é feito na Secção 4.

### 2.2 Formulação variacional

O método de elementos finitos introduzido na caso unidimensional no primeiro capítulo é facilmente estendido ao caso multidimensional. Este método, particularização do método de Ritz-Galerkin, tem por base a formulação do problema diferencial. Nesta secção vamos considerar a formulação variacional de alguns problemas elípticos começando por considerar a equação de Poisson com condição de Dirichlet homogénea e em seguida problemas elípticos mais gerais no que diz respeito às equações diferenciais. Consideramos ainda problemas elípticos com condições de Dirichlet não homogéneas e, a finalizar, a formulação variacional do problema com condição de Neumann.

#### 1. Equação de Poisson com condição de Dirichlet homogénea

Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos o problema diferencial

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (23)$$

Seja  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Da equação diferencial, por integração por partes, obtemos

$$(\nabla u, \nabla \phi)_0 = (f, \phi)_0,$$

em que  $(., .)$  denota o produto usual em  $L^2(\Omega)$ . Atendendo a que  $H_0^1(\Omega)$  pode ser encarado como o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  relativamente à norma  $\|.\|_1$  e atendendo a que

pretendemos um problema variacional definido num espaço de Hilbert, podemos associar a (23) o seguinte problema: determinar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = f(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (24)$$

em que  $f(v) = (f, v)$ ,  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Na hipótese de  $f \in L^2(\Omega)$  tem-se  $f \in H_0^1(\Omega)'$ . Notamos que  $a(., .)$  é uma forma bilinear elíptica em  $H_0^1(\Omega)$  e portanto vale o seguinte resultado:

**Teorema 2.1** *Se  $f \in L^2(\Omega)$ , então o problema variacional (24) tem uma solução única em  $H_0^1(\Omega)$ .*

Recordamos que se a solução fraca  $u \in H_0^1(\Omega)$  é suficientemente regular então  $u$  é solução de (23) no entanto a equação diferencial vale como igualdade em  $L^2(\Omega)$ . Esta igualdade tem significado pontualmente apenas no caso de  $f$  ser contínua. Por outro lado é manifesto, atendendo ao modo como foi estabelecido o problema variacional, que a solução forte é também solução fraca.

2. Equação diferencial de segunda ordem com coeficientes variáveis Consideramos agora o problema diferencial

$$\begin{cases} Lu(x) := - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)) + a_0(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (25)$$

A equação diferencial

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)) + a_0(x)u(x) = f(x) \quad (26)$$

foi definida como sendo elíptica se os valores próprios de  $[a_{ij}]$  têm todos o mesmo sinal. Admitamos, sem perda de generalidade, que tais valores próprios são positivos. Então existe uma função positiva  $c$  tal que

$$\xi^T [a_{ij}(x)] \xi \geq c(x) \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (27)$$

Por outro lado, se existe uma função  $c$  a verificar a desigualdade anterior, então os valores próprios de  $[a_{ij}]$  são positivos e portanto, a equação diferencial é elíptica. Dizemos que (26) é uniformemente elíptica em  $\Omega$  se existe  $c$  positiva que verifica (27) e além disso

$$\inf_{\Omega} c \geq \alpha_0 > 0.$$

Retomemos o problema diferencial (25) em que a equação diferencial é uniformemente elíptica em  $\Omega$ . Considerando  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Da equação diferencial obtemos

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i})_0 + (a_0 u, \phi)_0 = (f, \phi)_0, \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e, deste modo, deduzimos o seguinte problema variacional: determinar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = f(v), v \in H_0^1(\Omega), \quad (28)$$

em que

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_0 + (a_0 u, v)_0, f(v) = (f, v)_0, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Observamos que se  $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ , então  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear limitada em  $H_0^1(\Omega)$ . Mais ainda, se a equação diferencial é uniformemente elíptica obtemos

$$a(u, u) \geq \alpha_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} a_0 u^2 dx, u \in H_0^1(\Omega).$$

Logo

- (a) se  $\Omega$  limitado e  $a_0 = 0$ , então  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica;
- (b) se  $\Omega$  ilimitado e  $a_0 \geq \gamma_0 > 0$ , então  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica.

Atendendo ao exposto, vale o seguinte resultado:

**Teorema 2.2** *Se  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\Omega$  ilimitado e  $a_0 \geq \gamma_0 > 0$  ou  $\Omega$  limitado, então o problema variacional (28) tem solução única em  $H_0^1(\Omega)$  e verifica*

$$\|u\|_1 \leq \frac{1}{C_e} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

3. Equações diferenciais com condições de Dirichlet não homogéneas: Consideremos o problema diferencial (25) mas com a condição de fronteira homogénea substituída por

$$u = g \text{ em } \partial\Omega. \quad (29)$$

Da equação diferencial  $Lu = f$  e com  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , procedendo como anteriormente, obtemos a equação variacional do problema variacional (28). Somos, deste modo, conduzidos ao seguinte problema variacional:

$$\text{Determinar } u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = g, a(u, v) = f(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (30)$$

É fácil mostrar, que se  $u \in H^1(\Omega)$  é solução do problema variacional anterior, então  $u$  é solução do problema diferencial (valendo esta equação como identidade em  $L^2(\Omega)$ ).

Vejamos seguidamente como construir a solução de (30). Suponhamos que  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  e que existe  $u_0 \in H^1(\Omega)$  tal que  $u_0|_{\partial\Omega} = g$ . Seja  $w = u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Construída a função  $w$ , obtemos  $u$  atendendo a que  $u = w + u_0$ .

Apresentamos seguidamente algumas definições e resultados gerais. Consideremos um domínio de  $\mathbb{R}^n$ . Por  $H^s(\Omega)$  para  $s \in \mathbb{N}$ , denotamos o espaço das funções de  $L^2(\Omega)$



com derivadas fracas de ordem menor ou igual a  $s$  em  $L^2(\Omega)$ . Este espaço é de Hilbert relativamente ao produto interno

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v), \quad u, v \in H^s(\Omega),$$

em que, para  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  e

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Por  $\|\cdot\|_s$  denotamos a norma induzida pelo produto interno anterior.

Seja  $s \in \mathbb{R}^+$ . Então  $s = m + \lambda$  em que  $m \in \mathbb{N}_0$  e  $\lambda \in (0, 1)$ . Por  $H^s(\Omega)$  denotamos o espaço das funções  $u$  de  $L^2(\Omega)$  que têm derivadas fracas de ordem inferior ou igual a  $m$  neste espaço e tais que  $\|u\|_s < +\infty$ , em que a norma anterior é induzida pelo produto interno

$$(u, v)_s = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) + \int_{\Omega \times \Omega} \frac{(D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y))(D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y))}{|x - y|^{n+2\lambda}} dx dy.$$

Com o objectivo de definir o espaço  $H^s(\partial\Omega)$  consideramos seguidamente alguns resultados que caracterizam os domínios em função da sua fronteira.

**Lema 2.3** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado  $C^t$  ( $C^{k,1}$ ). Então existe um número natural  $N$  e abertos limitados  $U_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , aplicações  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que*

- (a)  $\bar{\Omega} \subset \cup_{i=0}^N U_i$ ,  $U_0 \subset \subset \Omega$
- (b)  $\partial\Omega_i := U_i \cap \partial\Omega$ ,  $\partial\Omega = \cup_{i=1}^N \partial\Omega_i$
- (c)  $g_i : \partial\Omega_i \rightarrow g_i(\partial\Omega_i) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  é bijectiva
- (d)  $g_i \circ g_j^{-1} \in C^t(\overline{g_j(\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j)})$  ( $g_i \circ g_j^{-1} \in C^{k,1}(\overline{g_j(\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j)})$ )

Nos abertos  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , estão definidas aplicações  $\phi_{U_i}$  tais que

- (a)  $\phi_{U_i} \in C^t(\overline{U_i})$  ( $C^{k,1}(\overline{U_i})$ ),  $\phi_{U_i}^{-1} \in C^t(\overline{B_1(0)})$  ( $C^{k,1}(\overline{B_1(0)})$ )
- (b)  $\phi_{U_i}(\partial\Omega_i) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$
- (c)  $\phi_{U_i}(U_i \cap \Omega) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$
- (d)  $\phi_{U_i}(U_i \cap (\mathbb{R}^n - \Omega)) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n < 0\}$

■

**Lema 2.4 (Partição da unidade)** *Sejam  $U_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  como no lema anterior. Então existem funções  $\sigma_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , tais que  $\text{suporte}(\sigma_i) \subset U_i$  e*

$$\sum_{j=0}^N \sigma_j(x)^2 = 1 \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}.$$

■

**Definição 2.1** Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $C^t$  ( $C^{k,1}$ ),  $m \leq t \in \mathbb{N}$  ( $m \leq k + 1$ ) ou  $m < t \notin \mathbb{N}$ ,  $t > 1$ . O espaço  $H^m(\partial\Omega)$  é o espaço das funções  $u$  definidas em  $\partial\Omega$  tais que  $(\sigma_i u)og_i^{-1} \in H_0^m(\mathbb{R}^{n-1})$ .

O espaço  $H^m(\partial\Omega)$  é um espaço de Hilbert relativamente ao produto interno

$$(u, v)_m = \sum_{i=1}^N ((\sigma_i u)og_i^{-1}, (\sigma_i v)og_i^{-1})_{H^m(\mathbb{R}^{n-1})}$$

No resultado seguinte caracterizamos o traço quando o domínio  $\Omega$  tem fronteira suficientemente regular.

**Teorema 2.5** Seja  $\Omega \in C^t$  com  $1/2 < s \leq t \in \mathbb{N}$  ou  $1/2 < s < t$  ( $\Omega \in C^{k,1}$ ,  $1/2 < s = k + 1$ ). Então

- (a) a restrição  $\gamma u$  de  $u \in H^s(\Omega)$  pertence a  $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$
- (b) para cada  $w \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  existe uma extensão  $Ex(w) \in H^s(\Omega)$  tal que  $\|Ex(w)\|_s \leq \|w\|_{s-\frac{1}{2}}$ .

■

**Definição 2.2** Por  $H_0^m(\Omega)$  denotamos o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  relativamente à norma  $\|\cdot\|_m$ .

Como referimos anteriormente, se  $\Omega \in C^{0,1}$ , então  $H_0^1(\Omega)$  é o conjunto das funções de  $H^1(\Omega)$  cuja restrição  $\partial\Omega$  é nula. Tal caracterização pode ser considerada para  $m > 1$  do modo seguinte:

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) : D^\alpha u = 0 \text{ em } \partial\Omega, |\alpha| \leq m - 1\}.$$

Seja  $w = u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Esta função verifica

$$a(w, v) = f(v) - a(u_0, v), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Seja  $F(v) = f(v) - a(u_0, v)$ ,  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Notemos que

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C_c \|u_0\|_1 \|v\|_1 \leq C \|v\|_1, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

e portanto  $F \in H_0^1(\Omega)'$ .

A existência de solução do problema variacional não homogéneo passa, deste modo, pela existência de  $u_0$  em  $H^1(\Omega)$  tal que o seu traço coincide com  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  - que existe desde que  $\Omega$  tenha fronteira regular - e pela existência de solução do problema variacional

$$\text{Determinar } w \in H_0^1(\Omega) : a(w, v) = F(v), \quad v \in H_0^1(\Omega). \quad (31)$$

As condições que garantem a existência de solução do problema variacional anterior estão especificadas no Teorema 2.2.

4. Equação de Poisson com condição de Neumann: Consideremos o problema diferencial

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0 u = f \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g \text{ em } \Omega \end{cases} \quad (32)$$

Atendendo a que  $C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$  é denso em  $H^1(\Omega)$ , considerando  $\phi \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ , da equação diferencial obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx \, dy + \int_{\Omega} a_0 u \phi \, dx \, dy = \int_{\Omega} f \phi \, dx \, dy + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi \, ds.$$

Sejam

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy + \int_{\Omega} a_0 u v \, dx \, dy, \quad u, v \in H^1(\Omega), \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v \, dx \, dy + \int_{\partial \Omega} g v \, ds, \quad v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Somos conduzidos, deste modo, ao seguinte problema variacional:

$$\text{Determinar } u \in H^1(\Omega) : a(u, v) = F(v), \quad v \in H^1(\Omega). \quad (33)$$

Observamos que se  $u$  é solução do problema diferencial, então é imediato que  $u$  é solução do problema variacional anterior. Reciprocamente, seja  $u$  solução do problema variacional (33). Então tem-se

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

ou seja,

$$(-\Delta u + a_0 u - f, v) = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

e portanto vale a equação diferencial de (32) como identidade em  $L^2(\Omega)$ . Atendendo à igualdade anterior, vem ainda

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - g, v\right)_{L^2(\partial \Omega)} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Notemos que atendendo à arbitrariedade de  $v$  em  $H^1(\Omega)$ , concluímos que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - g, v\right)_{L^2(\partial \Omega)} = 0, \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega),$$

e portanto a condição de fronteira tem também significado em  $L^2(\partial \Omega)$ .

Notemos que se  $a_0$  é positiva e inferiormente e superiormente limitada, então  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica. Mais ainda

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\partial \Omega)} \|v\|_{\partial \Omega} \leq (\|f\|_{L^2} + C \|g\|_{L^2(\partial \Omega)}) \|v\|_1, \quad v \in H^1(\Omega),$$

e portanto  $F \in H^1(\Omega)'$ .

**Teorema 2.6** *Se  $a_0$  é positiva, superiormente e inferiormente limitada por  $\epsilon > 0$  em  $\Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial \Omega)$ , então o problema variacional (33) tem solução única em  $H^1(\Omega)$  e*

$$\|u\|_1 \leq \|f\|_{L^2} + C \|g\|_{L^2(\partial \Omega)}.$$

## 2.3 Construção dos espaços de elementos finitos

Na secção anterior o problema diferencial foi substituído por um problema dito variacional num contexto funcional adequado. O método de Ritz - Galerkin, anteriormente apresentado, permite determinar uma aproximação para a solução do problema variacional substituindo o espaço de Hilbert  $V$  - onde está definido o problema variacional - por um subespaço de dimensão finita  $V_h$ . A aproximação de elementos finitos é obtida considerando no método de Ritz-Galerkin a base do espaço de dimensão finita de modo a que cada elemento desta base tenha suporte num número "reduzido" de elementos da partição do domínio.

O espaço de Hilbert que considerámos foi  $V = H_0^1(\Omega)$  ou  $V = H^1(\Omega)$ .

Consideremos um domínio poligonal  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Construámos, seguidamente, as bases a partir de partições do domínio em subdomínios abertos  $\Omega_i$  - elementos finitos - tais que

$$P_1 - \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j$$

$$P_2 - \cup_i \bar{\Omega}_i = \bar{\Omega}$$

$$P_3 - \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j \text{ é vazio, um lado comum aos dois elementos ou um vértice.}$$

A partir da partição em elementos finitos definamos bases  $\{\phi_i\}$  tal que  $\text{int}(\text{suporte}(\phi_i)) \cap \text{int}(\text{suporte}(\phi_j))$  seja não vazio para um número reduzido de índices  $i, j$ .

### 1. Elementos Lineares para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Consideremos a partição  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  em triângulos  $T_1, \dots, T_t$ . A partição  $\mathcal{T}_h$  diz-se admissível se os triângulos  $T_i$  satisfazem as condições  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . Os vértices dos triângulos são chamados nodos da triangulação  $\mathcal{T}_h$ . Os nodos dividem-se em dois grupos: os nodos interiores e os nodos fronteiros. Por  $N_h$  denotamos o número de nodos interiores. Seja  $V_h$  o espaço

$$V_h := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h = 0 \text{ em } \partial\Omega, \\ v_h(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y, (x, y) \in T, T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Notamos que se  $v_h \in V_h$  então  $v_h$  em  $T \in \mathcal{T}_h$  é determinado univocamente pelo seu valor nos vértices do triângulo. Mais ainda  $v_h$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ , as derivadas parciais de primeira ordem são constantes em cada triângulo e apresentam, eventualmente, saltos ao longo dos lados dos triângulos. Logo  $V_h \subset H_0^1$ .

Sejam  $x^{(\ell)}, \ell = 1, \dots, N_h$ , os nodos interiores da triangulação  $\mathcal{T}_h$ . Consideremos, associada a cada nodo interior  $x^{(\ell)}$ , uma função  $\phi_\ell$  tal que

$$\phi_\ell(x^{(\ell)}) = 1, \phi_\ell(x^{(m)}) = 0, m \neq \ell.$$

Se  $T$  tem o vértice  $x^{(\ell)} = (x_\ell, y_\ell)$  e os restantes vértices são os nodos  $x^{(j)} = (x_j, y_j)$   $x^{(m)} = (x_m, y_m)$ , então

$$\phi_\ell(x, y) = \frac{(x - x_j)(y_m - y_j) - (y - y_j)(x_m - x_j)}{(x_\ell - x_j)(y_m - y_j) - (y_\ell - y_j)(x_m - x_j)}, (x, y) \in T_i$$

e consideramos  $\phi_\ell$  nula nos triângulos que não têm  $x^{(\ell)}$  como vértice. Atendendo à definição das funções anteriores é imediato o seguinte resultado:

- Teorema 2.7** (a)  $\{\phi_i, i = 1, \dots, N_h\}$  é uma base de  $V_h$ .  
(b)  $\text{suporte}(\phi_i) = \cup\{\bar{T} \in \mathcal{T}_h : x^{(i)} \text{ é vértice de } T\}$   
(c) se os vértices  $x^{(i)}$  e  $x^{(j)}$  não são extremidades de um mesmo lado, então  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$

Atendendo às propriedades da base definida a partir da triangulação  $\mathcal{T}_h$ , a matriz de rigidez  $[a(\phi_i, \phi_j)]$  tem estrutura de banda. Mais ainda, a matriz anterior tem, em cada linha  $i$ , entradas eventualmente não nulas apenas nas colunas relativamente às funções  $\phi_j$  associadas aos nodos interiores que estão na extremidade do lado que parte de  $x^{(i)}$ . Por exemplo, para a forma bilinear associada à equação de segunda ordem de coeficiente variáveis temos

$$\begin{aligned} a(\phi_i, \phi_j) &= \sum_{\ell, k} \int_{\Omega} a_{\ell k} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k} dx dy + \int_{\Omega} a_0 \phi_i \phi_j dx dy \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell, k} \int_T a_{\ell k} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k} dx dy + \int_T a_0 \phi_i \phi_j dx dy \\ &= \sum_{m \in I} \sum_{\ell, k} \int_{T_m} a_{\ell k} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k} dx dy + \int_{T_m} a_0 \phi_i \phi_j dx dy \end{aligned}$$

em que  $T_m, m \in I$ , são os triângulos que têm o vértice  $x^{(i)}$ .

O cálculo do integral sobre  $T$  pode ser feito recorrendo à passagem ao integral sobre o triângulo de referência  $\Delta$  de extremidades  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

Suponhamos que o triângulo  $T$  tem os vértices  $x^{(1)} = (x_1, y_1)$ ,  $x^{(2)} = (x_2, y_2)$  e  $x^{(3)} = (x_3, y_3)$ . A transformação do triângulo de referência no triângulo  $T$  é definida por

$$\Psi(\xi, \eta) = x^{(1)} + \xi(x^{(2)} - x^{(1)}) + \eta(x^{(3)} - x^{(1)}), (\xi, \eta) \in \Delta. \quad (34)$$

Assim, se  $\phi$  é uma função definida em  $T$ , utilizando a transformação  $\Psi$  temos

$$\phi(x, y) = \phi(\psi(\xi, \eta)) = \hat{\phi}(\xi, \eta),$$

e portanto a derivada parcial  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  é dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Assim, podemos concluir facilmente que

$$\nabla_{x,y} \phi = J(\Psi^{-1})^t \nabla_{\xi,\eta} \hat{\phi}$$

em que

$$J(\psi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Mais ainda, em  $T$ , as funções  $\phi_i$  associadas aos vértices anteriores, são dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \hat{\phi}_{0,0}(\Psi^{-1}) \text{ em } T, \quad \hat{\phi}_{0,0}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad (\xi, \eta) \in \Delta \\ \phi_2 &= \hat{\phi}_{1,0}(\Psi^{-1}) \text{ em } T, \quad \hat{\phi}_{1,0}(\xi, \eta) = \eta, \quad (\xi, \eta) \in \Delta \\ \phi_3 &= \hat{\phi}_{0,1}(\Psi^{-1}) \text{ em } T, \quad \hat{\phi}_{0,1}(\xi, \eta) = \xi, \quad (\xi, \eta) \in \Delta \end{aligned}$$

e

$$\nabla_{x,y} \hat{\phi}_i = J(\Psi)^{-1} \nabla_{\xi,\eta} \hat{\phi}_i. \quad (35)$$

Ao considerarmos, por exemplo, em  $a(\phi_1, \phi_2)$  ( com  $a(\cdot, \cdot)$  associada ao problema diferencial  $-\Delta u = f$ ), a mudança de variável definida pela transformação  $\Psi$ , o cálculo do integral sobre  $T$  é feito sem ser necessário conhecer explicitamente as funções da base associadas aos vértices do triângulo  $T$ . De facto,

$$\begin{aligned} a(\phi_1, \phi_2) &= \int_{\Omega} \nabla_{x,y} \phi_1 \nabla_{x,y} \phi_2 dx dy \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_{x,y} \phi_1 \nabla_{x,y} \phi_2 dx dy \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_T \nabla_{x,y} \phi_1 \nabla_{x,y} \phi_2 dx dy \\ &= \int_{T_{\xi,\eta}} \nabla_{x,y} \phi_1(\Psi(\xi, \eta)) \nabla_{x,y} \phi_2(\Psi(\xi, \eta)) |J(\psi)| d\xi d\eta \\ &= \int_{T_{\xi,\eta}} J(\Psi^{-1})^t \nabla_{\xi,\eta} \hat{\phi}_1(\xi, \eta) J(\Psi^{-1})^t \nabla_{\xi,\eta} \hat{\phi}_2(\psi^{-1}(\xi, \eta)) |J(\psi)| d\xi d\eta \end{aligned}$$

Se o espaço  $V_h$  é definido por

$$V_h := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y, (x, y) \in T, T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Temos  $V_h \subset H^1(\Omega)$  e  $\{\phi_i, i = 1, \dots, N_h\}$  é uma base de  $V_h$  em que, neste caso,  $N_h$  é o número de nodos interiores e fronteiros.

## 2. Elementos Bilineares para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Consideremos a partição do domínio  $\Omega$  de lados paralelos aos eixos coordenados, em rectângulos  $R_1, \dots, R_{N_h}$ . A partição  $\mathcal{R}_h$  diz-se admissível para o domínio  $\Omega$  se valem as condições  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  anteriormente consideradas com  $\Omega_i = R_i$ . A partição anterior pode ser considerada induzida por duas partições não uniformes  $\{x_i\}$  e  $\{y_j\}$ .

Seja

$$V_h := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h = 0 \text{ em } \partial\Omega \\ v_h(x, y) = (a_0 + a_1x)(b_0 + b_1y), (x, y) \in R, R \in \mathcal{R}_h\}.$$

Notamos que se  $v_h \in V_h$  então, em  $R \in \mathcal{R}_h$ ,  $v_h$  fica univocamente determinada a partir do seu valor nos vértices. Efectivamente, se os vértices têm as coordenadas  $(x_i, y_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j+1})$  e  $(x_{i+1}, y_{j+1})$ , então

$$v_h(x, y) = v_h(x_i, y_j)\Phi_{i,j}(x, y) + v_h(x_i, y_{j+1})\Phi_{i,j+1}(x, y) \\ + v_h(x_{i+1}, y_j)\Phi_{i+1,j}(x, y) + v_h(x_{i+1}, y_{j+1})\Phi_{i+1,j+1}(x, y)$$

em que

$$\Phi_{p,q}(x, y) = \phi_p(x)\phi_q(y), p = i, i + 1, q = j, j + 1,$$

e  $\phi_p(x)$  e  $\phi_q(y)$  representam as funções "chapéu" associadas ao nodos  $x_p$  e  $y_q$  respectivamente.

**Teorema 2.8** (a)  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$

(b)  $\{\Phi_{i,j}, (i, j) : (x_i, y_j) \text{ é nodo interior}\}$  é base de  $V_h$ ,

(c)  $\text{suporte}(\Phi_{i,j}) = \overline{\Omega} \cap [x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]$ ,

(d) Se  $(x_i, y_j)$  e  $(x_\ell, y_p)$  são vértices do mesmo rectângulo, então  $\text{suporte}(\Phi_{i,j}) \cap \text{suporte}(\Phi_{\ell,p}) \neq \emptyset$ . Caso contrário, a intersecção anterior é o conjunto vazio. ■

No determinação da matriz de rigidez temos que calcular  $a(\Phi_{i,j}, \Phi_{\ell,p})$ . Tal entrada não é nula apenas para  $\ell = i - 1, i, i + 1$  e  $p = j - 1, j, j + 1$ . Assim, por exemplo, temos

$$a(\Phi_{i,j}, \Phi_{i-1,j-1}) = \int_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} \dots dx dy,$$

$$a(\Phi_{i,j}, \Phi_{i-1,j}) = \int_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]} \dots dx dy,$$

$$a(\Phi_{i,j}, \Phi_{i-1,j+1}) = \int_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]} \dots dx dy.$$

Se não considerarmos condições de Dirichlet homogéneas para a fronteira na definição de  $V_h$ , então as modificações a considerar nos resultados anteriores são naturais.

A partição admissível tem como restrição que os lados do domínio sejam paralelos aos eixos coordenados. No entanto, para domínios poligonais mais irregulares consideramos seguidamente a partição em paralelogramos.

Uma partição  $\mathcal{P}_h$  em paralelogramos  $\Pi_i$  diz-se admissível para o domínio  $\Omega$  se valem as condições  $P_1, P_2$  e  $P_3$  anteriormente consideradas com  $\Omega_i = \Pi_i$ .

Consideremos o espaço das funções bilineares em  $x$  e em  $y$  e que estão associadas à partição  $\mathcal{P}_h$  :

$$V_h := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h = 0 \text{ em } \partial\Omega \\ v_h(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy, (x, y) \in \Pi, \Pi \in \mathcal{P}_h\}.$$

O espaço anterior é um subespaço de  $H_0^1(\Omega)$ .

Seja  $v_h \in V_h$ . Pretendemos escrever, nos paralelogramos  $\Pi \in \mathcal{P}_h$ ,  $v_h$  como combinação linear de 4 funções em que os coeficientes são o valor de  $v_h$  nos vértices do paralelogramo. Assim, se  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$  e  $x^{(4)}$  são os vértices de  $\Pi$ , pretendemos

$$v_h(x, y) = v_h(x^{(1)})\phi_1(x, y) + v_h(x^{(2)})\phi_2(x, y) \\ + v_h(x^{(3)})\phi_3(x, y) + v_h(x^{(4)})\phi_4(x, y),$$

em que  $\phi_i$  é uma função bilinear que tem o valor 1 em  $x^{(i)}$  e zero nos 4 vértices que são extremidades dos lados que emergem de  $x^{(i)}$ .

As funções  $\phi_i, i = 1, \dots, N_h$ , em que  $N_h$  é o número de nodos interiores, é uma base de  $V_h$ . O suporte de  $\phi_i$  é a união dos paralelogramos que têm  $x^{(i)}$  como vértice e intersecção dos suportes de  $\phi_i$  e de  $\phi_j$  é não vazia se e só se  $x^{(i)}$  e  $x^{(j)}$  são vértices do mesmo paralelogramo.

A partição em paralelogramos é uma generalização natural da partição em rectângulos. No entanto, contrariamente a esta última, não é fácil estabelecer expressões explícitas para as funções da base em função dos nodos. Podemos contudo considerar a passagem de um paralelogramo arbitrário para o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Sejam  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$  e  $x^{(4)}$  os vértices de um paralelogramo  $\Pi$ . Consideremos a transformação bijectiva

$$\Psi : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \Pi \\ (\xi, \eta) \rightarrow x^{(1)} + \xi(x^{(2)} - x^{(1)}) + \eta(x^{(4)} - x^{(1)})$$

Notemos que  $\Psi(0, 0) = x^{(1)}, \Psi(1, 0) = x^{(2)}, \Psi(0, 1) = x^{(4)}, \Psi(1, 1) = x^{(3)}$  e

$$\phi_1 = \hat{\phi}_{0,0}(\Psi^{-1}) \text{ em } \Pi, \hat{\phi}_{0,0}(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta), \\ \phi_2 = \hat{\phi}_{1,0}(\Psi^{-1}) \text{ em } \Pi, \hat{\phi}_{1,0}(\xi, \eta) = \xi(1 - \eta), \\ \phi_3 = \hat{\phi}_{1,1}(\Psi^{-1}) \text{ em } \Pi, \hat{\phi}_{1,1}(\xi, \eta) = \xi\eta, \\ \phi_4 = \hat{\phi}_{0,1}(\Psi^{-1}) \text{ em } \Pi, \hat{\phi}_{0,1}(\xi, \eta) = (1 - \xi)\eta,$$

para  $(\xi, \eta) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

### 3. Algumas Extensões



1. Consideremos  $\Omega$  domínio poligonal de  $\mathbb{R}^3$ . A extensão natural da triangulação considerada no caso bidimensional é a partição em tetraedros. O conceito de partição admissível tem, neste contexto, a sua extensão natural. Se  $\mathcal{T}_h$  é uma partição em tetraedros admissível para  $\Omega$  e  $T \in \mathcal{T}_h$ , então em cada face  $T^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de  $T$ ,  $v_h(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z$  é determinada univocamente a partir do seu valor nos vértices desta face. Assim, uma base para

$$V_h = \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h = 0 \text{ em } \partial\Omega, v_h(x, y, z) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z, \right. \\ \left. (x, y, z) \in T^{(i)}, i = 1, 2, 3, 4, T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

é obtida como anteriormente. Mais ainda, podemos aumentar o grau da funções que surgem em  $V_h$  procedendo como no caso bidimensional.

2. Na definição do problema variacional associado ao problema diferencial, as condições de fronteira foram, de modo natural, incluídas no espaço  $V$  com  $V = H_0^1(\Omega)$  ou  $V = H^1(\Omega)$ . No entanto, em alguns casos, o espaço  $V$  difere dos dois anteriores. Por exemplo, consideremos a equação de Poisson definida por  $f$  e com condição de Neumann definida por  $g$ . Se  $\int_{\Omega} f dx = \int_{\partial\Omega} g ds$ , então o problema tem solução única desde que se considere a condição  $\int_{\Omega} u dx = 0$  sobre a solução. Deste modo, somos levados naturalmente a  $V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v dx = 0\}$ . A nova condição deverá entrar na definição do espaço aproximante  $V_h$ . Definamos, como anteriormente, o espaço  $V_h$ . No entanto, tal espaço, no problema variacional definido em dimensão finita, é substituído por  $W_h = V_h \cap V$ . Uma base para este espaço deverá ser determinada como anteriormente.

3. Por uma questão de simplicidade e atendendo à sua grande aplicabilidade, reduzimos esta apresentação às equações diferenciais de segunda ordem. Para equações de ordem mais elevada, o espaço  $V_h$  que construímos, não é subespaço de  $H^m(\Omega)$  para  $m \geq 2$ . Assim, para que  $V_h$  seja, por exemplo, subespaço de  $H^2(\Omega)$ , os seus elementos bem como as suas derivadas deverão ser contínuos entre os elementos finitos. Tal facto, tal como no caso unidimensional, exige o uso de funções com mais regularidade.

4. Considerámos problemas diferenciais definidos sobre domínios poligonais. Coloca-se a questão natural: Como proceder quando o domínio  $\Omega$  não é poligonal. Suponhamos que considerámos  $H^1(\Omega)$  e efectuámos uma triangulação em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e que os triângulos que intersectam  $\partial\Omega$  têm dois vértices sobre a fronteira. Seja  $T$  um triângulo nestas condições. Se  $T$  está contido em  $\Omega$  e  $\Omega_T$  é a parte de  $\Omega$  não contida em  $T$ , então substituímos este triângulo por  $T \cup \Omega_T$ . Se  $T$  não está contido em  $\Omega$  e  $\Omega_T$  é a parte de  $T$  que é exterior a  $\Omega$ , então substituímos

este triângulo por  $T - \Omega_T$ . Para estes triângulos modificados consideramos as extensões ou restrições das funções anteriormente definidas.

Suponhamos agora que considerámos  $H_0^1(\Omega)$ . Neste caso as funções construídas no caso anterior não pertencem a este espaço. Consideramos o domínio  $\Omega$  substituído por um domínio poligonal  $\Omega_h \subset \Omega$  de tal modo que apenas "pequenas partes de  $\Omega$  fiquem fora de  $\Omega_h$ " e determinamos a solução de Ritz-Galerkin.

## 2.4 Estimativa para o erro da solução de EF

Consideremos o problema variacional definido no espaço de Hilbert  $V$ : dados  $a(.,.)$  uma forma bilinear elíptica em  $V$ ,  $f \in V'$ , determinar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = f(v), \forall v \in V.$$

No contexto das equações elípticas de segunda ordem definimos  $V = H^1(\Omega)$  ou  $V = H_0^1(\Omega)$ . Construimos a aproximação de elementos finitos no caso particular  $\Omega$  ser um domínio poligonal de  $\mathbb{R}^2$  definindo, para o efeito, espaços  $V_h \subset V$  de dimensão finita a partir de partições em elementos finitos. Assim a solução de elementos finitos  $u_h \in V_h$  é solução do problema variacional

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

A primeira estimativa para o erro com que vem afectada a solução de elementos finitos é dada pelo Teorema de Céa tendo, no contexto das equações elípticas de segunda ordem, a seguinte formulação:

**Teorema 2.9** *Se  $a(.,.)$  é elíptica em  $V$ , então*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{C_c}{C_e}\right) \text{dist}(u, V_h).$$

■

Pelo resultado anterior, uma estimativa para  $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$  obtém-se estimando  $\text{dist}(u, V_h)$ . Notemos que

$$\text{dist}(u, V_h) \leq \|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)}$$

em que  $I_h u$  denota a função de  $V_h$  que está associada a  $u$ . Se, por exemplo,  $V_h$  é o espaço das funções contínuas segmentadas lineares definidas a partir de uma triangulação admissível  $\mathcal{T}_h$  e  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $I_h u$  denota a função interpoladora de  $u$  segmentada linear definida a partir da triangulação.

Se a triangulação  $\mathcal{T}_h$  é induzida por uma partição rectangular e a solução  $u$  está em  $C^2(\bar{\Omega})$ , então podemos estimar  $\|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)}$ . De facto, notemos que

$$\|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \int_{\Delta} e_h(x, y)^2 dx dy,$$

em que  $e_h = u - I_h u$ . Atendendo a que, para  $(x, y)$  pertencente ao triângulo  $\Delta$  de vértices  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0, y_1)$  e  $(x_1, y_0)$  e com  $(x_0, y_0)$  associado ao ângulo recto e com lados de comprimento  $h$ , se tem

$$\begin{aligned} e_h(x, y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_0)(x - \bar{x})(x - x_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_2)(y - \bar{y})(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_3)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_4)(x - y_0)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(P_5)(x - x_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

em que  $P_i, i = 1, \dots, 5$ , são pontos de  $\Delta$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  pertencem respectivamente aos intervalos de extremos  $x_0, x_1$  e  $y_0, y_1$ , concluímos que

$$|e_h(x, y)| \leq 4Mh^2,$$

em que  $h$  é o diâmetro de  $\Delta$ ,  $M$  é um majorante das derivadas parciais de  $u$  em  $\Delta$  e  $C$  é uma constante independente de  $h$ . Logo obtemos a seguinte estimativa

$$\|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 h^2 \|u\|_{C^2}.$$

A estimativa anterior não pode ser usada em complemento ao Teorema de Céa pois que, neste teorema, a estimativa deve ser estabelecida relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$ .

**Teorema 2.10** *Seja  $T = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta \geq 0, \xi + \eta \leq 1\}$ . Se  $u \in H^2(T)$ , então*

$$\|u\|_{H^2(T)}^2 \leq C \left( \sum_{X \in V(T)} u(X)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2(T)}^2 \right) \quad (36)$$

em que  $V(T)$  representa o conjunto dos vértices de  $T$ .

**Demonstração:**

- A forma bilinear

$$a(u, v) = \sum_{x \in V(T)} u(x)v(x) + \sum_{|\alpha|=2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^\alpha} \right)_{L^2(T)},$$

definida em  $H^2(T)$  é contínua pois  $i_d : H^2(T) \rightarrow C^0(T)$  é contínua.

Provemos que

$$a(u, u) \geq C_1 \|u\|_{H^2(T)}^2 - C_2 \|u\|_{L^2(T)}^2, u \in H^2(T). \quad (37)$$

Começemos por observar que

$$a(u, u) \geq \sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial X^\alpha} \right\|_{L^2(T)}^2 = \|u\|_{H^2(T)}^2 - \|u\|_{H^1(T)}^2.$$

Atendendo a que o mergulho de  $H^2(T)$  em  $H^1(T)$  é compacto, para  $\epsilon > 0$  existe  $\gamma$  tal que <sup>4</sup>

$$\|u\|_{H^2(T)}^2 \leq \epsilon \|u\|_{H^1(T)}^2 + \gamma \|u\|_{L^2(T)}^2.$$

Esolvendo  $\epsilon$  de modo conveniente obtemos (37).

- Seja  $A : H^2(T) \rightarrow H^2(T)'$  definido por  $Aw = a(w, \cdot)$ ,  $w \in H^2(T)$ . Atendendo a que  $a(\cdot, \cdot)$  satisfaz (37) e é limitada, então  $A$  é invertível ou  $\lambda = 0$  é valor próprio de  $A$ .<sup>5</sup> Seja  $0 \neq e \in H^2(T)$  a função própria associada a  $\lambda = 0$ . Atendendo a que  $\sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 e}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2(T)}^2 = 0$ , vem que  $e$  é linear em  $T$  e, uma vez que  $a(e, e) = 0$ , vem  $e = 0$ . Concluimos assim que  $A$  é invertível e portanto  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica.<sup>6</sup> ■

No resultado seguinte, o teorema anterior é estendido a um triângulo  $T_h = hT$ .

**Teorema 2.11** *Se  $u \in H^2(T_h)$ , então, para  $|\beta| \leq 2$ , tem-se*

$$\left\| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial X^\beta} \right\|_{L^2(T_h)}^2 \leq C \left( h^{2-2|\beta|} \sum_{X \in V(T_h)} u(X)^2 + h^{4-2|\beta|} \sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial X^\alpha} \right\|_{L^2(T)}^2 \right), \quad (38)$$

em que  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$ .

**Demonstração:** Seja  $u \in H^2(T_h)$ . Consideremos  $\psi : T \rightarrow T_h$  tal que  $(x, y) = \psi(\xi, \eta) = (h\xi, h\eta)$  e  $v(\xi, \eta) = u(h\xi, h\eta)$ . Temos  $v \in H^2(T)$  e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial X^\beta} \right\|_{L^2(T_h)}^2 &= \int_{T_h} \left| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial X^\beta} \right|^2 dx dy \\ &= \det(J(\psi)) \int_T \left| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial X^\beta} \right|^2 d\xi d\eta \\ &= h^2 \int_T h^{-2|\beta|} \left| \frac{\partial^{|\beta|} v}{\partial \xi^{\beta_1} \partial \eta^{\beta_2}} \right|^2 d\xi d\eta \\ &= h^{2-2|\beta|} \left\| \frac{\partial^{|\beta|} v}{\partial \xi^{\beta_1} \partial \eta^{\beta_2}} \right\|_{L^2(T)}^2, \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Sejam  $U \subset V \subset W$  espaços de Banach em que  $i_d : U \rightarrow V$ ,  $i_d : V \rightarrow W$  são contínuas e o primeiro mergulho é compacto. Então, para  $\epsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C_\epsilon$  tal que  $\|u\|_V \leq \epsilon \|u\|_U + C_\epsilon \|u\|_W$ .

<sup>5</sup>Sejam  $V$  e  $U$  espaços de Hilbert tais que  $V \subset U$  e  $V$  está continuamente e densamente mergulhado em  $U$ . Seja  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear contínua tal que

$$a(u, u) \geq C_1 \|u\|_V^2 - C_2 \|u\|_U, \quad u \in V,$$

e  $A$  o operador de  $V$  em  $V'$  associado a  $a(\cdot, \cdot)$ . Então  $\lambda = 0$  é valor próprio de  $A$  ou existe  $A^{-1} \in \mathcal{L}(V', V)$ .

<sup>6</sup>Se  $A$  é o operador associado a uma forma bilinear contínua, não negativa e simétrica, e existe  $A^{-1} \in \mathcal{L}(V', V)$ , então  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica em  $V$ .

pois que  $\frac{\partial^{|\beta|}v}{\partial X^\beta} = h^{-|\beta|} \frac{\partial^{|\beta|}v}{\partial \xi^{\beta_1} \partial \eta^{\beta_2}}$ .

Atendendo ao Teorema 2.10,

$$\left\| \frac{\partial^{|\beta|}v}{\partial \xi^{\beta_1} \partial \eta^{\beta_2}} \right\|_{L^2(T)}^2 \leq C \left( \sum_{X \in V(T)} v(X)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^{\alpha_1} \partial \eta^{\alpha_2}} \right\|_{L^2(T)}^2 \right)$$

em que, para  $|\alpha| = 2$ ,

$$\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^{\alpha_1} \partial \eta^{\alpha_2}} \right\|_{L^2(T)}^2 = h^2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial X^\alpha} \right\|_{L^2(T_h)}^2.$$

Conjugando as desigualdades obtidas concluímos (38). ■

No teoremas seguinte estendemos as estimativas anteriores a um triângulo arbitrário.

**Teorema 2.12** *Seja  $\tilde{T}$  um triângulo de lados de medida de comprimento inferior a  $h_{max}$  e de ângulos internos de medida de amplitude limitada inferiormente por  $\alpha_0$ . Se  $u \in H^2(\tilde{T})$ , então, para  $|\beta| \leq 2$ ,*

$$\left\| \frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial X^\beta} \right\|_{L^2(\tilde{T})}^2 \leq C(\alpha_0) \left( h_{max}^{2-2|\beta|} \sum_{X \in V(\tilde{T})} u(X)^2 + h_{max}^{4-2|\beta|} \sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial X^\alpha} \right\|_{L^2(\tilde{T})}^2 \right) \quad (39)$$

**Demonstração:** Sejam  $X_1, X_2$  e  $X_3$  os vértices de  $\tilde{T}$ . Seja  $T_{h_{max}}$  como no teorema anterior. A transformação  $\psi : T_{h_{max}} \rightarrow \tilde{T}$ ,

$$\psi(\xi, \eta) = X_1 + \frac{\xi}{h_{max}}(X_2 - X_1) + \frac{\eta}{h_{max}}(X_3 - X_1),$$

é bijectiva e tem-se, para  $u \in H^2(\tilde{T})$ ,

$$\left\| \frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial X^\beta} \right\|_{L^2(\tilde{T})}^2 = \det(J(\psi)) \int_{T_{h_{max}}} \left| \frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial X^\beta} \right|^2 d\xi d\eta,$$

em que

$$\det(J(\psi)) = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{h_{max}^2}.$$

Notemos que

$$\frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial X^\beta} = \sum_{|\beta'|=|\beta|} \frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial \xi^{\beta'_1} \partial \eta^{\beta'_2}} \gamma_{\beta'}$$

em que  $\gamma_{\beta'}$  é o cociente entre  $h_{max}^{|\beta|}$  e produtos de factores do tipo  $(x_i - x_1), (y_j - y_1)$  em número igual a  $|\beta|$ . Atendendo à hipótese formulada sobre a medida da amplitude dos ângulos internos de  $\tilde{T}$ , vem que  $|\gamma_{\beta'}| \leq C(\alpha_0)$ . Assim, ficamos com parcelas do tipo

$$\int_{T_{h_{max}}} \left| \frac{\partial^{|\beta|}v}{\partial \xi^{\beta'_1} \partial \eta^{\beta'_2}} \right|^2 d\xi d\eta = \left\| \frac{\partial^{|\beta|}v}{\partial \xi^{\beta'_1} \partial \eta^{\beta'_2}} \right\|_{L^2(T_{h_{max}})}^2.$$

Pelo Teorema 2.11 vem

$$\left\| \frac{\partial^{|\beta|} v}{\partial \xi^{\beta'_1} \partial \eta^{\beta'_2}} \right\|_{L^2(T_{h_{max}})}^2 \leq C \left( h_{max}^{2-2|\beta|} \sum_{X \in V(T_{h_{max}})} v(X)^2 + h_{max}^{4-2|\beta|} \sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^{\alpha_1} \partial \eta^{\alpha_2}} \right\|_{L^2(T_{h_{max}})}^2 \right).$$

Considerando agora a passagem do integral sobre  $T_{h_{max}}$  ao integral sobre  $\tilde{T}$  efectuando mudança de variável  $(\xi, \eta) = \psi^{-1}(x, y)$ , obtemos o factor

$$\frac{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{h_{max}^2},$$

e ainda, factores que são majorados por uma constante que depende da medida da amplitude dos ângulos internos do triângulo  $\tilde{T}$ .

Conjugando as desigualdades e identidades obtidas concluímos (39). ■

O Teorema 2.12 é fundamental para determinação de uma estimativa para  $dist(u, V_h)$ .

**Teorema 2.13** *Seja  $\mathcal{T}_h$  uma triângulação admissível para o domínio poligonal  $\Omega$  em que o comprimento dos lados dos triângulos é inferior a  $h_{max}$  e a medida da amplitude dos ângulos internos dos triângulos da triangulação é limitada inferiormente por  $\alpha_0$ . Seja*

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_{\partial\Omega} = 0, v_h(x, y) = a + bx + cy, (x, y) \in T, T \in \mathcal{T}_h\}$$

(ou

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h(x, y) = a + bx + cy, (x, y) \in T, T \in \mathcal{T}_h\}$$

), então

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^s(\Omega)} \leq C(\alpha_0) h_{max}^{2-s} \|u\|_{H^2(\Omega)}, u \in H^2(\Omega) \cap V,$$

em que  $V = H_0^1(\Omega)$  (ou  $V = H^1(\Omega)$ ).

**Demonstração:** Seja  $u \in H^2(\Omega)$  e

$$I_h u = \sum_{X \in V(\mathcal{T}_h)} u(X) \phi_X$$

em que  $\phi_X$  é a função base de  $V_h$  associada ao vértice  $X$ . A função  $e_h = u - I_h u$  pertence a  $H^2(\Omega)$  e tem-se

$$dist(u, V_h) \leq \|e_h\|_{H^s(\Omega)}.$$

Mas, pelo Teorema 2.12, vale, para  $|\beta| \leq s$ , a seguinte desigualdade

$$\left\| \frac{\partial^{|\beta|} e_h}{\partial X^\beta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\alpha_0) \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( h_{max}^{2-2|\beta|} \sum_{X \in V(T)} e_h(X)^2 + h_{max}^{4-2|\beta|} \sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 e_h}{\partial X^\alpha} \right\|_{L^2(T)}^2 \right).$$

Atendendo a que  $e_h = 0$  nos vértices dos triângulos, obtemos finalmente

$$\left\| \frac{\partial^{|\beta|} e_h}{\partial X^\beta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\alpha_0) h_{max}^{4-2|\beta|} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{|\alpha|=2} \left\| \frac{\partial^2 e_h}{\partial X^\alpha} \right\|_{L^2(T)}^2 \leq C(\alpha_0) h_{max}^{4-2|\beta|} \|u\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

■

Do teorema anterior vem, para  $s = 0$ ,

$$\|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\alpha_0) h_{max}^2 \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

que generaliza a desigualdade já demonstrada para triangulações induzidas por redes rectangulares e admitindo que  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Para  $s = 1$  vem

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\alpha_0) h_{max} \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Conjugando o Teorema de Céa e o Teorema 2.13 estabelecemos o seguinte resultado de convergência.

**Teorema 2.14** *Seja  $\mathcal{T}_h$  uma triangulação admissível para o domínio poligonal  $\Omega$  em que o comprimento dos lados dos triângulos é inferior a  $h_{max}$  e a medida da amplitude dos ângulos internos dos triângulos da triangulação é limitada inferiormente por  $\alpha_0$ . Seja*

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h|_{\partial\Omega} = 0, v_h(x, y) = a + bx + cy, (x, y) \in T, T \in \mathcal{T}_h\}$$

(ou

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h(x, y) = a + bx + cy, (x, y) \in T, T \in \mathcal{T}_h\}$$

). Se  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear elíptica em  $V$  ( $V = H^1(\Omega)$  ou  $V = H_0^1(\Omega)$ ) e  $f \in V'$ , então existem funções únicas  $u$ , em  $V$ ,  $u_h$ , em  $V_h$ , tais que

$$a(u, v) = f(v), \forall v \in V,$$

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h,$$

e, se  $u \in V \cap H^2(\Omega)$ , tem-se

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\alpha_0) h_{max} \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

em que  $V = H^1(\Omega)$  (ou  $V = H_0^1(\Omega)$ ).

■

A questão natural que se coloca diz respeito à estimativa do erro da solução de elementos finitos relativamente à norma  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ .

Suponhamos que  $a(\cdot, \cdot)$  é simétrica. Seja  $w \in V$  a solução do seguinte problema variacional

$$a(w, v) = (u - u_h, v), \forall v \in V.$$

Notemos que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(w, u - u_h)$$

e portanto

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(w - w_h, u - u_h). \quad (40)$$

uma vez que  $0 = a(u - u_h, v_h) = a(v_h, u - u_h)$  para  $v_h \in V_h$ , tendo-se (40) considerando  $v_h = w_h$ .

Atendendo a que  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua concluímos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_c \|w - w_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)},$$

e portanto, pelo Teorema 2.14,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_c \frac{\|w - w_h\|_{H^1(\Omega)}}{\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}} C(\alpha_0) h_{max} \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (41)$$

Suponhamos que

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (42)$$

Conjugando (41) com (42) obtemos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\alpha) h_{max}^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

A hipótese (42) é consequência da existência de  $A^{-1}$  em  $\mathcal{L}(H^2(\Omega)', H^2(\Omega))$ , ou ainda de  $A$  ser inferiormente limitado pois

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^2(\Omega)} &\leq C \|Aw\|_{-1} \\ &= \sup_{0 \neq v \in H^2(\Omega)} \frac{|Aw[v]|}{\|v\|_{H^2(\Omega)}} \\ &= \sup_{0 \neq v \in H^2(\Omega)} \frac{|(u - u_h, v)|}{\|v\|_{H^2(\Omega)}} \\ &\leq \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Consideremos agora uma sucessão de triangulações definida por uma sucessão  $\Lambda$ . Vejamos seguidamente tipos de triangulações para as quais são válidas as condições de regularidade relativamente às medidas de amplitude dos ângulos internos dos triângulos e que permitem concluir a validade dos últimos teoremas estudados.

Seja  $h_T$  o comprimento do maior dos lados do triângulo  $T \in \mathcal{T}_h$ , e seja

$$h_{max} = \max\{h_T, T \in \mathcal{T}_h\}$$

para  $h \in \Lambda$ . Sejam  $\rho_T$  o raio da circunferência inscrita em  $T \in \mathcal{T}_h$ , e

$$\rho_h = \min\{\rho_T, T \in \mathcal{T}_h\}.$$



Consideremos, para cada triangulação  $\mathcal{T}_h$ , o cociente

$$\max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\rho_T}.$$

Se

$$\max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\rho_T} \leq C,$$

para  $h \in \Lambda$ , então a família de triangulações diz-se quase uniforme.

Se

$$\frac{h_{max}}{\min_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T} \leq C,$$

então a família de triangulações diz-se uniforme.

Se a família de triangulações é uniforme ou quase uniforme, então vale a condição de regularidade das triangulações assumida para garantir a majoração do erro com que vem afectada a solução de elementos finitos segmentada linear.

## 2.5 Alguns problemas

- Determinar problemas variacionais associados aos problemas diferenciais seguintes num contexto funcional adequado. Mostre que os problemas variacionais indicados têm solução única.

(a)

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + a_0u = f \text{ em } \Omega \\ u(x, y) = f_1(x)f_2(y) \text{ } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $a, b, a_0$  são limitadas superiormente e  $a, b, a_0 \geq C_\ell > 0$  em  $\Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $f_1, f_2$  são  $C^1$ .

(b)

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left((-2+xy)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2y \text{ em } \Omega \\ u(x, y) = 0 \text{ } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

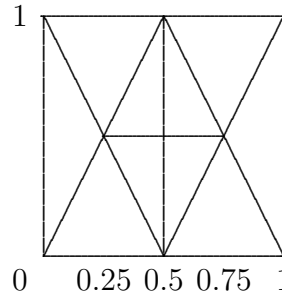
(c)

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u = f \text{ em } \Omega \\ a\frac{\partial u}{\partial x}\eta_x + b\frac{\partial u}{\partial y}\eta_y = g \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(\eta_x, \eta_y)$  denota a normal unitária exterior a  $\Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $a, b$  são limitadas superiormente e  $a, b \geq C_\ell > 0$  em  $\Omega$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$ .

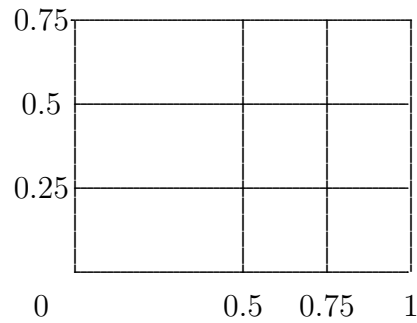
- Considere os seguintes problemas diferenciais definidos nos domínios indicados .

(a) 
$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ } (x, y) \in \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$



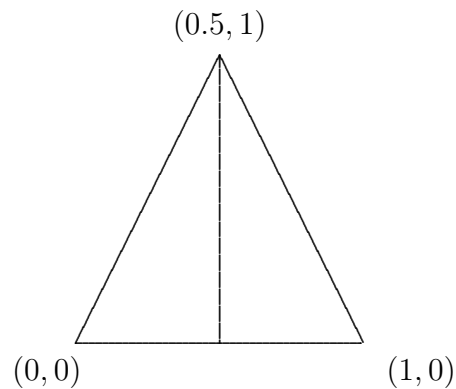
(b)

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + xyu(x, y) = f(x, y) \text{ } (x, y) \in \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$



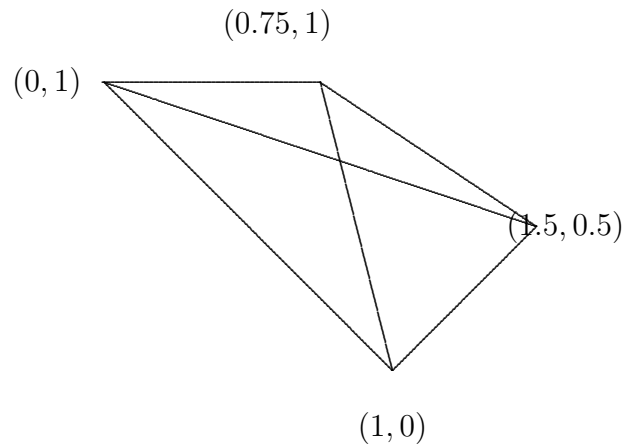
(c)

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = xy & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$



(d)

$$\begin{cases} -\Delta u = x^2y & \text{em } \Omega \\ u = \text{sen}(xy) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$



Para cada dos problemas anteriores

- Indique o problema variacional associado num enquadramento funcional adequado.
- Averigúe a existência e unicidade de solução do problema variacional indicado na alínea anterior.
- Considere a partição em elementos finitos indicada. Estabeleça a matriz de rigidez que permite determinar a solução de elementos finitos.
- Considerando fórmulas de integração adequadas, estabeleça o sistema linear que permite determinar uma aproximação para a solução de Ritz-Galerkin.

3. Considere a equação de Poisson com condição de Dirichlet homogénea definida num domínio  $\Omega$  limitado de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $V_h$  o espaço das funções segmentadas lineares definidas a partir de uma triangulação admissível para  $\Omega$ . Suponha que a triangulação satisfaz os requisitos já referidos para os ângulos internos e para os lados dos triângulos.

Mostre que se a solução do problema variacional que está associado ao problema diferencial pertence a  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , então

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

## Capítulo 4 - Problemas de evolução

### 1 Introdução

O conceito de problema de evolução é introduzido na teoria das equações de derivadas parciais com o objectivo de distinguir as equações envolvendo a variável temporal das restantes equações. Estes problemas têm associadas equações parabólicas e equações hiperbólicas. Atendendo a este facto, no estudo de métodos numéricos para este tipo de problemas, distinguimos os dois grupos anteriores. Tal facto encontra a sua justificação nas propriedades analíticas das soluções das ditas equações pois que tendo características de regularidade diferenciadas implica forçosamente que os métodos numéricos para os tipos de equações anteriores sejam também diferenciados.

Estudamos fundamentalmente métodos numéricos para equações parabólicas. Atendendo a que o comportamento das soluções dos problemas de condição inicial definidos por equações hiperbólicas é bastante dependente da regularidade das condições iniciais, o estudo de métodos numéricos para este tipo de problemas é bastante mais delicado, só pontualmente será referido. Não podemos deixar de notar que este capítulo é apenas uma primeira incursão nos problemas de evolução.

### 2 MEF para problemas de evolução

#### 2.1 Equação do calor unidimensional

##### 2.1.1 Formulação variacional

Consideremos a equação diferencial parabólica não homogénea com condições de fronteira homogéneas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \text{ em } (0, a) \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in (0, a) \\ u(0, t) = u(a, t) = 0, t \in (0, T) \end{array} \right. \quad (1)$$

em que  $f$  pode depender apenas da variável espacial mas também da variável temporal.

Consideremos na equação diferencial o produto interno de  $L^2$  com uma função  $v$  de

$H_0^1(0, a)$ . Obtemos

$$\int_0^a \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx = - \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} v' \, dx + \int_0^a f v \, dx,$$

e, deste modo, estabelecemos o seguinte problema variacional: determinar  $u$  tal que  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $x \in (0, a)$ , e, para  $t \in (0, T]$ , verifica  $u(\cdot, t) \in H_0^1(0, a)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \in L^2(0, a)$  e

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + a(u(t), v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(0, a), \quad (2)$$

em que

$$a(w, v) = \int_0^a w' v' \, dx, \quad w, v \in H_0^1(0, a).$$

Vejamos seguidamente algumas propriedades da solução do problema variacional definido.

Consideremos na equação variacional  $v = u(t)$ , isto é,  $u(t)$  verifica

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u(t)\right) + a(u(t), u(t)) = (f, u(t)),$$

e, portanto, atendendo a que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2, \quad \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \, dx \geq \frac{a^2}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2$$

e

$$(f, u(t)) \leq \|f\|_{L^2} \|u(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{4\epsilon^2} \|f\|_{L^2}^2 + \epsilon^2 \|u\|_{L^2}^2,$$

deduzimos a seguinte desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + (a^2 - 2\epsilon^2) \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\epsilon^2} \|f\|_{L^2}^2. \quad (3)$$

Atendendo a que a desigualdade anterior é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left( \|u(t)\|_{L^2}^2 e^{(a^2 - 2\epsilon^2)t} - \frac{1}{2\epsilon^2} \int_0^t e^{(a^2 - 2\epsilon^2)s} \|f\|_{L^2}^2 \, ds \right) \leq 0,$$

vem facilmente

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{-(a^2 - 2\epsilon^2)t} \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} \int_0^t e^{(a^2 - 2\epsilon^2)(s-t)} \|f\|_{L^2}^2 \, ds, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Escolhendo, em (4),  $\epsilon$  tal que  $a^2 - 2\epsilon^2 > 0$ , concluímos o seguinte resultado:

**Teorema 2.1** *Se, para cada  $t \in (0, T]$ , o problema variacional tem solução  $u(t) \in H_0^1(0, a)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial t}(t) \in L^2(0, a)$ , então tal solução é única.*

*A solução é estável relativamente a perturbações da condição inicial.*

■

A estabilidade referida no resultado anterior tem o seguinte sentido: se  $u$  e  $\tilde{u}$  são soluções obtidas com  $u_0$  e  $\tilde{u}_0$  respectivamente e se  $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^2} \simeq 0$ , então  $\|u - \tilde{u}\|_{L^2} \simeq 0$ .

### 2.1.2 Aproximação de Ritz-Galerkin

Com o objectivo de determinar uma aproximação para  $u$  consideremos o subespaço  $V_h$  de  $H_0^1(0, a)$ , de dimensão finita e caracterizado pelo parâmetro  $h$ . Determinemos a aproximação  $u_h$  tal que, para cada  $t \in (0, T]$ ,  $u_h(\cdot, t) \in V_h$  e

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h\right) + a(u_h(t), v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (5)$$

e

$$u_h(0) = u_{0,h}, \quad (6)$$

em que  $u_{0,h}$  representa uma aproximação de  $u_0$  no espaço  $V_h$ . À solução  $u_h$  definida por (5) e (6) chamamos aproximação de Ritz-Galerkin para a solução de (1).

A determinação da aproximação de Ritz-Galerkin é feita fixando em  $V_h$  uma base. Assim, se  $\{\phi_i, i = 1, \dots, N_h\}$  é uma base deste espaço, a solução de Ritz-Galerkin é definida por

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \phi_j(x), \quad x \in [0, a], t \geq 0,$$

e portanto, os coeficientes  $\alpha_j(t)$  verificam

$$\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i'(t) (\phi_i, \phi_j) + \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t) a(\phi_i, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j = 1, \dots, N_h,$$

ou ainda

$$[(\phi_i, \phi_j)] \alpha'(t) + [a(\phi_i, \phi_j)] \alpha(t) = F, \quad t \in (0, T], \quad (7)$$

em que  $F_i = (f, \phi_i)$ . O sistema diferencial anterior é complementado com a condição inicial definida a partir das coordenadas de  $u_{0,h}$  relativamente à base fixada.

A resolução do sistema diferencial ordinário para a determinação da aproximação de Ritz-Galerkin para a solução do problema diferencial inicial é tanto mais simples quanto mais simples é a estrutura da matriz  $[a(\phi_i, \phi_j)]$ . O sistema diferencial referido fica com uma estrutura simples no caso particular da base fixada em  $V_h$  ser tal que os suportes de dois elementos  $\phi_i, \phi_j$ , tenham intersecção não vazia apenas para um número reduzido de índices. Tal situação ocorre quando o espaço  $V_h$  que substitui o espaço  $H_0^1(0, a)$  é construído a partir de uma partição em elementos finitos. Assim, no caso particular de  $V_h$  ser o espaço das funções segmentadas lineares definidas a partir de uma partição do intervalo espacial, podemos considerar  $\phi_i$  como sendo a função "chapéu" associada ao nodo  $x_i$ . O sistema diferencial ordinário obtido nesta particularização tem uma matriz tridiagonal e portanto é de resolução simples.

A análise das propriedades da aproximação de Ritz-Galerkin ( e no caso particular de elementos finitos ) é feita comparando  $u$  com  $u_h$  relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$  ou  $\|\cdot\|_0$ . Como veremos posteriormente, em geral o estudo do erro com que vem afectada a solução de Ritz-Galerkin é feita relativamente à norma de  $L^2(0, a)$ . Somente em alguns casos particulares conseguimos estabelecer estimativas de erro relativamente à norma do espaço  $H^1$ .

Seja  $t \in (0, T]$ . Denotemos por  $\tilde{u}_h(t)$  a solução do seguinte problema variacional auxiliar

$$a(\tilde{u}_h(t), v_h) = -\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_h\right) + (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (8)$$

Utilizando  $\tilde{u}_h(t)$ , o erro  $u_h(t) - u(t)$  pode ser decomposto do seguinte modo

$$u_h(t) - u(t) = u_h(t) - \tilde{u}_h(t) + \tilde{u}_h(t) - u(t) = \theta_h(t) + \rho_h(t).$$

Uma estimativa para o erro  $\rho_h(t)$  é feita atendendo às propriedades do método usado quando considerado para equações elípticas. Determinamos seguidamente uma estimativa para  $\theta_h(t)$ . Notemos que

$$\left(\frac{\partial \theta_h}{\partial t}, v_h\right) + a(\theta_h(t), v_h) = (f, v_h) - \left(\frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t}, v_h\right) - a(\tilde{u}_h(t), v_h),$$

e ainda, atendendo à definição de  $\tilde{u}_h$ ,

$$\left(\frac{\partial \theta_h}{\partial t}, v_h\right) + a(\theta_h(t), v_h) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t}, v_h\right).$$

A identidade anterior toma a forma

$$\left(\frac{\partial \theta_h}{\partial t}, v_h\right) + a(\theta_h(t), v_h) = -\left(\frac{\partial \rho_h}{\partial t}, v_h\right), \quad v_h \in V_h. \quad (9)$$

Observamos que  $\frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t}$  é solução do seguinte problema variacional

$$a\left(\frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t}, v_h\right) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v_h\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}, v_h\right), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (10)$$

que está associado à equação variacional

$$a\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}, v\right), \quad \forall v \in H_0^1(0, a).$$

Logo, se  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  é suficientemente regular, podemos garantir alguma estimativa para  $\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$ .

Tomemos, em (9),  $v_h = \theta_h(t)$ . Atendendo a que

$$\|\theta_h(t)\|_{L^2} \frac{d}{dt} \|\theta_h(t)\|_{L^2} = \left(\frac{\partial \theta_h}{\partial t}, \theta_h(t)\right),$$

obtemos

$$\|\theta_h(t)\|_{L^2} \frac{d}{dt} \|\theta_h(t)\|_{L^2} + a(\theta_h(t), \theta_h(t)) = -\left(\frac{\partial \rho_h}{\partial t}, \theta_h(t)\right),$$

e portanto, se  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica, estabelecemos a desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt} \|\theta_h(t)\|_{L^2} + C_e \|\theta_h(t)\|_{L^2} \leq \left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2}. \quad (11)$$



A desigualdade (11) é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left( e^{C_e t} \|\theta_h(t)\|_{L^2} - \int_0^t e^{C_e s} \left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2} ds \right) \leq 0,$$

e portanto

$$e^{C_e t} \|\theta_h(t)\|_{L^2} - \int_0^t e^{C_e s} \left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2} ds$$

é decrescente. Logo

$$\|\theta_h(t)\|_{L^2} \leq e^{-C_e t} \left( \int_0^t e^{C_e s} \left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2} ds + \|\theta_h(0)\|_{L^2} \right). \quad (12)$$

Atendendo à decomposição inicial do erro  $u_h(t) - u(t)$ , obtemos a seguinte estimativa

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leq \|\rho_h(t)\|_{L^2} + e^{-C_e t} \left( \int_0^t e^{C_e s} \left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2} ds + \|\theta_h(0)\|_{L^2} \right). \quad (13)$$

Conjugando a desigualdade anterior com as seguintes estimativas:

1.

$$\|\tilde{u}_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u(t)\|_{H^2},$$

2.

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2} \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^2},$$

estabelecemos o seguinte resultado:

**Teorema 2.2** *Sejam, para cada  $t \in (0, T]$ ,  $u(t)$  a solução do seguinte problema variacional*

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u(t), v) = (f, v), \quad v \in H_0^1(0, a),$$

e  $u_h(t)$  a sua aproximação de elementos finitos em  $V_h$  definida por

$$\left( \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right) + a(u_h(t), v_h) = (f, v_h), \quad v_h \in V_h,$$

$$u_h(0) = u_{0,h} \in V_h,$$

em que  $V_h$  é o espaço das funções segmentadas lineares definidas a partir de uma partição de espaçamento máximo  $h$ . Se  $\frac{\partial u}{\partial t} \in H_0^2(0, a)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, a)$ , então

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(0,a)} + e^{-C_e t} \|u_0 - u_{0,h}\|_{L^2} + Ch^2 \int_0^t e^{C_e(s-t)} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^2(0,a)} ds,$$

em que  $C$  é uma constante independente de  $h$  e de  $u$ . ■

### 2.1.3 Aproximação de Ritz-Galerkin discreta no tempo

A determinação da solução de Ritz-Galerkin fica concluída após a resolução do sistema diferencial ordinário deduzido para as coordenadas desta aproximação relativamente à base fixada no espaço  $V_h$ . O sistema diferencial anterior pode ser resolvido analiticamente ou de modo aproximado através da sua discretização utilizando um método numérico para este tipo de equações. Neste caso, obtemos uma solução de Ritz-Galerkin em níveis de tempo discretos.

A solução de Ritz-Galerkin discreta no tempo -  $u_h^m$  - é solução do problema discreto que se obtém de (5) substituindo a derivada temporal por um cociente de diferenças. Se utilizarmos, por exemplo, a diferença "backward", obtemos

$$(u_h^{m+1}, v_h) + \Delta t a(u_h^m, v_h) = \Delta t (f^m, v_h), \forall v_h \in V_h, m = 0, \dots, M-1, u_h^0 = u_{0,h}, \quad (14)$$

em que  $M\Delta t = T$ .

Observamos que obter a solução de Ritz-Galerkin  $u_h^m$  através do método anterior, conhecido por método Euler- Ritz-Galerkin explícito, é equivalente a resolver o sistema diferencial ordinário (7) utilizando o método de Euler explícito e depois considerar

$$u_h^m = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i^m \phi_i.$$

Outras variantes podem ser utilizadas na integração do problema diferencial ordinário deduzido, obtendo-se, necessariamente outros métodos numéricos para a determinação da solução de Ritz-Galerkin discreta.

## 2.2 Um problema parabólico modelo

### 2.2.1 Formulação variacional

Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$  de fronteira  $\partial\Omega$  e  $T > 0$ . Consideremos o problema de condições de fronteira e inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - cu + f \text{ em } \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \end{array} \right. \quad (15)$$

Suponhamos que  $a_{ij} = a_{ji}$  e que existe uma constante positiva  $\alpha_0$  tal que

$$\xi^t [a_{ij}] \xi \geq \alpha_0 \|\xi\|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \bar{\Omega}, \forall t \geq 0. \quad (16)$$

Para  $c$  e  $b$  admitimos

$$c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \forall x \in \bar{\Omega}, \forall t \geq 0. \quad (17)$$

Procedendo como anteriormente aquando da definição do problema variacional associado à equação do calor unidimensional, obtemos o seguinte problema variacional: determinar, para cada  $t \in (0, T]$ ,  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega)$  e

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + a(u(t), v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall t > 0, u(0) = u_0 \quad (18)$$

em que

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c w v dx, \quad w, v \in H_0^1(\Omega). \quad (19)$$

Estudamos seguidamente as propriedades da solução do problema variacional (18). Consideremos, em (18),  $v = u(t)$ . Atendendo à definição de  $a(\cdot, \cdot)$  e às condições (16) e (17) tem-se, sucessivamente,

$$\begin{aligned} a(u(t), u(t)) &\geq \alpha_0 \int_{\Omega} \nabla u(t)^2 dx + \int_{\Omega} b \frac{\partial u}{\partial x_i} u(t) + c u^2 dx \\ &= \alpha_0 \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \left(c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right) u^2 dx \\ &\geq \alpha_0 \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Das desigualdades anterior e de Poincaré - Friedrichs, vem ainda

$$a(u(t), u(t)) \geq C \|u(t)\|_{L^2}^2. \quad (20)$$

Conjugando (18) (com  $v = u(t)$ ), com (20) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + (C - \epsilon^2) \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{4\epsilon^2} \|f\|_{L^2}^2. \quad (21)$$

Integrando a desigualdade diferencial, estabelecemos

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{-2(C-\epsilon^2)t} \|u(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{2(C-\epsilon^2)(s-t)} \frac{1}{2\epsilon^2} \|f\|_{L^2}^2 ds. \quad (22)$$

Assim, se fixarmos  $\epsilon$  tal que  $C - \epsilon^2 > 0$  e considerarmos o sistema isolado, isto é, não consideremos no sistema a fonte  $f$ , concluimos que

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}.$$

Outra consequência de (22) é a estabilidade relativamente a perturbações da condição inicial. Mais ainda, o problema variacional tem quando muito uma solução.

**Teorema 2.3** *Se, para cada  $t \in (0, T]$ , o problema variacional (18) tem solução  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega)$ , então tal solução é única.  
A solução é estável relativamente a perturbações da condição inicial.* ■

### 2.2.2 Aproximação de Ritz-Galerkin

Consideremos, em (18),  $H_0^1(\Omega)$  substituído por um subespaço de dimensão finita  $V_h$ . Seja  $u_{0,h}$  uma aproximação de  $u_0$  em  $V_h$  e definamos, tal como no exemplo introdutório, a aproximação de Ritz-Galerkin  $u_h(x, t)$  para a solução do problema variacional em estudo, solução do problema variacional

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h\right) + a(u_h(t), v_h) = (f, v_h), \forall v_h \in V_h, \forall t > 0, u_h(0) = u_{0,h}. \quad (23)$$

As propriedades qualitativas da aproximação de Ritz-Galerkin são análogas às propriedades da solução do problema variacional que aproxima. De facto, é fácil estabelecer

$$\|u_h(t)\|_{L^2} \leq e^{-Ct} \|u_h(0)\|_{L^2} + \int_0^t e^{C(s-t)} \|f\|_{L^2} ds, t \geq 0,$$

em que  $C$  representa uma constante positiva independente de  $h$  e  $u$ .

Da desigualdade anterior concluímos a estabilidade da aproximação de Ritz-Galerkin relativamente à aproximação de  $u_0$  e, além desta propriedade, no caso do sistema ser isolado -  $f = 0$ - concluímos  $\|u_h(t)\|_{L^2} \leq e^{-Ct} \|u_h(0)\|_{L^2}$ . Logo  $\|u_h(t)\|_{L^2} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ .

Fixada uma base  $\{\phi_i, i = 1, \dots, N_h\}$  no espaço  $V_h$ , obtemos, para a determinação dos coeficientes  $\alpha_i(t), i = 1, \dots, N_h$ , da solução de Ritz-Galerkin relativamente à base fixada, o sistema diferencial (7) com as matrizes deste sistema definidas no contexto do problema em estudo.

Se considerarmos  $V_h$  definido a partir de uma partição em elementos finitos em que a base é fixada de modo que cada elemento tenha suporte num número reduzido de elementos finitos, então a solução de Ritz-Galerkin, denominada neste caso solução de elementos finitos, é mais facilmente determinada pois as matrizes do sistema diferencial ordinário são matrizes com estrutura de banda.

O estudo das propriedades quantitativas da aproximação de Ritz-Galerkin- estudo do erro desta aproximação - é feito seguindo os passos considerados no caso unidimensional. Assim, sejam  $\tilde{u}_h(t) \in V_h$  a solução da equação variacional

$$a(\tilde{u}_h(t), v_h) = (f, v_h) - \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_h\right), v_h \in V_h, \quad (24)$$

e

$$\rho_h(t) = \tilde{u}_h(t) - u(t), \theta_h(t) = u_h(t) - \tilde{u}_h(t).$$

A função  $\theta_h(t)$  verifica

$$\left(\frac{\partial \theta_h}{\partial t}, \theta_h(t)\right) + a(\theta_h(t), \theta_h(t)) = -\left(\frac{\partial \rho_h}{\partial t}, \theta_h(t)\right),$$

e, para esta função, vale a seguinte estimativa

$$\|\theta_h(t)\|_{L^2} \leq e^{-Ct} \|\theta_h(0)\|_{L^2} + \int_0^t e^{C(s-t)} \left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2} ds. \quad (25)$$

De (25) e atendendo a que  $u_h(t) - u(t) = \theta_h(t) + \rho_h(t)$ , estabelecemos finalmente a seguinte estimativa

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leq \|\rho_h(t)\|_{L^2} + e^{-Ct}\|u_{0,h} - u_0\|_{L^2} + \int_0^t e^{C(s-t)} \left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2} ds. \quad (26)$$

Podemos particularizar a estimativa anterior para certas equações parabólicas definidas num domínio poligonal de  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos uma triangulação  $\mathcal{T}_h$  admissível para  $\Omega$  e tal que os triângulos têm as medidas de amplitude dos ângulos internos limitadas inferiormente por uma constante positiva e os lado de medida de comprimento inferior a  $h$ . Seja  $V_h$  o espaço das funções segmentadas lineares definidas a partir de  $\mathcal{T}_h$  e que são nulas na fronteira  $\partial\Omega$ . Neste contexto são conhecidas as estimativas para  $\|\rho_h\|_{L^2}$  e para  $\left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2}$

$$\|\rho_h(t)\|_{L^2} \leq Ch^2\|u(t)\|_{H^2}, \quad \left\| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \right\|_{L^2} \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^2}, \quad (27)$$

desde que  $u(t), \frac{\partial u}{\partial t} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . De (26) e (27) concluímos

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leq Ch^2\|u(t)\|_{H^2} + e^{-Ct}\|u_{0,h} - u_0\|_{L^2} + Ch^2 \int_0^t e^{C(s-t)} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^2} ds.$$

Provamos o seguinte resultado:

**Teorema 2.4** *Consideremos o problema (15) definido num domínio poligonal limitado de  $\mathbb{R}^2$ . Admitamos que as funções coeficiente satisfazem (16) e (17).*

*Seja, para cada  $t \in (0, T]$ ,  $u(t)$  a solução do problema variacional*

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u(t), v) = (f, v), \quad v \in H_0^1(0, a),$$

*em que  $a(\cdot, \cdot)$  é definida por (19), e seja  $u_h(t)$  a sua aproximação de elementos finitos em  $V_h$  definida por*

$$\left( \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right) + a(u_h(t), v_h) = (f, v_h), \quad v_h \in V_h,$$

$$u_h(0) = u_{0,h} \in V_h,$$

*em que  $V_h$  é o espaço das funções segmentadas lineares definidas a partir de uma triangulação  $\mathcal{T}_h$ , admissível para  $\Omega$  e tal que os ângulos internos dos triângulos têm medidas de amplitude limitadas inferiormente por  $\alpha_0 > 0$  e as medidas do comprimento dos seus lados limitadas superiormente por  $h$ .*

*Se  $\frac{\partial u}{\partial t} \in H_0^2(\Omega)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, a)$ , então*

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)} + e^{-C_e t}\|u_0 - u_{0,h}\|_{L^2} + Ch^2 \int_0^t e^{C_e(s-t)} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^2(\Omega)} ds,$$

*em que  $C$  é uma constante independente de  $h$  e de  $u$ .* ■

### 2.2.3 Aproximação de Ritz-Galerkin discreta

A integração do sistema diferencial ordinário estabelecido para a solução de Ritz-Galerkin pode ser feita a partir do sistema das coordenadas desta aproximação ou, equivalentemente, a partir de (23). Consideramos seguidamente uma discretização da derivada temporal que vai induzir processos numéricos discretos no tempo. Seja  $u_h^m$ , em  $V_h$ , a aproximação de  $u_h(t_m)$  definida por

$$\left(\frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\Delta t}, v_h\right) = -a(u_h^m, v_h) + (f, v_h), \forall v_h \in V_h, m = 1, \dots, M, \quad (28)$$

em que  $M\Delta t = T$ . O método anterior é conhecido por método de Euler implícito. Pretendemos que a solução  $u_h^m$  seja tal que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \|u_h^m - u(t_m)\| = 0, \quad (29)$$

Com o objectivo de estudar o erro anterior, observamos que atendendo à seguinte desigualdade

$$\|u_h^m - u(t_m)\| \leq \|u_h^m - u_h(t_m)\| + \|u_h(t_m) - u(t_m)\|, \quad (30)$$

é suficiente estudar o comportamento de  $\|u_h^m - u_h(t_m)\|$  pois que a segunda parcela do majorante da desigualdade anterior foi já anteriormente estudada.

Seja  $e_h^m := u_h^m - u_h(t_m)$ . Este erro verifica

$$\left(\frac{e_h^m - e_h^{m-1}}{\Delta t}, v_h\right) + a(e_h^m, v_h) = (T_h^m, v_h), \forall v_h \in V_h, m = 1, \dots, M. \quad (31)$$

em que

$$T_h^m = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(t^*), t^* \in (t_{m-1}, t_m).$$

De (31), com  $v_h = e_h^m$ , vem

$$\|e_h^m\|_{L^2}^2 + \Delta t a(e_h^m, e_h^m) = (e_h^m, e_h^{m-1}) + \Delta t (T_h^m, e_h^m),$$

e portanto

$$\|e_h^m\|_{L^2}^2 + \Delta t a(e_h^m, e_h^m) \leq \|e_h^m\|_{L^2} \|e_h^{m-1}\|_{L^2} + \Delta t \|T_h^m\|_{L^2} \|e_h^m\|_{L^2}.$$

Atendendo às propriedades de  $a(\cdot, \cdot)$  obtemos ainda

$$\|e_h^m\|_{L^2} (1 + C\Delta t) \leq \|e_h^{m-1}\|_{L^2} + \Delta t \|T_h^m\|_{L^2}, m = 1, \dots \quad (32)$$

Da desigualdade anterior é fácil estabelecer a seguinte fórmula de recorrência

$$\|e_h^m\|_{L^2} \leq \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(1 + C\Delta t)^{j+1}} \|T_h^{j+1}\|_{L^2}, m = 1, \dots, \quad (33)$$

a partir da qual sai de imediato

$$\|e_h^m\|_{L^2} \leq T \frac{1 - \frac{1}{(1+C\Delta t)^m}}{1 - \frac{1}{(1+C\Delta t)}} \max_{j=0,\dots,m} \|T_h^j\|_{L^2}, m = 1, \dots, \quad (34)$$

A estimativa (34), na hipótese de  $u_h(t)$  ter segunda derivada em relação a  $t$  limitada, permite inferir

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|e_h^m\|_{L^2} = 0, \quad (35)$$

e portanto, se tivermos a convergência

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h(t_m) - u(t_m)\|_{L^2} = 0, \forall m,$$

concluimos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \max_{m=1,\dots,M} \|u_h^m - u(t_m)\|_{L^2} = 0.$$

Estudamos seguidamente as propriedades do erro  $e_h^m$  não fazendo uso de  $u_h(t_m)$  pois foi exigida a convergência  $\lim_{h \rightarrow 0} u_h(t) = u(t)$ .

Seja  $\tilde{u}_h^m$  a solução da igualdade variacional (24) com  $t = t_m$ . Atendendo a que

$$u_h^m - u(t_m) = u_h^m - \tilde{u}_h^m + \tilde{u}_h^m - u(t_m) := \theta_h^m + \rho_h^m, \quad (36)$$

uma estimativa para  $e_h^m$  obtem-se estimando separadamente as duas parcelas  $\theta_h^m$  e  $\rho_h^m$ .

Uma estimativa para  $\rho_h^m$  pode ser estabelecida atendendo às propriedades do método de Ritz-Galerkin quando considerado para a equações elípticas. Relativamente a  $\theta_h^m$  notamos que seguindo os passos aquando do estabelecimento da estimativa para  $\theta_h(t)$ , se pode estabelecer facilmente

$$(D_{-t}\theta_h^m, \theta_h^m) + a(\theta_h^m, \theta_h^m) = (D_{-t}u(t_m) - D_{-t}\tilde{u}_h^m, \theta_h^m) \quad (37)$$

em que  $D_{-t}$  denota o operador de diferenças backward. Da identidade (37) obtemos a desigualdade

$$\|\theta_h^m\|_{L^2} (1 + C\Delta t) \leq \|\theta_h^{m-1}\|_{L^2} + \Delta t \|D_{-t}u(t_m) - D_{-t}\tilde{u}_h^m\|_{L^2}, \quad (38)$$

e, deste modo, deduzimos

$$\|\theta_h^m\|_{L^2} \leq \frac{1}{(1 + C\Delta t)^m} \|\theta_h^0\|_{L^2} + \Delta t \sum_{j=1}^m \frac{1}{(1 + C\Delta t)^{m-j}} \|D_{-t}u(t_j) - D_{-t}\tilde{u}_h^j\|_{L^2}. \quad (39)$$

Finalmente, conjugando (36) com (39) obtemos a estimativa

$$\|u_h^m - u(t_m)\|_{L^2} \leq \|\rho_h^m\|_{L^2} + \frac{1}{(1 + C\Delta t)^m} \|\theta_h^0\|_{L^2} + \Delta t \sum_{j=1}^m \frac{1}{(1 + C\Delta t)^{m-j}} \|D_{-t}u(t_j) - D_{-t}\tilde{u}_h^j\|_{L^2}. \quad (40)$$

Notemos que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t_m) - D_{-t}\tilde{u}_h^m \right\|_{L^2} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t_m) - D_{-t}u(t_m) \right\|_{L^2} + \|D_{-t}\rho_h^m\|_{L^2},$$

em que para  $\|D_{-t}\rho_h^m\|_{L^2}$  pode ser determinada uma estimativa.

Por exemplo, no caso de  $n = 2$ , e com  $V_h$  sendo o espaço das funções segmentadas lineares nulas em  $\partial\Omega$  e definido a partir de uma triangulação com as restrições de regularidade já referidas, tem-se

$$\|D_{-t}\rho_h^m\|_{L^2} \leq Ch^2 \|D_{-t}u(t_m)\|_H^2 \leq C \frac{h^2}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^2} ds.$$

Por outro lado, temos

$$\|D_{-t}u(t_m) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_m)\|_{L^2} \leq \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} (s - t_m) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds \right\|_{L^2} \leq \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2} ds.$$

Conjugando as estimativas anteriores e (40) estabelecemos para a aproximação obtida a partir do método de Euler implícito e do método de elementos finitos segmentada linear, a seguinte estimativa para o erro

$$\begin{aligned} \|u_h^m - u(t_m)\|_{L^2} &\leq Ch^2 \|u(t_m)\|_{H^2(\Omega)} + \frac{1}{(1 + C\Delta t)^m} \|u_0 - u_{0,h}\|_{L^2} \\ &+ Ch^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{(1 + C\Delta t)^{m-j}} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^2(\Omega)} ds + \Delta t \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)} ds \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Um outro método com boas propriedades de convergência obtém-se integrando o problema diferencial que define a aproximação de Ritz-Galerkin com o método de Crank- Nicholson:

$$\left( \frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\Delta t}, v_h \right) = -a \left( \frac{u_h^m + u_h^{m-1}}{2}, v_h \right) + (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, m = 1, \dots, M. \quad (42)$$

## 3 Métodos de diferenças finitas

### 3.1 Os métodos

Uma abordagem muito comum na construção de métodos numéricos para problemas de evolução é a semi-discretização seguida de integração temporal.

Consideremos o problema de evolução

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \text{ em } \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (43)$$



em que  $\Omega$ , como anteriormente denota um conjunto aberto limitado ( ou não ) de  $\mathbb{R}^n$  de fronteira  $\partial\Omega$ , e  $L$  é um operador envolvendo apenas derivadas relativamente às componentes de  $x$ . Se  $\Omega$  é limitado ou é "semi-infinito", então o problema diferencial anterior é complementado com a condição de fronteira

$$B_\eta u = g \text{ em } \partial\Omega \times (0, T] \quad (44)$$

em que  $B_\eta$  denota o operador que define as condições de Dirichlet, Neumann ou Robin.

Em  $\bar{\Omega}$  definamos a rede espacial  $\bar{\Omega}_H$  e seja  $L_H$  e  $B_{\eta,H}$  os operadores de diferenças obtidos por discretização das derivadas parciais que figuram nos correspondentes operadores contínuos. Seja, para cada  $t \in [0, T]$ ,  $u_H(t)$  uma função em  $W_H(\bar{\Omega}_H)$  definida pelo seguinte problema com condição inicial

$$\begin{cases} \frac{du_H}{dt}(x, t) = L_H u_H(x, t) + f_H(x, t), & (x, t) \in \Omega_H \times (0, T] \\ u_H(x, 0) = u_{0,H}(x), & x \in \Omega_H \end{cases} \quad (45)$$

em que  $f_H$  representa discretização da correspondente função definida em  $\Omega$ . Observamos que se  $\Omega$  é limitado ou "semi-infinito", então o sistema diferencial anterior é complementado com a condição de fronteira

$$B_{\eta,H} u(x, t) = g_H(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega_H \times (0, T] \quad (46)$$

em que  $\partial\Omega_H = \Omega \cap \bar{\Omega}_H$ , e  $g_H$  denota uma discretização de  $g$ .

O sistema diferencial ordinário (45) ou (45), (46), pode ser reescrito de modo único

$$u'_H(t) = F_H(t, u_H(t)) + f_H, \quad t > 0, \quad u_h(0) = g_h \quad (47)$$

que  $u_h(t)$  é o vector com número de componentes igual ao número de nodos interiores. O problema de condição inicial (47) pode ser integrado com um método numérico para problemas diferenciais ordinários: Euler explícito, Euler implícito, Taylor, Crank-Nicolson, Runge-Kutta, ou outro qualquer método para este tipo de problemas.

O método de diferenças finitas obtido por aplicação do integrador temporal no sistema diferencial ordinário é pois encarado como a conjugação entre o método de semi-discretização e o método de integração temporal.

**Exemplo 3.1** A equação de convecção-difusão-reacção

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u), \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (48)$$

pode, como sabemos, estar definida em  $\Omega = \mathbb{R}$  ou  $\Omega = (a, +\infty)$  ou em  $(a, b)$ . Definamos em  $\bar{\Omega}$  a rede  $\bar{\Omega}_h$  e façamos a discretização das derivadas de primeira ordem por um operador  $D_1$  que pode denotar o operador "backward", "forward" ou centrado, e a de segunda ordem pelo operador centrado de segunda ordem  $D_2$ . Se o  $\Omega$  é semi-infinito ou um intervalo limitado então a condição de fronteira deve também ser discretizada. Seja  $u_h(x, t)$ ,  $x \in \bar{\Omega}_h$ ,

$t \geq 0$ , a aproximação obtida pelo processo anterior, isto é, a solução do sistema diferencial ordinário

$$\begin{cases} u'_i(t) = \alpha D_1 u_i(t) + \beta D_2 u_i(t) + f(x_i, t, u_i(t)), i \in I, t > 0 \\ u_i(0) = u_0(x_i, 0), i \in I \end{cases} \quad (49)$$

Se  $\Omega = \mathbb{R}$  então  $I = \mathbb{Z}$ , e se  $\Omega = (a, +\infty)$ , então  $I = \mathbb{N}$ . Se  $\Omega = (a, b)$  consideramos  $I = \{1, \dots, n\}$ . Neste último caso o sistema diferencial anterior é complementado com condição de fronteira

1. Dirichlet:  $u_0(t) = u(a, t)$ ,  $u_n(t) = u(b, t)$ ,  $t > 0$ ,
2. Neumann :  $-D_x u(a, t) = g(a, t)$ ,  $D_{-x} u(b, t) = g(b, t)$ ,  $t > 0$ ,
3. Robin :  $\alpha_0 u(a, t) - \beta_0 D_{-x} u(a, t) = 0$ ,  $\alpha_1 u(b, t) + \beta_1 D_{-x} u(b, t) = 0$ ,  $t > 0$ .

Consideremos (48) com  $\Omega = (a, b)$ ,  $\alpha > 0$  e condição de Dirichlet para a fronteira. Seja  $h = (b - a)/n$ , e  $\bar{\Omega}_h$  a rede induzida pelo espaçamento anterior. Consideremos  $D_1 = D_{-x}$ . Em  $[0, T]$  introduza-se a rede temporal  $\{t_j, j = 0, \dots, M\}$  com  $t_j - t_{j-1} = \Delta t$ . Integrando o sistema diferencial ordinário assim obtido com o método de Euler explícito obtemos

$$\begin{cases} u_i^{m+1} = (-\alpha \frac{\Delta t}{h} + \beta \frac{\Delta t}{h^2}) u_{i-1}^m + (1 - 2\beta \frac{\Delta t}{h^2} + \alpha \frac{\Delta t}{h}) u_i^m + \beta \frac{\Delta t}{h^2} u_{i+1}^m + \Delta t f(x_i, t^m, u_i^m), \\ \quad i = 1, \dots, n-1, m = 1, \dots, M-1 \\ u_0^j = u(a, t_j), u_n^j = u(b, t_j) j = 1, \dots, M \\ u_i^0 = u_0(x_i), i = 0, \dots, n. \end{cases} \quad (50)$$

Se  $\alpha < 0$  e considerando  $D_1 = D_x$  obtemos

$$\begin{cases} u_i^{m+1} = \beta \frac{\Delta t}{h^2} u_{i-1}^m + (1 + 2\beta \frac{\Delta t}{h^2} - \alpha \frac{\Delta t}{h}) u_i^m + (\alpha \frac{\Delta t}{h} + \beta \frac{\Delta t}{h^2}) u_{i+1}^m + \Delta t f(x_i, t^m, u_i^m), \\ \quad i = 1, \dots, n-1, m = 1, \dots, M-1 \\ u_0^j = u(a, t_j), u_n^j = u(b, t_j) j = 1, \dots, M \\ u_i^0 = u_0(x_i), i = 0, \dots, n \end{cases} \quad (51)$$

Se utilizarmos o método de Euler implícito, obtemos em substituição de (50) o seguinte esquema discreto

$$\begin{cases} (\alpha \frac{\Delta t}{h} - \beta \frac{\Delta t}{h^2}) u_{i-1}^{m+1} + (1 - \alpha \frac{\Delta t}{h} + 2\beta \frac{\Delta t}{h^2}) u_i^{m+1} - \beta \frac{\Delta t}{h^2} u_{i+1}^{m+1} - \Delta t f(x_i, t^{m+1}, u_i^{m+1}) = u_i^m, \\ \quad i = 1, \dots, n-1, m = 0, \dots, M-1 \\ u_0^j = u(a, t_j), u_n^j = u(b, t_j) j = 1, \dots, M \\ u_i^0 = u_0(x_i), i = 0, \dots, n \end{cases} \quad (52)$$

**Exemplo 3.2** Consideremos o problema de condições iniciais envolvendo a equação da onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (53)$$

Consideremos em  $\mathbb{R}$  a rede de espaçamento  $h$ . Efectuemos a discretização da derivada de segunda ordem em relação à variável espacial, utilizando o operador de diferenças centradas de segunda ordem. Obtemos

$$\begin{cases} u_i''(t) = D_2 u_i(t), i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}^+ \\ u_i'(0) = g(x_i), i \in \mathbb{Z} \\ u_i(0) = u_0(x_i), i \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (54)$$

O sistema diferencial anterior pode agora ser discretizado utilizando fórmulas de aproximação para a segunda derivada. No entanto, outra abordagem consiste em considerar a mudança de variável

$$v_{1,i}(t) = u_i(t), v_{2,i}(t) = u_i'(t)$$

que conduz ao sistema diferencial de primeira ordem

$$\begin{cases} v_{1,i}'(t) = v_{2,i}(t) \\ v_{2,i}'(t) = D_2 v_{1,i}(t), i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

com a condição inicial

$$\begin{cases} v_{1,i}(0) = u_0(x_i) \\ v_{2,i}(0) = g(x_i), i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Este problema diferencial é discretizado utilizando métodos para problemas de primeira ordem com condição inicial

A abordagem anterior é bastante comum pois tira partido do software já construído para sistemas diferenciais ordinários.

Na construção dos métodos anteriores, a fase que nos parece merecer razoável atenção é a fase de semi-discretização pois podemos considerar na integração temporal um método bastante eficiente. Veremos posteriormente qual a influência do erro cometido na semi-discretização no erro total.

Uma outra forma de obter métodos de diferenças finitas é o método de volumes finitos. Nesta abordagem, a equação diferencial é integrada sobre uma célula genérica e, por integração, a solução a determinar ou as suas derivadas surgem calculadas na fronteira da dita célula. Por discretização das derivadas parciais e por utilização de fórmulas de quadratura, se necessário, é estabelecido o método de diferenças finitas.

## 3.2 Propriedades qualitativas e quantitativas

### 3.2.1 Convergência

Consideremos o esquema numérico

$$\begin{cases} u_h^{m+1} = L_{h,\Delta t}u_h^m + f_h^m, m = 0, \dots, M-1, \\ u_h^0 = q_h \end{cases} \quad (55)$$

na construção de uma aproximação para a solução do problema diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \text{ em } \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (56)$$

que no caso do domínio ser limitado ou semi-infinito, é complementado com condição de fronteira de um dos tipos já referidos.

**Definição 3.1** *O método de diferenças (55) diz-se convergente se, para todo  $t \in (0, T]$ , se tem*

$$\lim_{m\Delta t \rightarrow t, h \rightarrow 0} \|u_h^m - R_h u(t)\|_h = 0$$

com  $\Delta t \rightarrow 0, m \rightarrow +\infty$ , em que  $u_h^m$  é definido por (55) e  $u$  é solução de (56).

Na definição anterior e como anteriormente  $\|\cdot\|_h$  denota uma norma no espaço das funções de rede definidas em  $\Omega_h$  e  $R_h$  um operador de restrição.

Seja

$$E(x_i, t_m) = u_i^m - u(x_i, t_m), x_i \in \Omega_h, m = 1, \dots, M, \quad E_h^m = (E(x_i, t_m)).$$

Notemos que

$$\|u_h^m - R_h u(t)\|_h \leq \|E_h^m\|_h + \|u(t_m) - R_h u(t)\|_h$$

em que

$$\|u(t_m) - R_h u(t)\|_h \rightarrow 0, m\Delta t \rightarrow t, h \rightarrow 0$$

sob condições de regularidade para  $u$  (continuidade é suficiente). Logo, se

$$\|E_h^m\|_h \rightarrow 0, m\Delta t = t_m, \Delta t \rightarrow 0, h \rightarrow 0, \quad (57)$$

concluimos que o método é convergente. Atendendo a este facto, é comum apresentar a definição de método convergente como sendo aquele em que é válido (57).

Notemos que o erro  $E_h^m$  pode ser reescrito na forma

$$E_h^m = u_h^m - u_h(t_m) + u_h(t_m) - u(t_m) \quad (58)$$

em que  $u_h(t)$  denota a aproximação semi-discreta .

Atendendo à decomposição anterior é relevante a influência do erro provocado pela discretização espacial no erro total pois que se utilizarmos um integrador temporal de ordem elevada, o erro de semi-discretização pode ser dominante.

Atendendo às considerações anteriores começamos por estudar as propriedades da aproximação semi-discreta  $u_h'(t)$  definida por (47).

### 3.2.2 A aproximação semi-discreta-convergência

Consideremos o problema de condição inicial (47).

Suponhamos que  $F_h$  é tal que existe  $C_0 > 0$  que verifica

$$- \langle F_h(t, v_h) - F_h(t, w_h), v_h - w_h \rangle_{L^2} \geq C_0 \|v_h - w_h\|_{L^2}^2 \quad (59)$$

para todas as funções de rede definidas num espaço adequado. Por aplicação da técnica já utilizada quando estudámos a aproximação semi-discreta definida a partir do método de Ritz-Galerkin, podemos provar o seguinte resultado:

**Teorema 3.1** *Seja  $u_h(t)$  a solução de (47). Se  $F_h$  satisfaz (59) então*

$$\|u_h(t)\|_{L^2} \leq e^{-C_0 t} \|g_h\|_{L^2} + \int_0^t e^{C_0(-t+s)} \|f_h\|_{L^2} ds.$$

■

O resultado anterior permite inferir que qualitativamente a aproximação semi-discreta apresenta o mesmo comportamento que a solução da equação parabólica que a aproxima.

**Exemplo 3.3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , um cubo com uma fonte de calor interior  $f$ . A evolução da temperatura  $u$  no corpo quando a fronteira do corpo é mantida a zero graus, é descrita pelo seguinte problema de condições inicial e de fronteira*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \text{ em } \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) = g(x), \quad x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (60)$$

Seja  $u_h(t)$  a aproximação semi-discreta definida discretizando o operador de Laplace pela sua versão  $\Delta_h$ , e que é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} u_h'(t) = \Delta_h u_h(t) + f_h \text{ em } \Omega_h \times (0, T] \\ u_h(0) = g_h \\ u_h(t) = 0, \quad x \in \partial\Omega_h \times (0, T] \end{cases} \quad (61)$$

A aproximação semi-discreta satisfaz

$$\|u_h(t)\|_{L^2} \leq e^{-C_0 t} \|g_h\|_{L^2} + \int_0^t e^{C_0(-t+s)} \|f_h\|_{L^2} ds,$$

em que  $C_0$  depende apenas de  $\Omega$ .

Estudamos agora o "grau" de proximidade entre  $u(t)$  e a sua aproximação semi-discreta.

No problema (47) com  $f_h = R_h f$ ,  $g_h = R_h g$ , substitua-se a aproximação semi-discreta  $u_h(t)$  pela correspondente solução do problema diferencial que se pretende aproximar. Obtemos

$$u'(t) = F_h(t, u(t)) + f + T_h(t), t > 0, u(0) = g(0) \quad (62)$$

em que  $T_h(t)$  denota - função de rede - o vector cujas componentes estão associadas à discretização das derivadas espaciais. Seja  $E_h(t) = u_h(t) - u(t)$  o erro da aproximação semi-discreta. Para este erro é fácil estabelecer

$$E_h'(t) = F_h(t, u_h(t)) - F(t, u(t)) + T_h(t), E_h(0) = 0, \quad (63)$$

e conseqüentemente o seguinte resultado:

**Teorema 3.2** *Se  $F_h$  satisfaz (59), então o erro de semi-discretização  $E_h(t)$  satisfaz*

$$\|E_h(t)\|_{L^2} \leq \int_0^t e^{C_0(-t+s)} \|T_h\|_{L^2} ds.$$

■

**Exemplo 3.4** No contexto do Exemplo 3.3 tem-se

$$\|E_h(t)\|_{L^2} \leq CT h^2.$$

### 3.2.3 Consistência

O estudo anterior permite estimar uma parte do erro da solução obtida pelo método de diferenças finitas pois, como referimos anteriormente, o método pode ser obtido conjugando uma discretização espacial com um integrador temporal de ordem elevada.

Consideremos a aproximação de diferenças finitas  $u_h^m$ . Atendendo à decomposição do erro  $E_h^m$ , concluímos de imediato

$$\|E_h^m\|_{L^2} \leq \int_0^{t_m} e^{C_0(s-t_m)} \|T_h(s)\|_{L^2} ds + \|u_h^m - u_h(t_m)\|_{L^2} \quad (64)$$

sendo a última parcela estimada a partir dos resultados de convergência para os métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias.

Observamos que para concluir a convergência utilizando a abordagem anterior temos que estabelecer que o erro  $\|u_h(t_m) - u(t_m)\|_{L^2}$  que depende de  $\Delta t$  e de  $h$  converge para zero com  $\Delta t$ . Para o efeito são fundamentais resultados que estabelecem o comportamento das soluções de problemas de condição inicial dependentes de parâmetros.

Um modo de estudar a convergência dos métodos de diferenças finitas consiste em estabelecer uma equação para o erro  $E_i^m$  e estudar directamente a solução desta equação. Consideremos no esquema numérico  $u_i^m$  substituído por  $u(x_i, t_m)$ . Obtemos a igualdade

$$u(x_i, t_{m+1}) = L_{h, \Delta t} u(x_i, t_m) + f_h^m + \Delta t T_h(x_i, t_m) \quad (65)$$

em que  $T_h$  denota o erro de truncatura cuja expressão é estabelecida por aplicação da fórmula de Taylor.

Logo, para o erro  $E_i^{m+1}$  obtemos a seguinte equação

$$E_i^{m+1} = L_{h,\Delta t} E_i^m + \Delta t T_h(x_i, t_m) \quad (66)$$

chamada equação de erro. A  $T_h$  chamamos erro de truncatura.

**Definição 3.2** *O método de diferenças (55) diz-se consistente com o problema diferencial (43) se*

$$\|T_h(t_m)\|_h \rightarrow 0, h, \Delta t \rightarrow 0.$$

Se  $\|T_h(t_m)\|_h = O(\Delta t^{q+1}, h^p)$  para todo  $m$ , então o método diz-se com ordem de consistência  $(p, q)$ . Se  $\|E_h^m\|_h = O(h^\eta, \Delta t^\mu)$ , então o método diz-se convergente com ordem de convergência  $(\eta, \mu)$ .

A partir de (66) podemos estimar  $\|E_h^m\|_h$  e estudar o comportamento deste erro de modo a estabelecer a convergência do método apresentado.

Apresentamos seguidamente alguns exemplos onde a equação do erro permite concluir a convergência do método de diferenças.

**Exemplo 3.5** Retomemos o Exemplo 3.1 e tomemos  $\alpha = 0, f = 0, \beta = 1$  e  $\Omega = \mathbb{R}$ . Neste caso e para o método de Euler explícito, obtemos a seguinte equação de erro

$$E_i^{m+1} = (1 - 2r)E_i^m + r(E_{i-1}^m + E_{i+1}^m) + \Delta t T_i^m, i \in \mathbb{Z}, \quad (67)$$

em que  $r = \frac{\Delta t}{h^2}$ , e o erro de truncatura tem a seguinte expressão

$$T_h(x_i, t_m) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_m) - \frac{h^2}{24} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_{i_1}, t_m) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_{i_2}, t_m) \right).$$

Consideremos a norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Obtemos a seguinte desigualdade

$$\|E_h^{m+1}\|_\infty \leq |1 - 2r| \|E_h^m\|_\infty + 2r \|E_h^m\|_\infty + \Delta t \|T_h^m\|_\infty.$$

Se  $\Delta t$  e  $h$  são tais que

$$r \leq \frac{1}{2} \quad (68)$$

concluimos

$$\|E_h^{m+1}\|_\infty \leq \|E_h^m\|_\infty + \Delta t O(\Delta t + h^2),$$

e portanto, vem finalmente

$$\|E_h^m\|_\infty \leq C(\Delta t + h^2).$$

A condição (68) desempenha um papel central no estabelecimento da convergência do método em estudo. O cociente considerado é chamado número de Reynolds.

Se  $\Omega = (a, b)$  e consideramos condição de Dirichlet, a equação (67) é definida para  $i = 1, \dots, n - 1$ , e é complementada por

$$E_0^j = E_n^j = 0, \forall j, E_i^0 = 0, i = 1, \dots, n - 1,$$

e a convergência é estabelecida desde que se assuma a condição (68).

Suponhamos agora a condição de fronteira de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ para } x = a, b, t > 0.$$

Se efecturarmos a discretização das condições interiores utilizando operadores "forward" e "backward" respetivamente, obtemos

$$\begin{cases} u_i^{m+1} = (1 - 2r)u_i^m + r(u_{i-1}^m + u_{i+1}^m), i = 2, \dots, n - 2 \\ u_i^{m+1} = (1 - r)u_1^m + ru_i^m, i = 1, n - 1 \\ u_i^0 = g(x_i), \forall i \end{cases} \quad m = 0, \dots, M - 1 \quad (69)$$

Sob a condição já considerada para o número de Reynolds, facilmente estabelecemos a convergência do método (69).

O conceito de erro de truncatura foi dado para métodos (55). Notamos que se o método é implícito, então ele toma a forma

$$L_{h,\Delta t}^{(i)} u_h^{m+1} = L_{h,\Delta t}^{(e)} u_h^m.$$

Assim, ao substituírmos  $u_h^m$  por  $u(t_m)$ , utilizando a fórmula de Taylor e atendendo a que  $u$  é solução de um determinado problema de evolução, obtemos

$$L_{h,\Delta t}^{(i)} u(t_{m+1}) = L_{h,\Delta t}^{(e)} u(t_m) + \Delta t \tilde{T}_h(t_m),$$

e portanto

$$u(t_{m+1}) = (L_{h,\Delta t}^{(i)})^{-1} L_{h,\Delta t}^{(e)} u(t_m) + \Delta t (L_{h,\Delta t}^{(i)})^{-1} \tilde{T}_h(t_m).$$

Concluimos, deste modo, que

$$T_h(t_m) = (L_{h,\Delta t}^{(i)})^{-1} \tilde{T}_h(t_m),$$

isto é,

$$L_{h,\Delta t}^{(i)} T_h(t_m) = \tilde{T}_h(t_m).$$

Atendendo à igualdade anterior, uma estimativa para  $\|T_h(t_m)\|_h$  é obtida atendendo a que é suficiente mostrar que

$$\|L_{h,\Delta t}^{(i)} v_h\|_h \geq C \|v_h\|_h.$$



**Exemplo 3.6** Consideremos o esquema de diferenças

$$\begin{cases} -ru_{j-1}^{m+1} + (1+2r)u_j^{m+1} - ru_{j+1}^{m+1} = u_j^m, j = 2, \dots, n-2 \\ (1+2r)u_1^{m+1} - ru_2^{m+1} = u_1^m \\ -ru_{n-2}^{m+1} + (1+2r)u_{n-1}^{m+1} = u_{n-1}^m \\ u_j^0 = u_{0,h}(x_j), j = 0, \dots, n \end{cases} \quad (70)$$

em que  $m = 0, \dots, M-1$ ,  $M\Delta t = T$ ,  $r = \beta\Delta t/h^2$ , utilizado para construir uma aproximação para a equação do calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } (a, b) \times (0, T] \\ u(a, t) = u(b, t) = 0, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in (a, b). \end{cases} \quad (71)$$

Tem-se  $\|\tilde{T}_h(t_m)\|_{L^2} = O(\Delta t) + O(h^2)$  e por outro lado os valor próprios de  $L_{h,\Delta t}^{(i)}$  são dados por

$$\lambda_j = 1 + 4r \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi h}{2}\right)$$

(os valores próprios de uma matriz tridiagonal de ordem  $n$ , de linhas diagonais de entradas : diagonal principal  $b$ , diagonal superior  $c$ , diagonal inferior  $a$  -  $\lambda_j = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}}\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$ , e portanto, atendendo a que  $L_{h,\Delta t}^{(i)}$  é simétrico,

$$\|(L_{h,\Delta t}^{(i)})^{-1}\|_{L^2} = \frac{1}{\min\{1 + 4r \operatorname{sen}^2(\frac{j\pi h}{2})\}} \leq 1.$$

Assim concluímos

$$\|T_h(t_m)\|_{L^2} \leq \|\tilde{T}_h(t_m)\|_{L^2} = O(\Delta t) + O(h^2).$$

Estudamos agora a convergência do método implícito. Temos

$$L_{h,\Delta t}^{(i)} E_h^{m+1} = E_h^m + \Delta t \tilde{T}_h(t_m),$$

e portanto

$$\|E_h^{m+1}\|_{L^2} \leq \|E_h^m\|_{L^2} + \Delta t \|\tilde{T}_h\|_{L^2}.$$

Da desigualdade anterior vem finalmente

$$\|E_h^{m+1}\|_{L^2} \leq \|u_0 - u_{0,h}\|_{L^2} + TO(\Delta t + h^2).$$

Logo, se a aproximação inicial for discretizada de modo conveniente, concluímos a convergência do esquema (71).

### 3.2.4 Estabilidade

A estabilidade do esquema de diferenças é um conceito que diz respeito à sensibilidade relativamente a perturbações da condição inicial.

**Definição 3.3** *O método  $u_h^{m+1} = L_{h,\Delta t} u_h^m$  diz-se estável se, para  $\Delta t$  e  $h$  suficientemente pequenos, existe  $K > 0$  e  $\beta$  tais que*

$$\|u_h^{m+1}\|_h \leq K e^{\beta(m+1)\Delta t} \|u_h^0\|_h \quad (72)$$

Na definição anterior permitimos que a perturbação na condição inicial tenha um crescimento a menos de uma exponencial. Se  $\beta = 0$  e  $k \leq 1$ , então a perturbação da condição inicial não se propaga no tempo.

A análise da estabilidade é feita considerando o operador  $L_{h,\Delta t}$ .

**Teorema 3.3** *O método  $u_h^{m+1} = L_{h,\Delta t} u_h^m$  é estável se e só se*

$$\|L_{h,\Delta t}^{m+1}\|_h \leq K e^{\beta(m+1)\Delta t}$$

para constantes  $K > 0, \beta$ .

**Demonstração:** Se o método é estável, então  $\|L_{h,\Delta t}^{m+1} v_h\|_h \leq K e^{\beta(m+1)\Delta t} \|v_h\|_h$ . Logo

$$\|L_{h,\Delta t}^{m+1}\|_h = \sup_{v_h \neq 0} \frac{\|L_{h,\Delta t}^{m+1} v_h\|_h}{\|v_h\|_h} \leq K e^{\beta(m+1)\Delta t}.$$

Reciprocamente,

$$\begin{aligned} \|u_h^{m+1}\|_h &= \|L_{h,\Delta t} u_h^m\|_h = \|L_{h,\Delta t}^2 u_h^{m-1}\|_h = \dots = \|L_{h,\Delta t}^{m+1} u_h^0\|_h \\ &\leq \|L_{h,\Delta t}^{m+1}\|_h \|u_h^0\|_h \\ &\leq K e^{\beta(m+1)\Delta t} \|u_h^0\|_h. \end{aligned}$$

■

**Corolário 3.4** *Se o esquema  $u_h^{m+1} = L_{h,\Delta t} u_h^m$  é tal que*

$$\|L_{h,\Delta t}\|_h \leq 1 + C\Delta t, \quad (73)$$

para alguma constante  $C$  independente de  $h$  e  $\Delta t$ , então o método é estável.

**Demonstração:** Atendendo a que

$$\|L_{h,\Delta t}^{m+1}\|_h \leq (1 + C\Delta t)^{m+1} \leq e^{C(m+1)\Delta t}$$

concluimos de imediato a estabilidade do método em estudo.

■

**Exemplo 3.7** O método

$$\begin{cases} u_j^{m+1} = (1 - 2r)u_j^m + r(u_{j+1}^m + u_{j-1}^m), j = 1, \dots, n - 1 \\ u_n^{m+1} = 0, u_0^{m+1} = 0 \end{cases}$$

é estável relativamente à norma  $\|\cdot\|_\infty$  pois que se  $r \leq 1/2$  então

$$\|u_h^{m+1}\|_\infty \leq \|u_h^m\|_\infty,$$

e portanto

$$\|u_h^{m+1}\|_\infty \leq \|u_h^0\|_\infty.$$

**Exemplo 3.8** O método

$$\begin{cases} (1 + 2r)u_j^{m+1} - r(u_{j+1}^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}) = u_j^m, j = 1, \dots, n - 1 \\ u_n^{m+1} = 0, u_0^{m+1} = 0 \end{cases}$$

é estável relativamente à norma  $\|\cdot\|_2$  pois

$$\|L_{h,\Delta t}\|_2 \leq \frac{1}{\min\{1 + 4r \operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{2n})\}} \leq 1.$$

Se a estabilidade do método é estabelecida impondo uma condição aos espaçamentos envolvidos -  $h, \Delta t$  - dizemos que o método é condicionalmente estável. Se tal propriedade é estabelecida sem qualquer condição sobre os espaçamentos, então dizemos que o método incondicionalmente estável.

Consideremos agora uma equação não homogénea

$$u_h^{m+1} = L_{h,\Delta t}u_h^m + f_h.$$

Seja  $u_h^{m+1}$  a solução determinada utilizando a condição inicial  $u_h^0$  e seja  $\tilde{u}_h^{m+1}$  a solução calculada utilizando a condição inicial  $\tilde{u}_h^0$ . Logo  $u_h^{m+1} - \tilde{u}_h^{m+1}$  é tal que

$$u_h^{m+1} - \tilde{u}_h^{m+1} = L_{h,\Delta t}(u_h^m - \tilde{u}_h^m).$$

Atendendo à igualdade anterior concluímos que a estabilidade do método para uma equação não homogénea é uma consequência imediata da mesma propriedade quando considerada para uma equação homogénea.

Consideramos seguidamente o conceito de estabilidade para um exemplo não linear.

**Exemplo 3.9** Consideremos o método não linear

$$\begin{cases} u_j^{m+1} = (1 - 2r)u_j^m + r(u_{j+1}^m + u_{j-1}^m) + \Delta t f(u_j^{m+1}), j = 1, \dots, n - 1 \\ u_n^{m+1} = 0, u_0^{m+1} = 0 \end{cases}$$

com a condição inicial  $u_i^0$ . Seja  $\tilde{u}_i^0$  uma perturbação da condição inicial e  $\tilde{u}_j^{m+1}$  a aproximação perturbada. Então para a diferença  $w_j^{m+1} = u_j^m - \tilde{u}_j^m$  entre as duas soluções obtemos

$$w_j^{m+1}(1 - \Delta t f'(\theta u_j^{m+1} + (1 - \theta)\tilde{u}_j^{m+1})) = (1 - 2r)w_j^m + r(w_{j+1}^m + w_{j-1}^m).$$

Se  $f' < 0$  e  $r \leq 1/2$  concluímos

$$\|w_h^{m+1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \Delta f'_{min}} \|w_h^m\|_\infty,$$

e portanto temos estabilidade.

Se  $f' > 0$ ,  $r \leq 1/2$  e  $1 - \Delta t f'_{max} > 0$ , então

$$\|w_h^{m+1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \Delta f'_{max}} \|w_h^m\|_\infty \leq \frac{f'_{max}}{1 - \Delta t_0 f'_{max}} \Delta t \|w_h^m\|_\infty,$$

e portanto, nas condições anteriores, o método é estável.

### 3.2.5 O Teorema de Lax

Estabelecemos seguidamente uma condição suficiente para a convergência de um esquema de diferenças finitas a partir da sua estabilidade e consistência.

**Teorema 3.5 Teorema de Lax** *Se o esquema de diferenças*

$$u_h^{m+1} = L_{h,\Delta t} u_h^m + \Delta t f_h$$

*é consistente com ordem  $(p, q)$  e estável, então é convergente e a ordem de convergência é pelo menos  $(p, q)$ .*

**Demonstração:** Seja  $E_h^{m+1}$  o erro global e  $T_h(t_{m+1})$  o correspondente erro de truncatura global. Atendendo a que se tem a igualdade

$$E_h^{m+1} = L_{h,\Delta t} E_h^m + \Delta t T_h(t_{m+1})$$

concluímos

$$E_h^{m+1} = L_{h,\Delta t}^{m+1} E_h^0 + \sum_{j=0}^m L_{h,\Delta t}^j \Delta t T_h(t_{m+1-j}),$$

e portanto

$$\|E_h^{m+1}\|_h \leq \|L_{h,\Delta t}^{m+1}\|_h \|E_h^0\|_h + \sum_{j=0}^m \Delta t \|L_{h,\Delta t}^j\|_h \|T_h(t_{m+1-j})\|_h.$$

Uma vez que método é estável vem ainda

$$\|E_h^{m+1}\|_h \leq K e^{\beta(m+1)\Delta t} \|E_h^0\|_h + K \sum_{j=0}^m \Delta t e^{\beta j \Delta t} \|T_h(t_{m+1-j})\|_h.$$

Se a discretização da condição inicial for tal que  $\|E_h^0\|_h = 0$ , então obtemos

$$\|E_h^{m+1}\|_h \leq C \max_{j=0,\dots,m} \|T_h(t_{m+1-j})\|_h$$

e portanto vem finalmente a convergência com a ordem pretendida.

## Bibliografia

1. P. Ciarlet, The Finite Element Methods for Elliptic Problems, North Holland, 1978
2. D. Euvrard, Résolution Numérique des Équations aux Dérivées Partielles - Différences Finies, Element Finis, Masson, 1988.
3. B. Gustafsson, H-O Kreiss, J. Olinger, Time Dependent Problems and Difference Methods, John Wiley Sons , 1995.
4. W. Hackbusch- Elliptic Differential Equations: Theory and Numerical Treatment, Springer, 1992.
5. C. Johnson, Numerical Solution of Partial Differential Equations by Finite Element Method, Cambridge University, 1990.
6. A. Quarteroni, A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer, 1997.
7. J.T. Oden, J.N. Reddy, An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley Sons , 1976.
8. P.A. Raviart, J.M. Thomas Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles, Masson, 1983.
9. J.W. Thomas- Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Springer, 1995.
10. V. Thomée- Finite Element Method for Parabolic Problems, Springer, 1984.

11. G. A. Sod - Numerical Methods in Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1988