

Histórias do arco da velha

Adérito Araújo

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal
email alma@mat.uc.pt

Abstract

Seguindo [1], usaremos o *pricípio do tempo mínimo* de Fermat para o caminho percorrido pela luz para derivar as leis da reflexão e da refração. Posteriormente analisaremos a passagem da luz por uma gota de água para explicar qualitativamente o fenómeno do arco-íris.

1 O problema

Depois de chover algumas horas ou mesmo durante 40 dias e 40 noites, se o sol aparecer e as gotas de água permanecerem no ar, poderemos presenciar um dos fenómenos meteorológicos mais espectaculares: o arco-íris. Depois de passar o espanto provocado pela beleza do espectáculo, a nossa curiosidade produz várias questões. Porque é que o arco-íris é um arco circular? Como determinar a sua altura no céu? O porquê das cores e da sua ordenação? Porque é que certas vezes aparece um segundo arco? Vamos responder a algumas destas questões no decorrer deste trabalho.

2 Breve referência histórica

As primeiras explicações do fenómeno do arco-íris (AI) foram necessária e compreensivelmente mitológicas. Os gregos diziam que a deusa Íris usava o arco (que passou, entre nós, a ser designado com o seu nome) para enviar um sinal de esperança mas também de aviso. Na mitologia africana, o AI representava uma cobra enorme que aparecia nos dias de tempestade para comer. Diziam também que a cobra comia as criancinhas que se aproximavam de uma das extremidades do arco. O facto do arco aparentar tocar o chão levou muitos a procurar os tesouros que aí se escondiam. Numa perspectiva menos capitalista, os índios americanos viam o arco como uma ponte ancorada neste mundo e que nos conduzia ao próximo. Em Portugal o povo chama ao AI o arco da velha; o arco bebe água nos rios e pode secá-los; a “velha” cose ou penteia-se onde o arco poisa (ver [2]). Um provérbio popular diz:

Arco da Velha

Por água espera.

As superstições portuguesas são análogas às da Nova Zelândia, Birmânia, Escócia, Bretanha e às de muitos outros locais do globo.

No ano de 578 a.C., o filósofo grego Anaximenes notou a relação entre o AI e o sol. Em vez de atribuir ao fenómeno uma explicação mitológica, ele sugeriu que seriam as nuvens que moldavam a luz do sol produzindo um arco colorido. Aristóteles usou a geometria de forma correcta, mas as leis da reflexão de forma deficiente, para concluir a estrutura circular do AI. Gradualmente, os estudiosos começaram a notar que tanto a reflexão como a refacção da luz tinham algo a ver com o fenómeno do AI. No séc. XIV, Theodoric de Freiburg e o estudioso persa Kamal al-Din al Farisi, independentemente, concluíram que as gotas de água eram a chave do problema. Este facto foi constactado pela análise cuidada da luz ao atravessar um globo cheio de água. O séc. XVI foi muito profícuo na produção de livros sobre o assunto, mas poucos de grande importância. No séc. XVII, como seria de esperar, apareceram contribuições muito importantes sobretudo devido aos trabalhos de Kepler, Descartes, Newton, Fermat, entre outros. Actualmente, os físicos continuam a limar arestas na teoria do AI. Notemos que, a compreensão deste fenómeno está tão intimamente ligada ao conhecimento da natureza da luz que, até que as teorias da luz estejam completas, não cessam de aparecer questões novas sobre o AI.

3 Reflexão

É a luz do sol que origina o AI; por isso a primeira coisa a fazer, se desejarmos explicar o fenómeno, é compreender como é que a luz se comporta ao encontrar um obstáculo. Em 1657, o famoso matemático Pierre Fermat dedicou a sua atenção ao estudo da inclinação da luz e estabeleceu o seguinte princípio, simples mas fundamental.

Princípio de Fermat: *A luz percorre o caminho que minimiza o tempo total de viagem.*

Consideremos primeiro a reflexão da luz. Para facilitar o estudo geométrico do problema consideremos que a luz viaja na forma de raios. Suponhamos que temos uma fonte de luz no ponto P na Figura 1. Suponhamos que um observador colocado no ponto Q observa a luz reflectida pelo espelho.

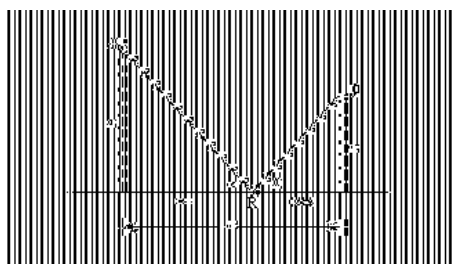


Figura 1: Reflexão da luz.

Questão 1

Em que ponto R do espelho a luz é reflectida?

Resolução: O princípio de Fermat diz-nos que a luz segue um caminho que minimiza o tempo do percurso percorrido de P a Q passando pelo espelho. Assumindo que, no nosso exemplo, a velocidade da luz é constante, o ponto R deve estar posicionado por forma a que o caminho

PRQ tenha comprimento mínimo. Considerando os triângulos da Figura 1, obtemos a seguinte expressão para o comprimento do caminho, dada como função de $x \in [0, d]$:

$$C(x) = \sqrt{p^2 + x^2} + \sqrt{q^2 + (d - x)^2}.$$

Para determinar o comprimento mínimo, temos que calcular a derivada $C'(x)$. Assim,

$$C'(x) = \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} - \frac{d - x}{\sqrt{q^2 + (d - x)^2}}.$$

Fazendo esta expressão igual a zero, obtemos

$$\frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{q^2 + (d - x)^2}}.$$

Ora, uma vez que, na Figura 1,

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} \quad \text{e} \quad \cos \beta = \frac{d - x}{\sqrt{q^2 + (d - x)^2}},$$

temos que $C'(x) = 0$ implica $\cos \alpha = \cos \beta$. Como ambos os ângulos variam entre 0° e 90° , (ângulos agudos) concluímos que $\alpha = \beta$. Por conveniência, chamamos a α ângulo de incidência e a β ângulo de reflexão. Para concluir a resposta à questão colocada temos ainda que resolver os seguintes exercícios.

Exercício 1 *Verifique, calculando a segunda derivada, que encontramos um mínimo de $C(x)$.*

Exercício 2 *Determine a distância x que minimiza o comprimento $C(x)$.*

Note-se que assumimos como verdadeiro o princípio de Fermat. $\square$

Poderemos enunciar a conclusão do nosso raciocínio da forma seguinte.

Lei da reflexão: *Para a reflexão, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.*

4 Refracção

Para resolver as questões relacionadas com o AI temos que compreender o que acontece quando a luz atravessa a água.

Suponhamos agora a seguinte situação: o ponto P continua a ser a fonte de luz no ar mas o ponto Q está agora na água. Estamos interessados em conhecer o caminho percorrido pelo raio que sai de P e passa por Q .

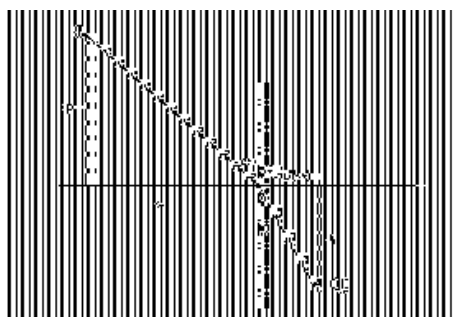


Figura 2: Refracção da luz.

Questão 2

Em que ponto R da superfície da água a luz é refractada?

Resolução: Seja c_1 a velocidade da luz no ar e c_2 a velocidade da luz na água. Atendendo a que

$$\text{tempo} = \frac{\text{espaço}}{\text{velocidade}},$$

temos que o tempo gasto pela luz do ponto P até ao ponto Q , como função de $x \in [0, d]$, é dado por

$$T(x) = \frac{\sqrt{p^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{q^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Para calcular o tempo mínimo calculemos a derivada

$$T'(x) = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{d - x}{\sqrt{q^2 + (d - x)^2}}.$$

Fazendo $T'(x) = 0$, obtemos

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2},$$

ou seja

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Por outras palavras a razão entre o seno do ângulo de incidência α e o seno do ângulo de refração β é constante.

Exercício 3 Verifique, calculando a segunda derivada, que encontrámos um mínimo de $T(x)$.

Exercício 4 Determine a distância x que minimiza o comprimento.

Esta constante $k = c_1/c_2$ é a razão entre a velocidade da luz no ar e na água. O índice de refração de um determinado meio é a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz nesse meio.

meio	índice
$\vdots$	$\vdots$
água	≈ 1.33
ar	≈ 1
$\vdots$	$\vdots$

Table 1: Alguns índices de refração.

Atendendo à Tabela 1 temos que $k = c_1/c_2 \approx 1.33$. $\square$

Poderemos enunciar a conclusão do nosso raciocínio da forma seguinte.

Lei da refacção: *A razão entre o seno do ângulo de incidência com o seno do ângulo de refacção é constante.*

Note-se que:

1. Este resultado não depende da direcção de incidência da luz.
2. Constatámos que se a luz viajar de um meio para outro com índice de refacção maior, o raio de luz inclina-se no sentido da perpendicular à superfície que separa os dois meios (chamada **normal**). Quando a luz viaja para um meio de índice de refacção menor, o raio afasta-se da normal.
3. Foi Fermat (1657) quem enunciou o princípio que permitiu a dedução matemática da lei da refacção. No entanto, alguns anos antes, o cientista holandês Willebrord Snell descobriu experimentalmente este resultado. Por isso, esta lei é também conhecida por lei de Snell.

5 O ângulo de arco-íris

O AI forma-se pela interacção da luz do sol com as gotas de chuva. Quando a luz viaja no ar e colide com uma gota, alguma luz é reflectida para o ar e outra é refractada ao entrar na gota. Por sua vez, parte da luz dentro da gota é reflectida quando colide com o outro lado da gota e parte é refractada ao passar de novo para o ar. Para percebermos como se forma o AI temos que perceber e não perder o rasto a estas reflexões e refrações provocadas na gota de chuva.

A forma da gota de chuva depende de muitos factores; no entanto, como uma boa aproximação podemos considera-la esférica. Na Figura 3 está esquematizado um corte numa gota de chuva quando um raio de luz entra nela num ponto A .

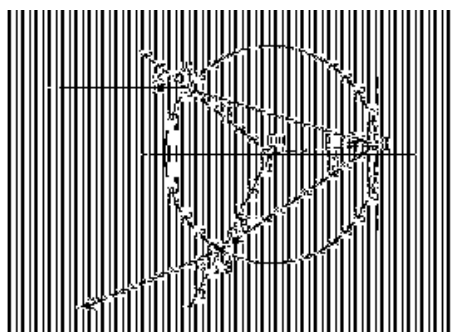


Figura 3: Passagem da luz solar por uma gota de chuva.

A luz também é reflectida no ponto A mas no esquema da Figura 3 temos representado apenas a parte que entra na gota. Uma vez que o índice de refacção da água é maior que o do ar, a lei da refacção diz-nos que o raio se inclina na direcção da normal.

Da geometria sabemos que a tangente à circunferência no ponto A é perpendicular ao raio do círculo no mesmo ponto. Assim, a recta que contém o raio do círculo que passa por A é a normal em A . Na Figura 3, α é o ângulo de incidência e β o ângulo de refacção.

O raio de luz continua o seu percurso pela gota e atinge o ponto B . Aqui, mais uma vez, parte da luz é reflectida e outra parte passa de novo para o ar. Na figura seguimos a parte que é reflectida. Em B a luz é reflectida e como tal o ângulo de incidência é igual ao ângulo de

reflexão. Aqui o ângulo de incidência é o ângulo entre o raio e a tangente à circunferência em B . Note-se que isto implica que $\angle ABO = \angle OBC$. Quando o raio encontra de novo a superfície da gota em C , parte dele é reflectido e outra parte sofre refacção. Se considerarmos a parte do raio que sai da gota (refracção) temos que o raio se desloca para um meio com índice de refacção menor e, como tal, afasta-se da normal.

A Figura 3 mostra-nos um caso de interacção entre um raio de luz e uma gota de água. Em cada superfície da gota, uma parte do raio é reflectida e outra é refractada; e assim existem muitos percursos possíveis no interior da gota.

Percurso 1 O raio entra na gota e é repetidamente reflectido no seu interior.

Visto que em cada superfície parte do raio também é refractada para o ar, quando escolhemos seguir apenas uma parte estamos a seguir um raio que vai perdendo rapidamente luminosidade.

Queremos assim raios que colidam poucas vezes com a superfície das gotas.

Percurso 2 O raio não chega a entrar na gota sendo imediatamente reflectido.

Este raio é muito luminoso mas não há interacção com a água e, como tal, o AI não é formado.

Percurso 3 O raio entra na gota em A e deixa a gota em B .

Este raio também tem uma intensidade luminosa grande mas, neste caso, teríamos que estar no lado direito da gota para ver a luz. Ora, o AI é formado quando o sol está por trás do observador e a luz que ele emana é reflectida e refractada pela gota da chuva.

Assim, o raio traçado na Figura 3 é o raio mais simples que contribui para a formação do AI.

Note-se que o ponto A pode estar em qualquer parte do lado esquerdo da circunferência. Se estiver na parte superior esquerda, o raio sai pela parte inferior.

Questão 3

Qual o ângulo de deflexão do raio quando sai da gota?

Resolução: Consideremos o caso em que o raio atinge a gota ao longo do diâmetro da circunferência. O ângulo de incidência é zero e o ângulo refacção também é zero uma vez que

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{k}$$

e, como β é um ângulo agudo, $\alpha = 0$ implica $\beta = 0$. Assim, o raio volta a sair pelo mesmo local por onde entrou e então o ângulo de deflexão é de 180° (no sentido dos ponteiros do relógio). O raio traçado na Figura 3 tem um ângulo de deflexão inferior a 180° .

Note-se que à medida que o ponto A se move na circunferência, o ângulo de deflexão varia. Assim o ângulo de deflexão é função do ângulo de incidência α . Seja $D(\alpha)$ o ângulo de deflexão.

Atendendo à simetria existente entre a parte superior e inferior da circunferência, podemos considerar os pontos A apenas na parte superior esquerda. Para esses pontos, α varia de 0°

(no equador) a 90° (no polo). Para determinar a deflexão total consideremos primeiramente a deflexão em A .

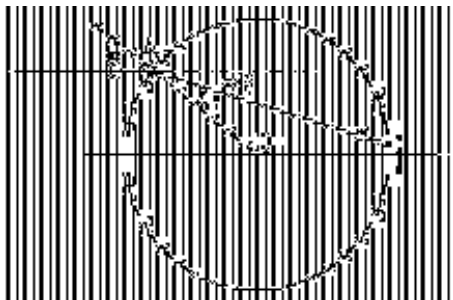


Figura 4: Deflexão em A .

Atendendo à Figura 4, observamos um desvio em A de $\alpha - \beta$ graus no sentido dos ponteiros do relógio.

Vejamos agora em B .

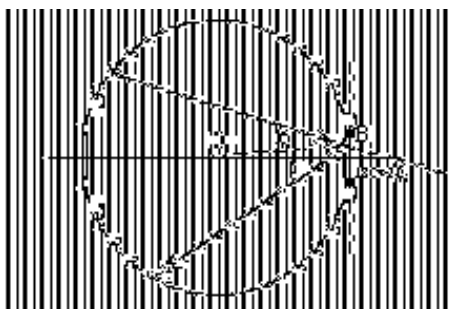


Figura 5: Deflexão em B .

O desvio neste ponto foi de $180 - 2\beta$ graus no sentido dos ponteiros do relógio. Finalmente, em C a deflexão é igual à de A , ou seja, $\alpha - \beta$ graus no sentido dos ponteiros do relógio (confirmar!). Concluimos então que

$$D(\alpha) = \alpha - \beta + 180 - 2\beta + \alpha - \beta = 180 + 2\alpha - 4\beta,$$

sendo β uma função que depende de α . $\square$

Questão 4

Será que $D(\alpha)$ admite um mínimo? Se sim qual é esse valor?

Note-se que:

1. Se $D(\alpha)$ admitir um mínimo, então existe um ângulo α^* para o qual a derivada $D'(\alpha^*) = 0$. Por outras palavras, a variação do ângulo de deflexão $D(\alpha)$ a dividir pela variação do ângulo de incidência é praticamente zero para ângulos α próximos de α^* , uma vez que

$$D'(\alpha^*) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha^*} \frac{D(\alpha) - D(\alpha^*)}{\alpha - \alpha^*} = 0.$$

Assim, para $\alpha \approx \alpha^*$ temos $D(\alpha) \approx D(\alpha^*)$, ou seja, muitos raios de luz com ângulos de incidência próximos α^* têm ângulos de deflexão aproximadamente iguais.

2. Os raios com ângulos de incidência afastados do ponto crítico α^* terão ângulos de deflexão mais afastados entre si. Note-se que se

$$D'(\bar{\alpha}) = \lim_{\alpha \rightarrow \bar{\alpha}} \frac{D(\alpha) - D(\bar{\alpha})}{\alpha - \bar{\alpha}} = c \neq 0,$$

então para $\alpha \approx \bar{\alpha}$ temos $D(\alpha) \approx D(\bar{\alpha}) + c$.

Assim, se olharmos para a luz que vem deflectida pela gota, os raios que vêm na direcção do ângulo de deflexão mínimo devem aparecer mais luminosos visto que estão mais concentrados.

Resolução: Vamos então resolver a questão 4. Como foi visto $D(0) = 180$ e, à medida que α aumenta, $D(\alpha)$, pelo menos de início, decresce. Será que volta a crescer?

Consideremos o caso em que $\alpha \in]0, 90[$. Como

$$D(\alpha) = 180 + 2\alpha - 4\beta$$

temos que

$$D'(\alpha) = 2 - 4 \frac{d\beta}{d\alpha},$$

uma vez que β é função de α . Atendendo a que

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = k \Rightarrow \sin \alpha = k \sin \beta$$

concluimos, derivando esta expressão,

$$\cos \alpha = k \cos \beta \frac{d\beta}{d\alpha} \Rightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{k \cos \beta}.$$

Substituindo temos

$$D'(\alpha) = 2 - 4 \frac{\cos \alpha}{k \cos \beta}.$$

Fazendo a derivada igual a zero sai que

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = \frac{k^2}{4} \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{k^2}{4}.$$

No entanto, como

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{k}$$

temos

$$\frac{k^2}{4} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{k^2}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\cos^2 \alpha}{k^2 - \sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\cos^2 \alpha}{k^2 - (1 - \cos^2 \alpha)} \Rightarrow k^2 - 1 + \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha.$$

Concluimos então que a derivada se anula para um ângulo de incidência α tal que

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{3}}.$$

Temos assim a expressão do coseno do ângulo que tem deflexão mínima. Atendendo a que a gota de chuva é essencialmente constituída por água, $k \approx 1.33$ e assim $\cos \alpha \approx 0.5063$, ou seja, $\alpha \approx 59.6^\circ$. Para este ângulo temos um ângulo de deflexão $D(59.6^\circ) = 137.5^\circ$.

Exercício 5 Verifique, calculando a segunda derivada, que encontramos um mínimo de $D(\alpha)$.

Atendendo à explicação dada temos que os raios que incidem com um ângulo $\alpha \approx 59.9^\circ$ são vistos, depois de deflectidos por acção da chuva, com uma luminosidade maior. É aqui que aparece o AI. O raio cujo ângulo de incidência é $\alpha \approx 59.9^\circ$ é chamado raio de arco-íris e $42.5^\circ (= 180^\circ - 137.5^\circ)$ é chamado ângulo de arco-íris. $\square$

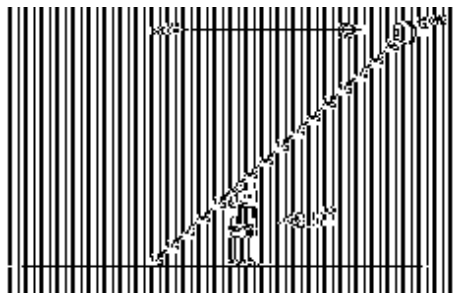


Figura 6: O ângulo de arco-íris.

Note-se que:

1. As gotas inclinadas 42.5° do observador aparecem mais brilhantes que as que tiverem menor inclinação. Para as gotas mais altas o ângulo de deflexão é inferior a 137.5° . Como vimos que esse ângulo é mínimo, nenhum raio de arco-íris vem de gotas mais elevadas. Qualquer raio que venha dessas gotas deverá ter mais do que uma ou nenhuma reflexões internas.
2. No séc. XVII Descartes descobriu o ângulo de arco-íris sem recorrer às técnicas do cálculo. Assim teve que usar o processo exaustivo de tentativa-erro não conseguindo obter uma expressão “bonita” para o ângulo de incidência que conduz à deflexão mínima.

Imagine-se um observador no vértice de um cone com ângulo igual a duas vezes o ângulo de arco-íris. Qualquer gota na superfície do cone forma um ângulo igual ao ângulo de arco-íris com o observador. Assim o observador vê um arco circular brilhante no céu. Isto é o arco-íris!

Note-se que o arco pode estar mais alto ou mais baixo no céu consoante a altura do sol. Um observador no solo vê, pelo menos, um semi-círculo enquanto que um observador num avião pode ver o arco todo.

Exercício 6 Trace a função $D(\alpha)$ para α entre 0° e 90° .

Exercício 7 Se o ponto mais alto do AI fizer um ângulo de 25° com o observador, qual é o ângulo de inclinação do sol?

Sugestão: Prove que o ângulo do ponto mais alto do arco somado com o ângulo do sol é igual ao ângulo de arco-íris (i.e., 42.5°).

6 As cores

A geometria dos raios de luz permitiu-nos concluir a natureza circular do AI. Mas onde estão as cores? Com os conhecimentos actuais, a resposta pode ser dada de forma muito simples.

A luz é uma onda electromagnética e assim sendo podemos falar da sua frequência e do seu comprimento de onda. Existe um espectro contínuo de comprimentos de onda mas os nossos olhos são apenas sensíveis a vários intervalos, que tendemos a categorizar em intervalos, correspondentes a diferentes cores.

A luz com comprimento de onda entre 6470 e 7000 angströms (1 angström é igual a 10^{-10} metros) é vista como vermelho e a luz com comprimento de onda entre 4000 e 4240 angströms como violeta. Os comprimentos de onda das restantes cores estão em intervalos compreendidos entre estes dois.

Atendendo a que as características das diferentes cores são distintas, o índice de refacção da água depende da cor da luz que passa por ela. Por exemplo, quando um raio de luz vermelho com um comprimento de onda de 6563 angströms passa do ar para a água, o índice de refacção é de aproximadamente 1.3318. Para a luz violeta com comprimento de onda de 4047 angströms, o índice aumenta para cerca de 1.3435.

Quando a luz do sol colide com uma gota de chuva, os comprimentos de onda no intervalo do vermelho são refractados de forma diferente dos comprimentos de onda do violeta. As restantes cores, como o azul, e o amarelo, situam-se estes dois intervalos e são refractadas em vários graus entre estes dois extremos. Consequentemente a luz é dividida nas cores que a constituem.

Necessitamos assim de refazer as contas do ângulo de deflexão mínimo para as diferentes cores. Assim, para a luz vermelha, a deflexão mínima é 137.5° e para a violeta é 139.4° . Estes valores dão-nos um ângulo de arco-íris de 43.3° e 40.6° , respectivamente. Por outras palavras, quando olhar para o céu, o observador vê um arco circular vermelho numa inclinação ligeiramente superior à do arco violeta. Os outros comprimentos de onda que reconhecemos como cores situam-se entre estes dois. A ordem é: vermelho, alaranjado, amarelo, verde, azul, anil e violeta; uma mnemónica possível é: VAAVAAV.

Newton foi o primeiro a elaborar estes cálculos com o devido rigor e a explicar o aparecimento e a ordenação das cores do AI.

7 Considerações finais

Muito mais haveria para dizer a propósito do AI. Nomeadamente, ficou por explicar o porquê de por vezes aparecerem dois arcos em vez de um; qual a correcção a fazer se tivermos em conta que os raios não são paralelos e que as gotas não são esféricas, etc (ver [1]).

Actualmente os estudos sobre a luz continuam bastante profícuos. Por exemplo, a teoria de difracção, que considera a luz como sendo ondas em vez de raios, tem contribuído grandemente para uma melhor compreensão do AI (ver [1] e as referências aí contidas).

References

- [1] Janke, Steven (1992) *Somewhere within the rainbow*, UMAP Modules in Undergraduate Mathematics and Applications: Module 724, Lexington: COMAP, Inc.
- [2] Vasconcellos, Leite de (1882) *Tradições Populares Portuguesas*, Porto.