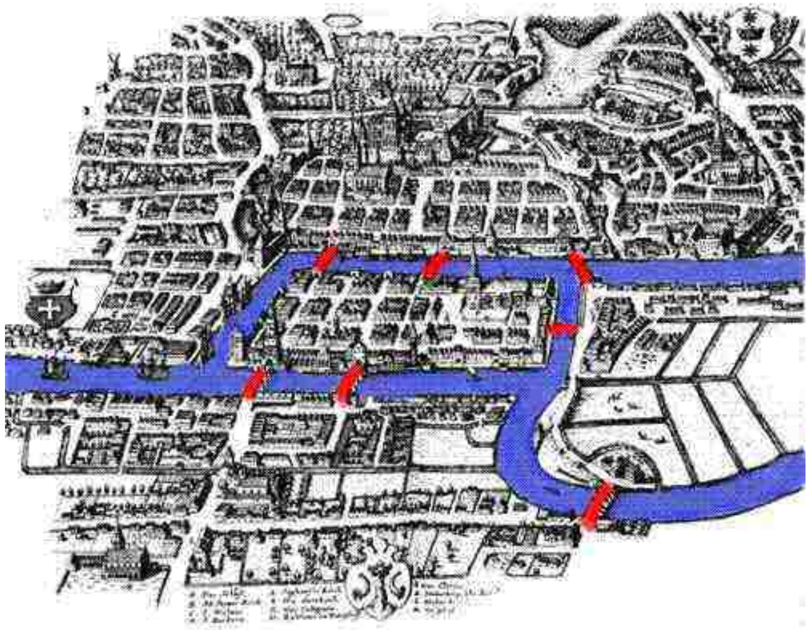
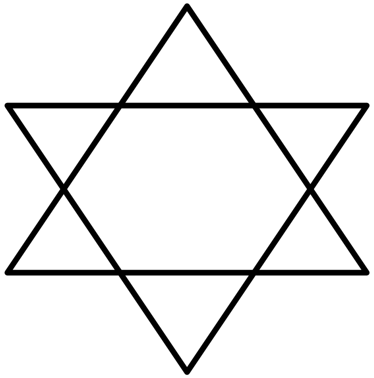
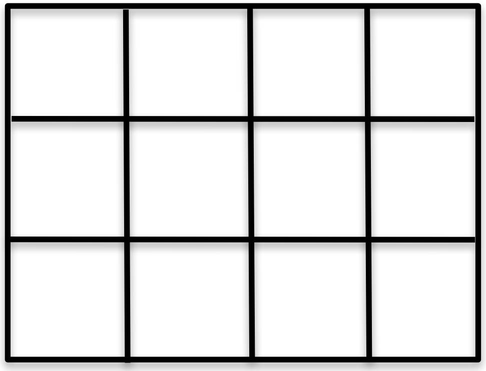
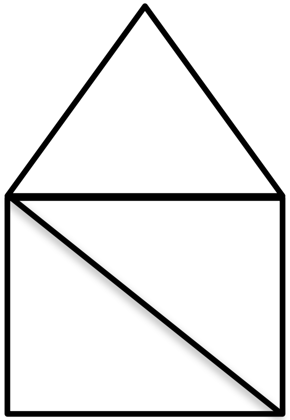
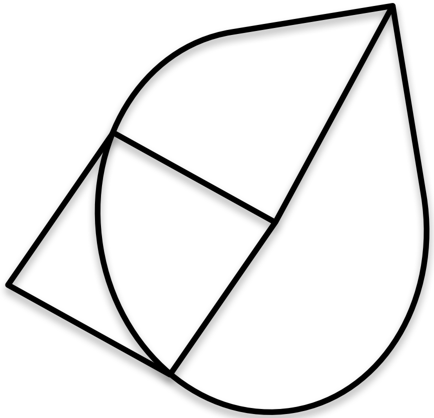
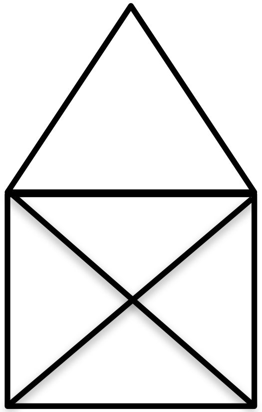
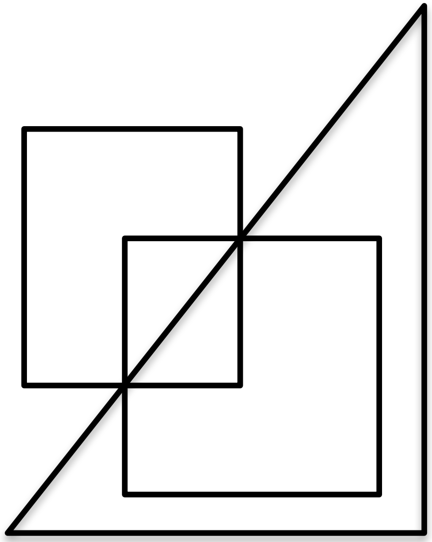
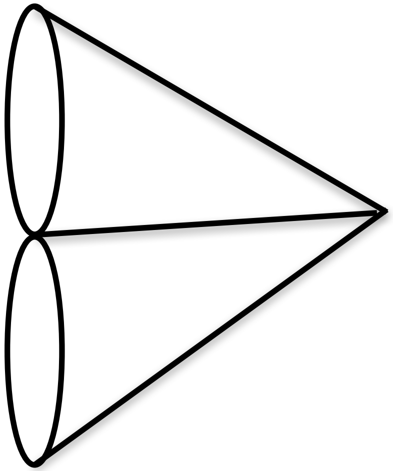
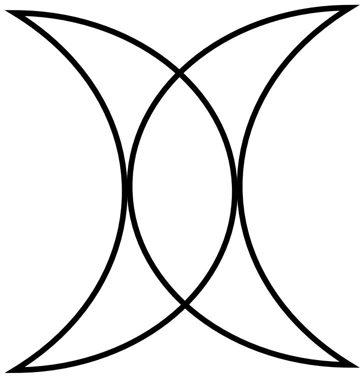
As pontes de Königsberg

Adérito Araújo



Centro de Matemática da Universidade de Coimbra

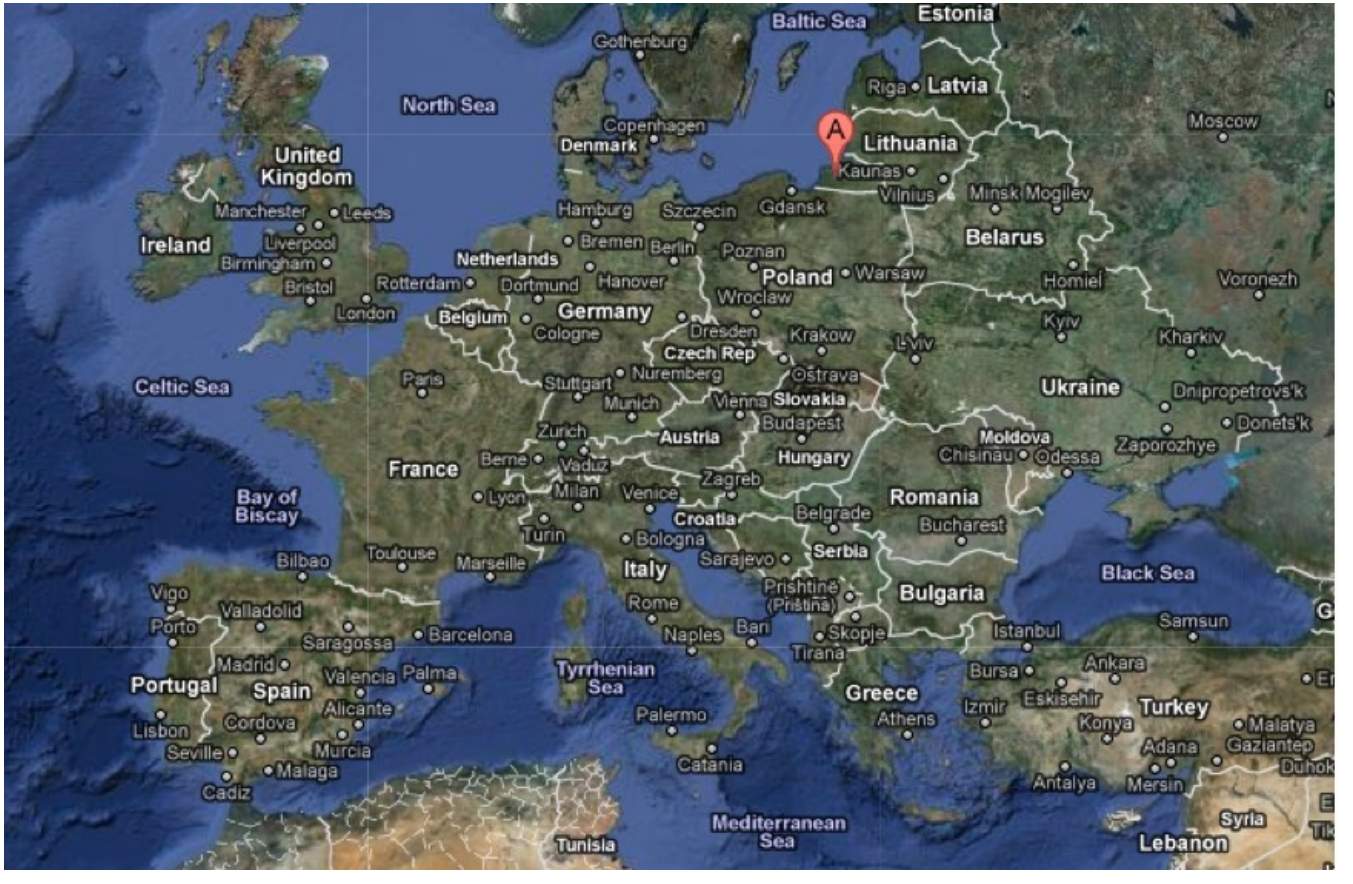
Centre for Mathematics
University of Coimbra

A cidade de Königsberg

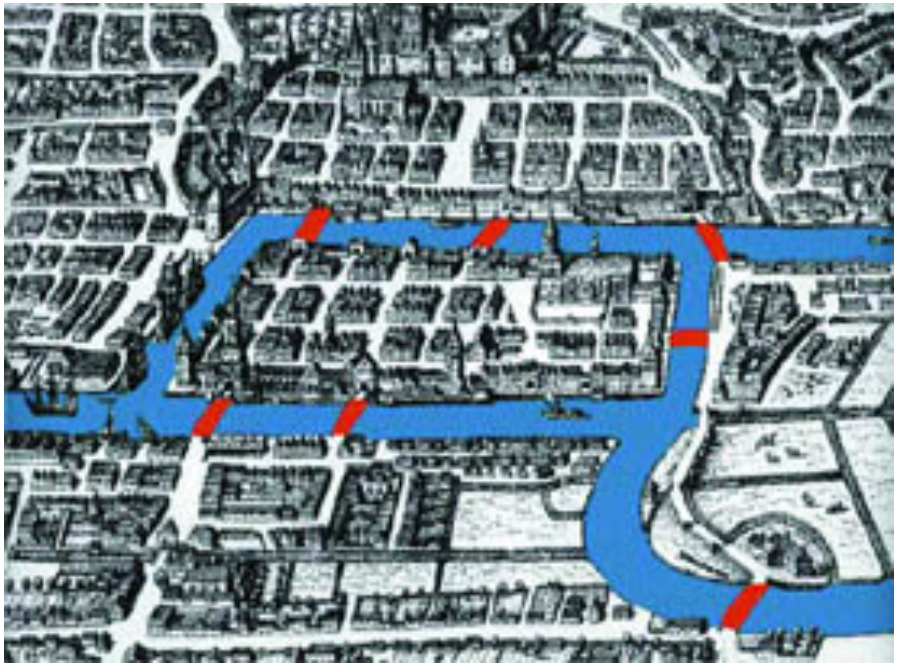
- Era uma vez uma cidade chamada Königsberg ("montanha do rei") na antiga Prússia.
- Fundada em 1255 pelos cavaleiros Teutónicos, foi capital da Prússia Oriental até 1945.
- Foi um centro de cultura durante séculos, tendo aí vivido Goldbach, Hilbert, Kant e Wagner.

A cidade de Kaliningrado



As pontes de Königsberg

A cidade de Königsberg é banhada pelo rio Pregel que, ao atravessar a cidade se ramifica formando uma ilha (Kneiphof) que está ligada à restante parte da cidade por sete pontes.



Será possível efectuar um percurso por forma a passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma?

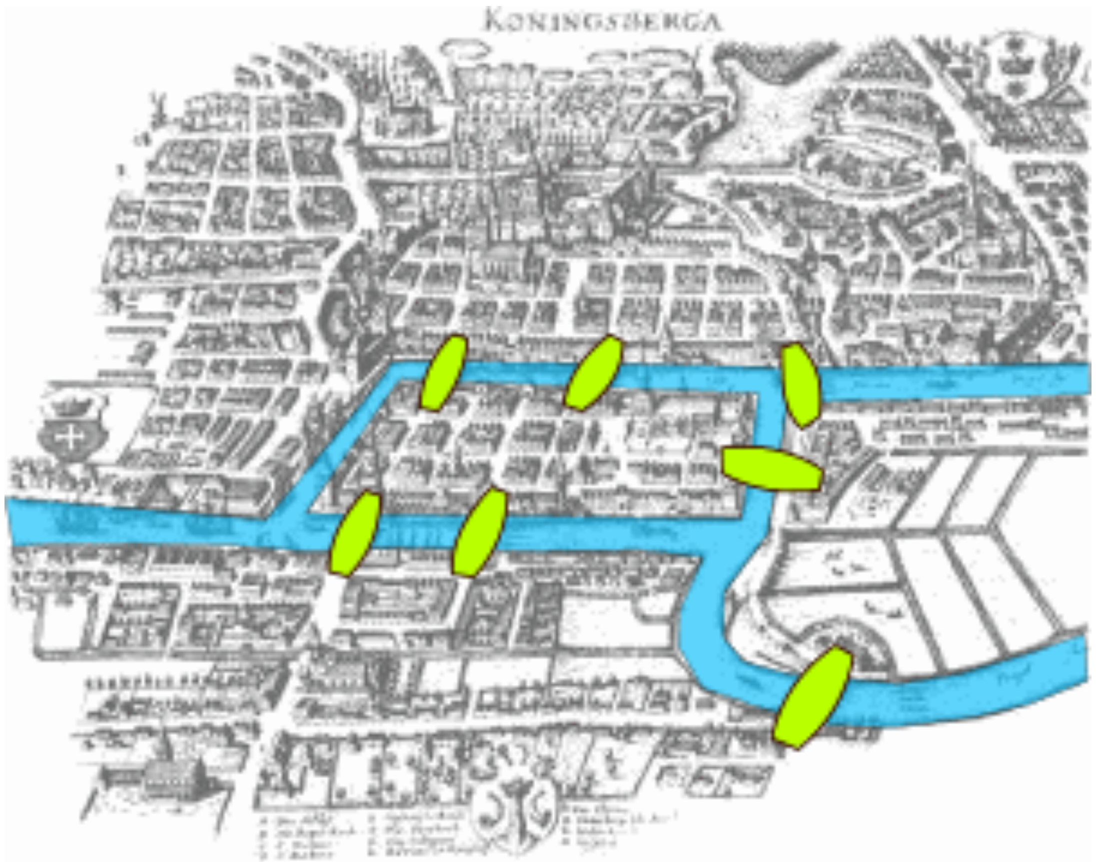
Leonhard Euler (1707 – 1783)

- Nasceu em Basileia, Suiça. Estudou hebraico e teologia e teve aulas particulares de matemática com Johann Bernoulli.
- Em 1727 foi para São Petersburgo para a corte da Imperatriz Catarina II.
- Casou em 1733 e teve 13 filhos, dos quais apenas 5 chegaram à idade adulta.

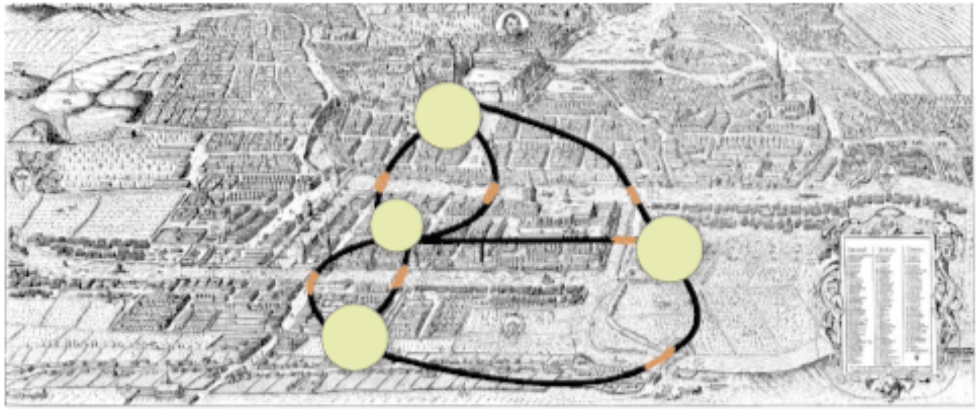
Leonhard Euler (1707 – 1783)

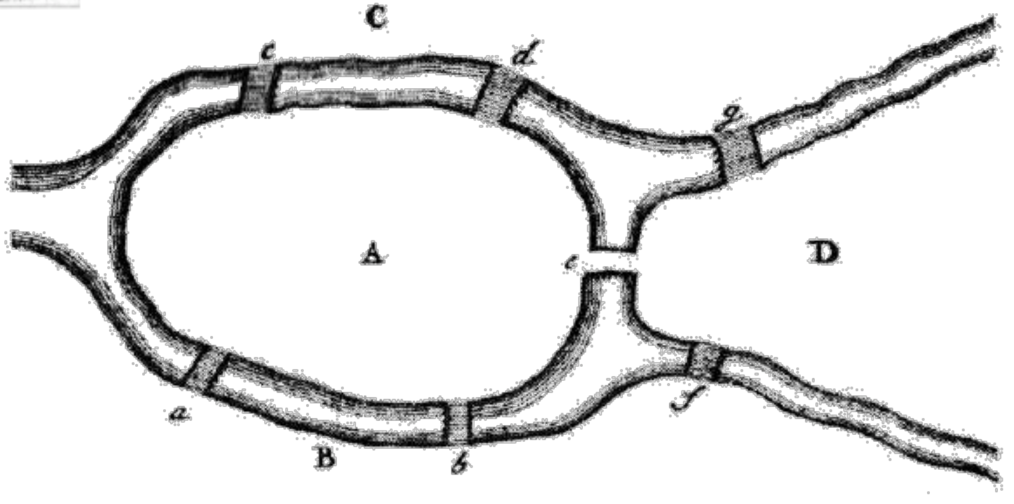
- Publicou mais de 500 livros e artigos científicos durante a sua vida e mais 400 a título póstumo.
- Foi o inventor de notações como *i*, *π*, *e*, sin, cos, f(*x*) e muitas mais!
- Ficou totalmente cego mas isso não o impediu de se tornar mais produtivo: "*agora tenho menos distrações*".

De regresso a Königsberg…



Em 1736, Leonhard Euler apresentou à Academia de Ciências Russa de São Petersburgo um diagrama que facilitava a análise do problema.





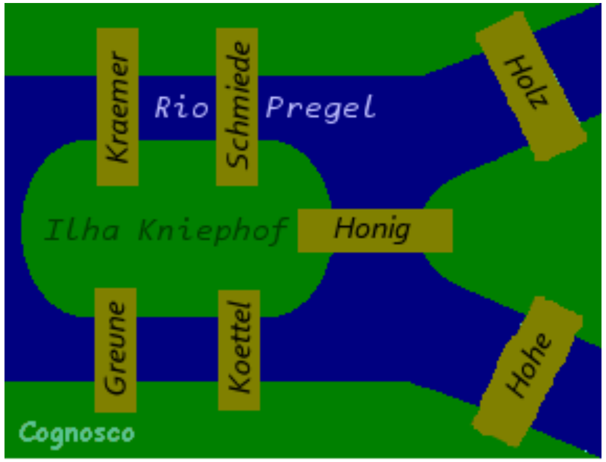
A descoberta de Euler

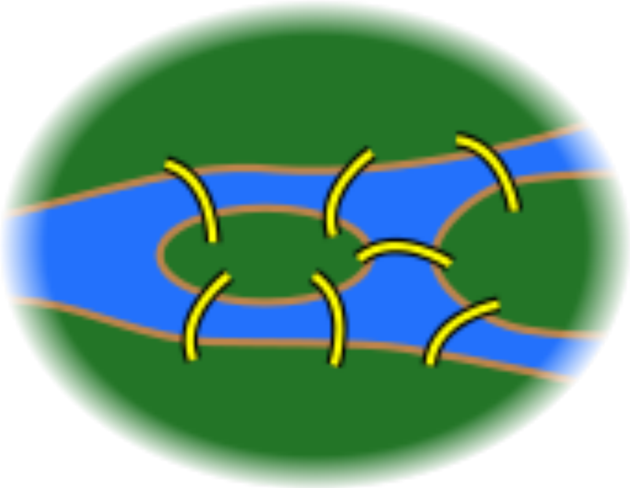
- *Eureka!*

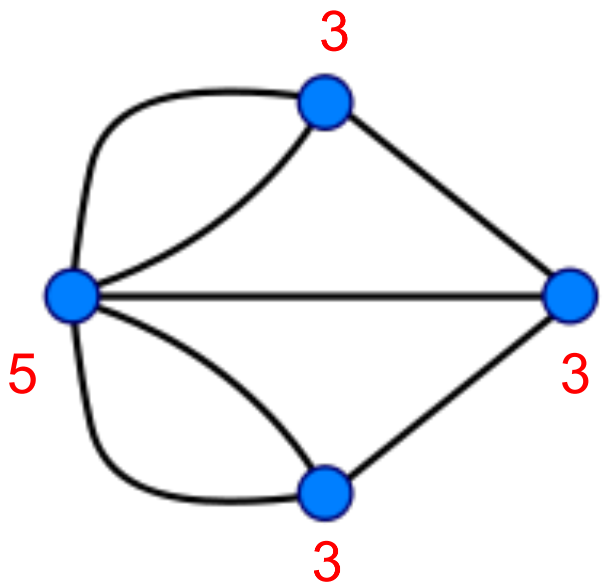
  Se tiver que passar uma ponte para **chegar** a uma parte da cidade, tenho que **sair** por uma ponte diferente para voltar ao ponto de partida.

- Para que o percurso das pontes seja possível, tem de existir um **número par de pontes a dar acesso a cada parte da cidade** (excepto para a região de partida e de chegada).

E a resposta é…



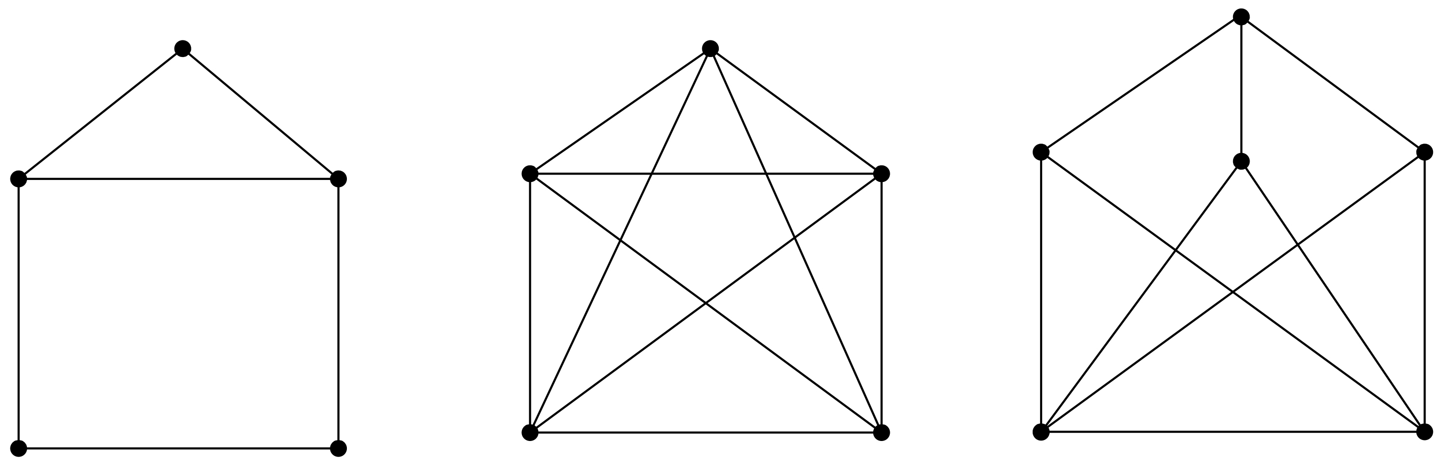




NÃO!

Grafo

Conjunto de vértices unidos por arestas. Todos os vértices estão unidos por um passeio (percurso de arestas).

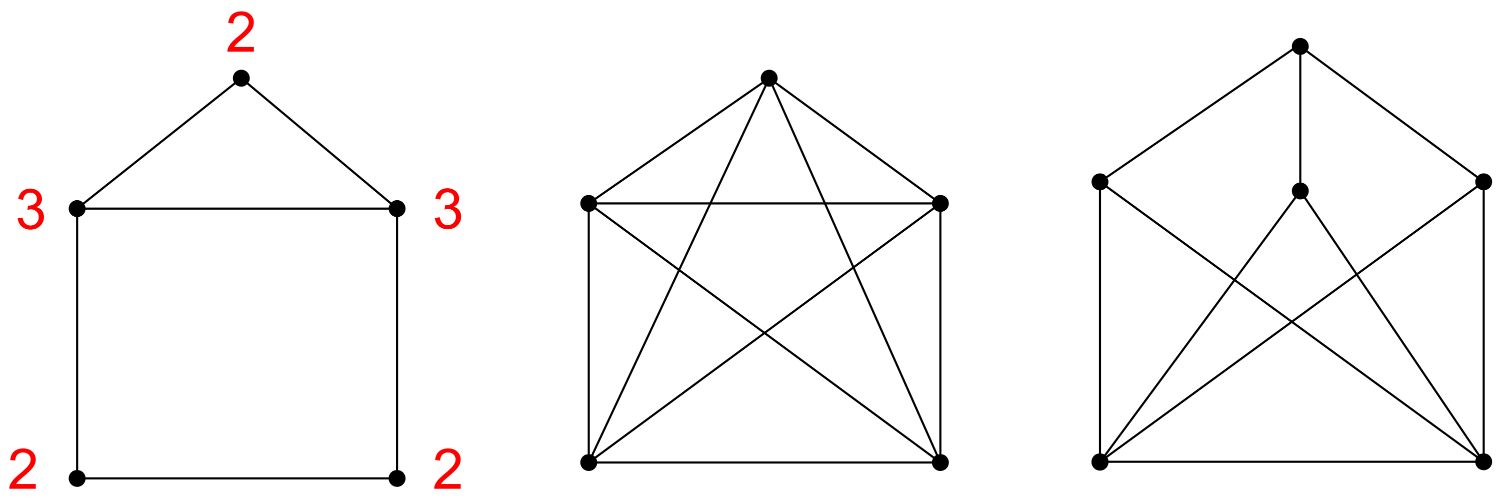


Trajecto: Passeio sem arestas repetidas.
Circuito: Trajecto fechado.
Circuito/trajecto de Euler: contém todas as arestas de um grafo.

Valência de um vértice: Número de arestas incidentes nesse vértice.

Grafo

Conjunto de vértices unidos por arestas. Todos os vértices estão unidos por um passeio (percurso de arestas).



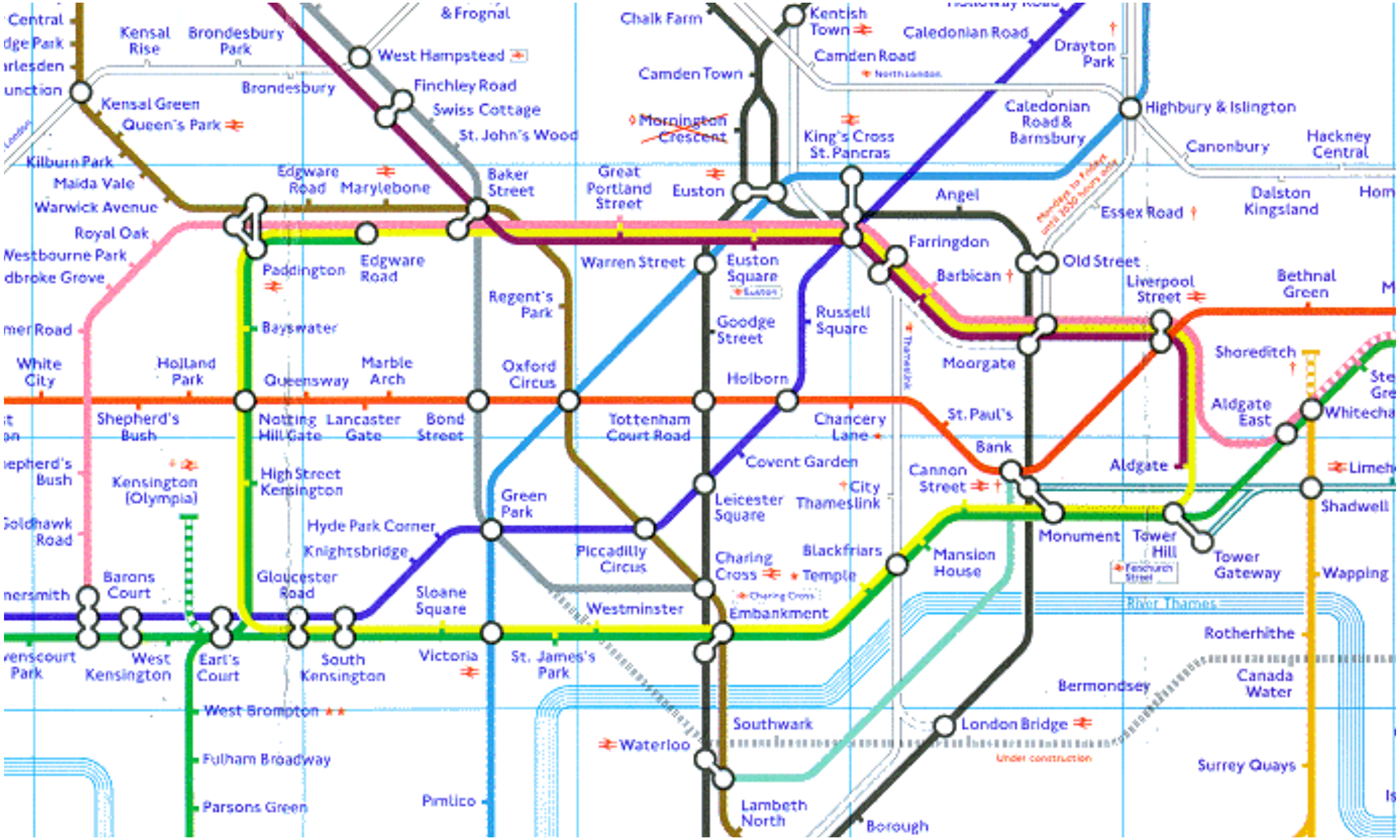
Trajecto: Passeio sem arestas repetidas.

Circuito: Trajecto fechado.

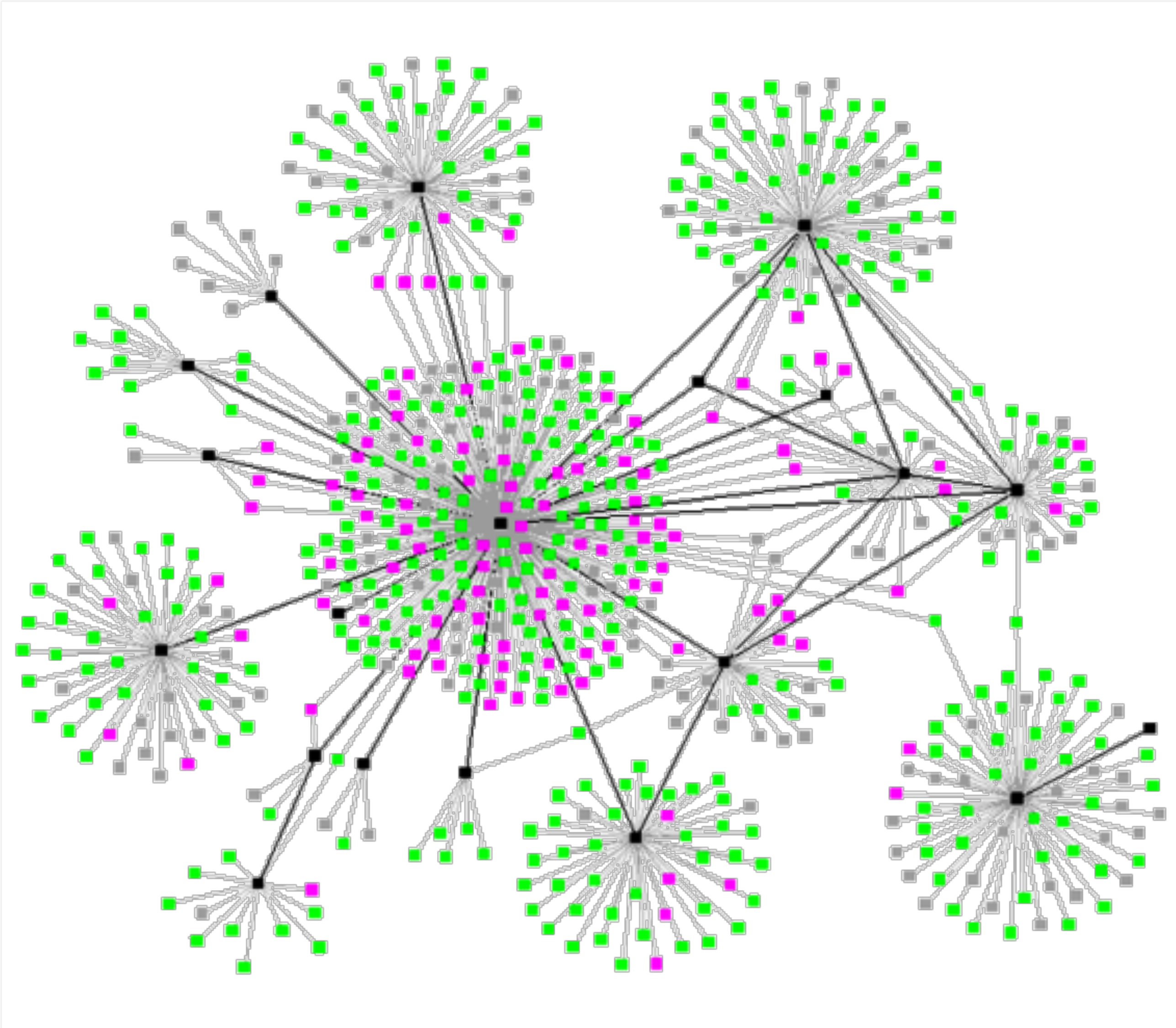
Circuito/trajecto de Euler: contém todas as arestas de um grafo.

Valência de um vértice: Número de arestas incidentes nesse vértice.

Linhas de comboio



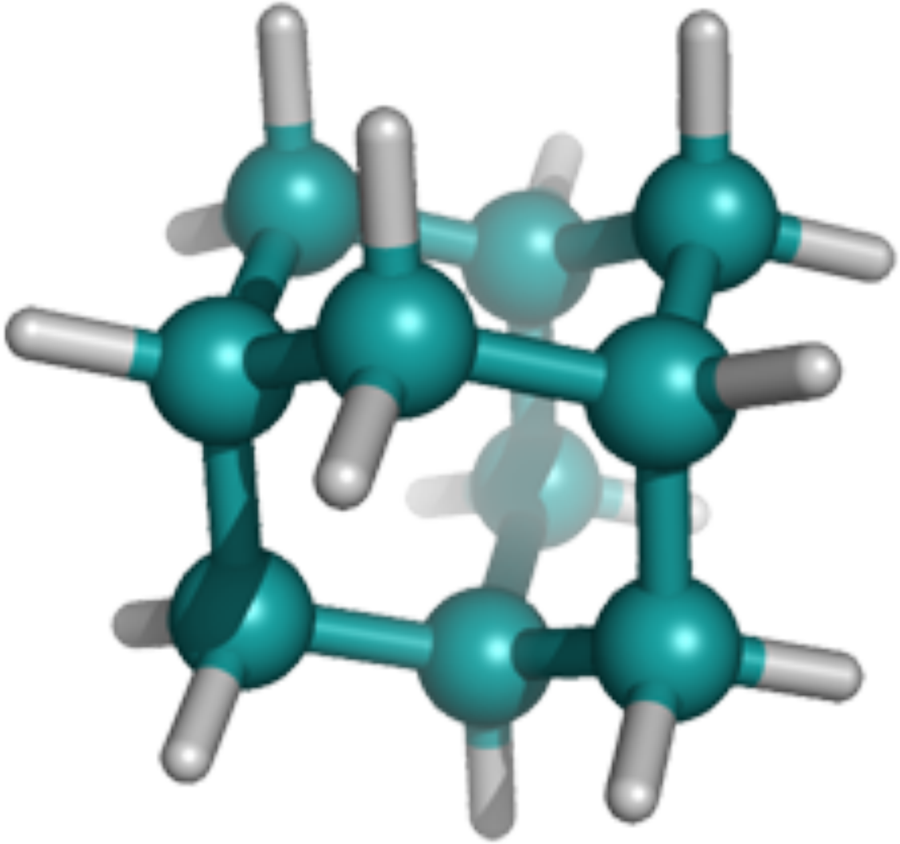
Redes sociais



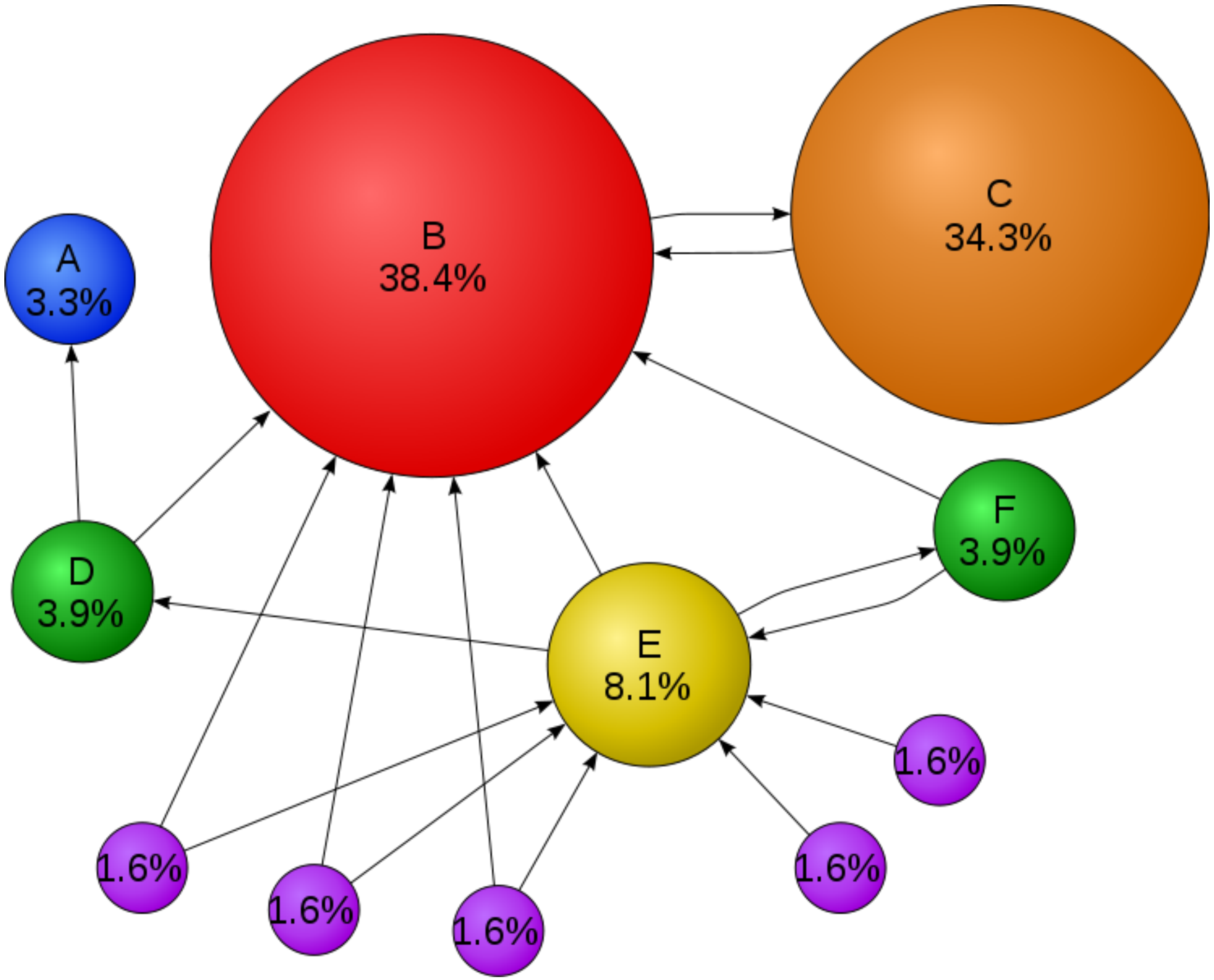
Facebook


facebook
E-mail ou telefone
Senha
Entrar
Permanecer conectado
Esqueceu sua senha?
No Facebook você pode se conectar e compartilhar o que quiser com quem é importante em sua vida.
Abra uma conta
É gratuito e sempre será.
Nome
Sobrenome
E-mail ou número do celular
Insira novamente o e-mail ou o celular
Nova senha
Aniversário
Dia
Mês
Ano
Por que preciso informar minha data de nascimento?
Feminino
Masculino
Ao clicar em Abrir uma conta, você concorda com os nossos Termos e que leu a nossa Política de Dados, incluindo o nosso Uso de Cookies.
Abrir uma conta

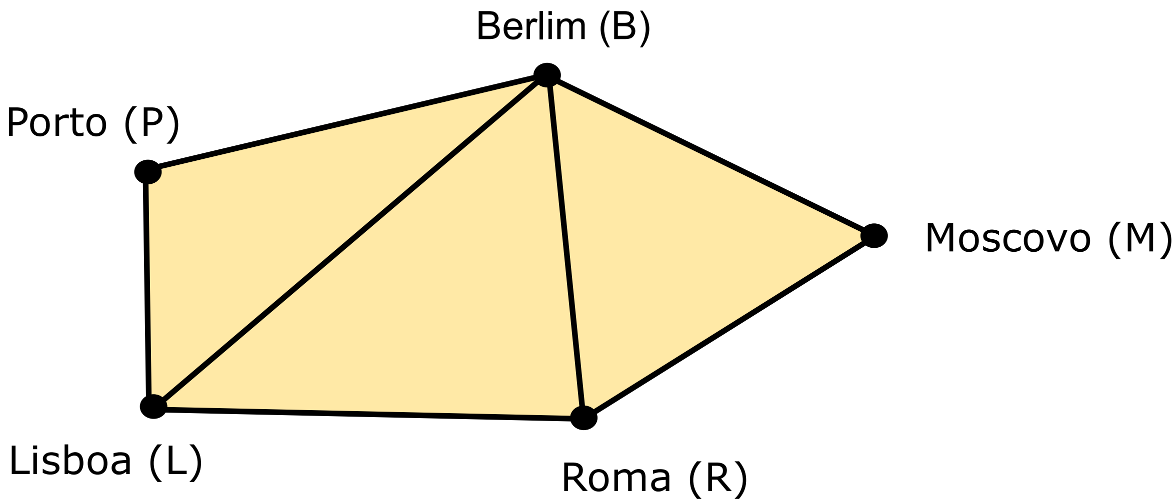
Modelos químicos



Pesquisa Google



Linhas aéreas sem escalas



Questões:

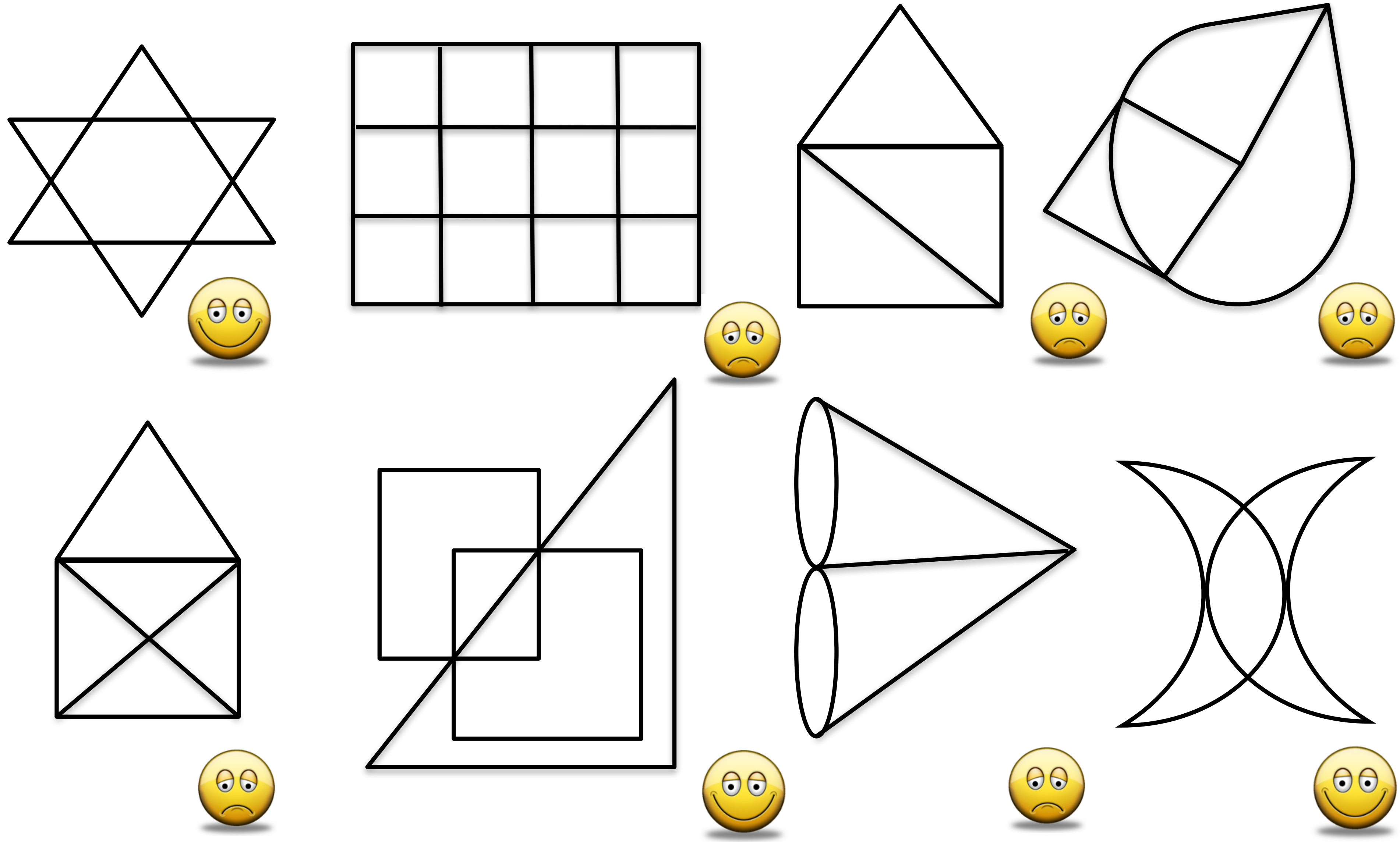
1. Quantos vértices tem o grafo?
2. E quantas arestas?
3. Existe um voo sem escalas entre Porto e Roma?
4. Indica um trajecto entre Moscovo e Lisboa.
5. Indica um exemplo de um circuito.
6. Indica um exemplo de um trajecto de Euler.

A descoberta de Euler (1736)

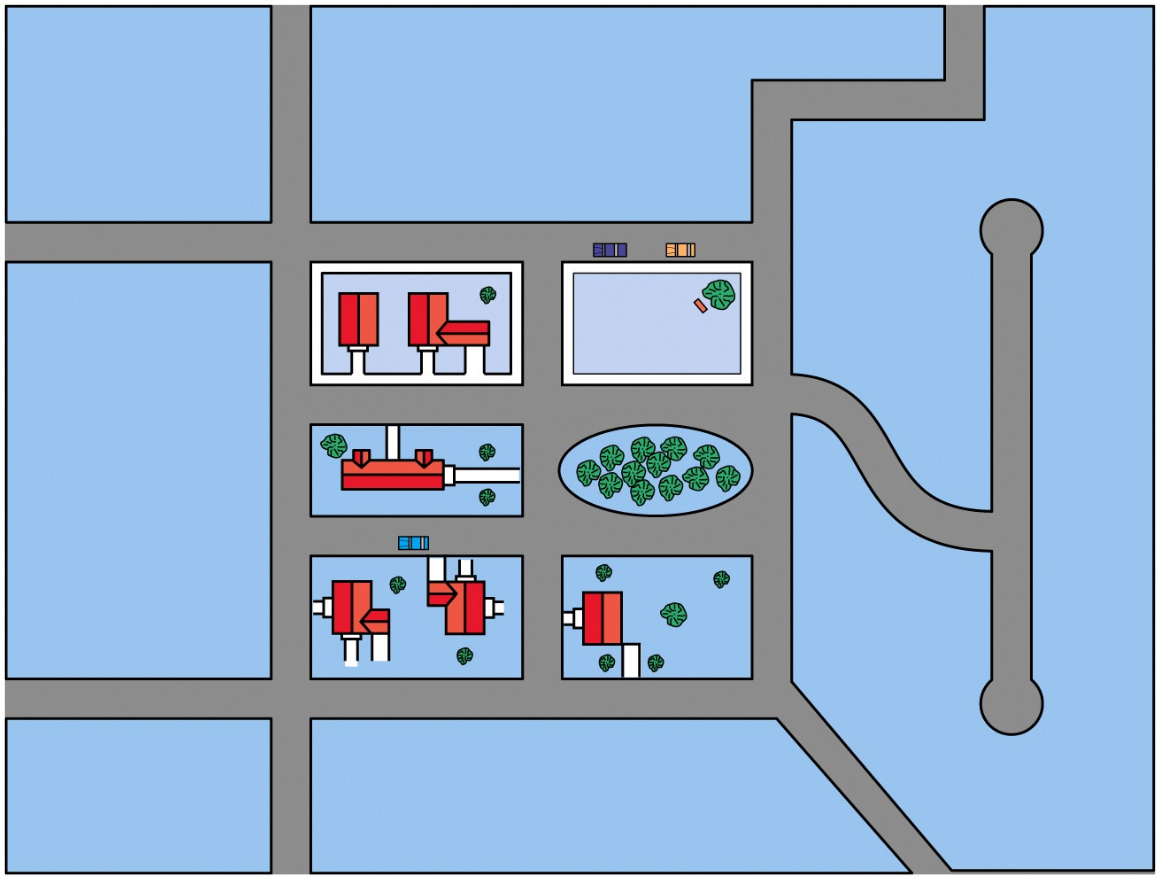
Um grafo admite um circuito de Euler se e somente se todos os seus vértices têm valência par.

Um grafo admite um trajecto de Euler se e somente se não possuir mais de dois vértices com valência ímpar.

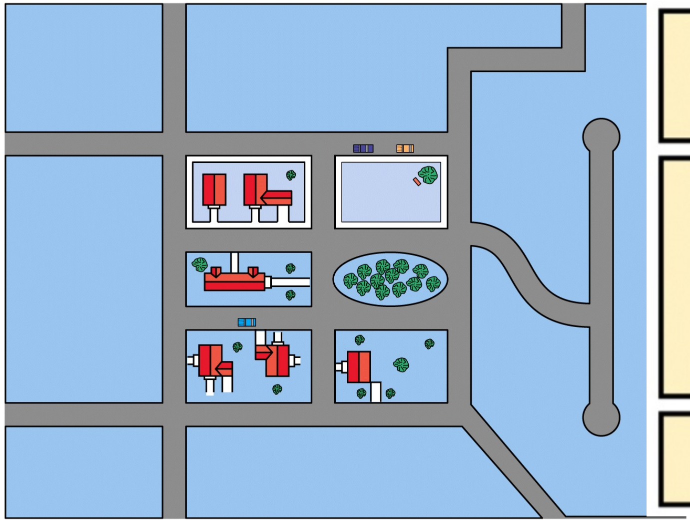
Circuitos de Euler

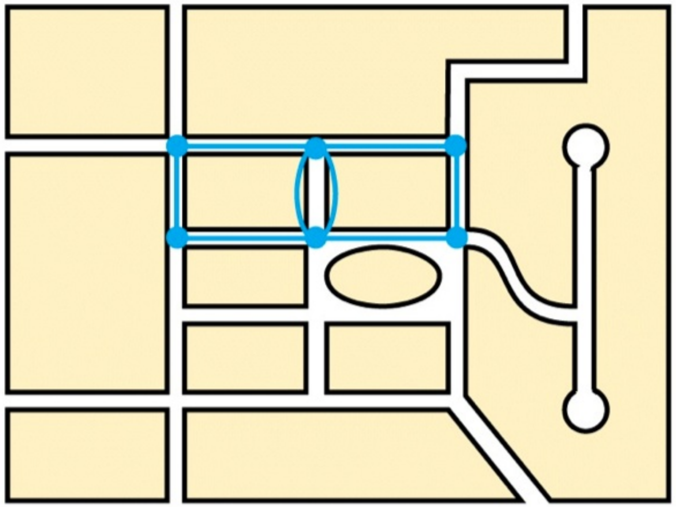


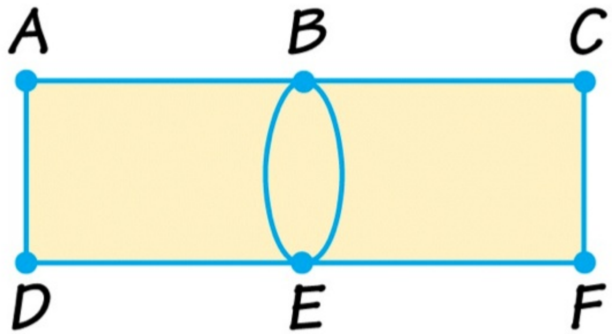
Circuitos de Euler



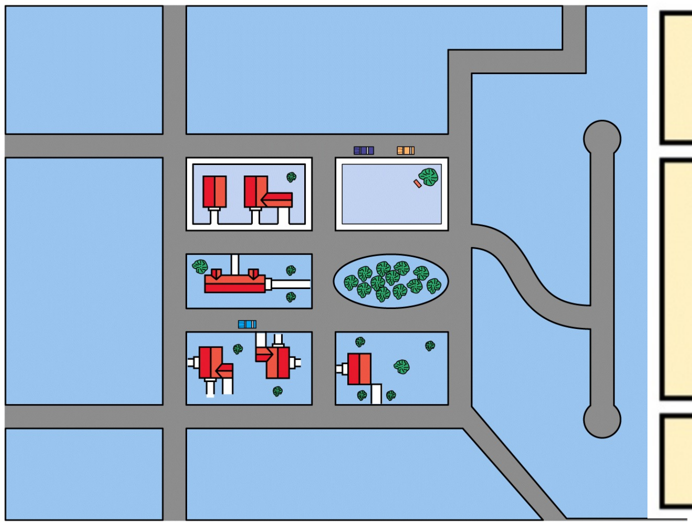
Circuitos de Euler

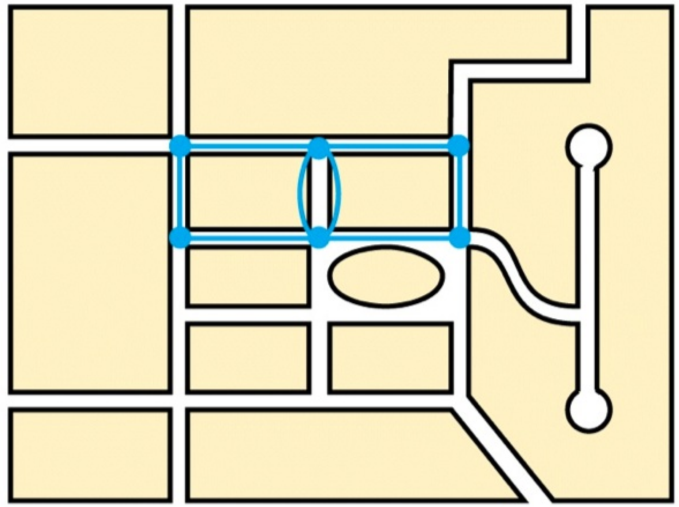


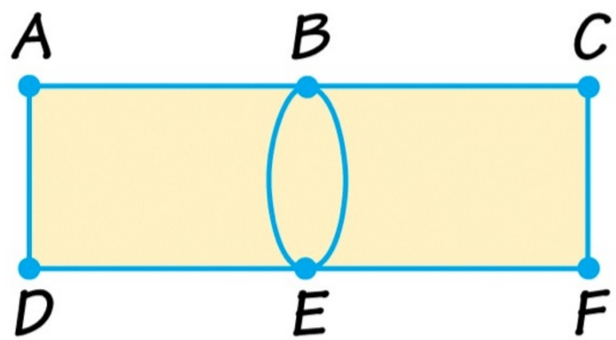


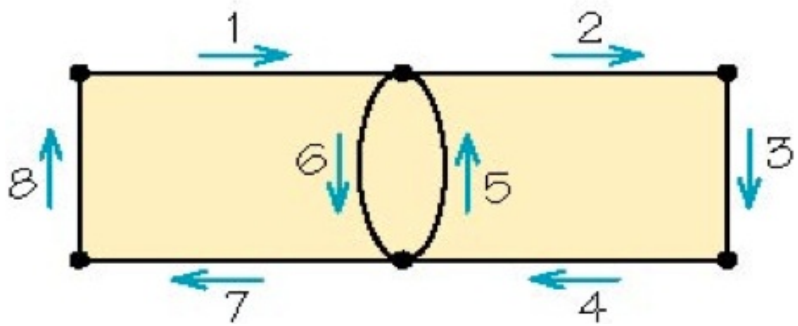


Circuitos de Euler

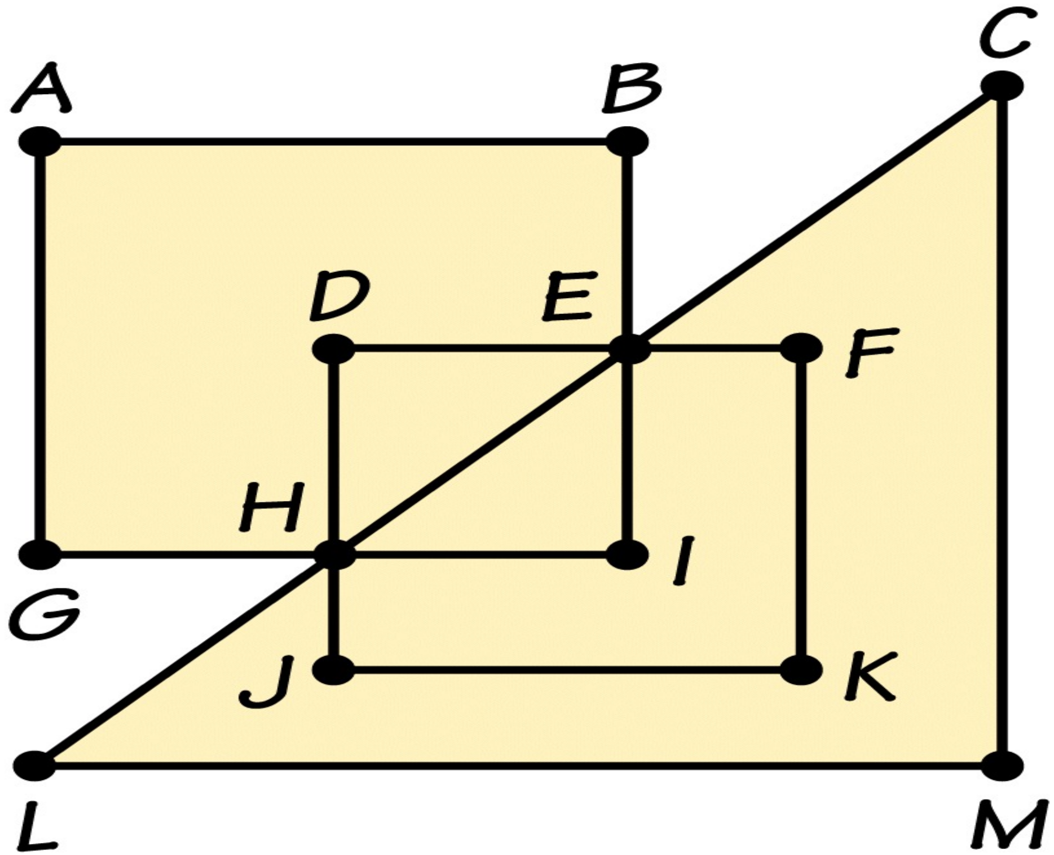




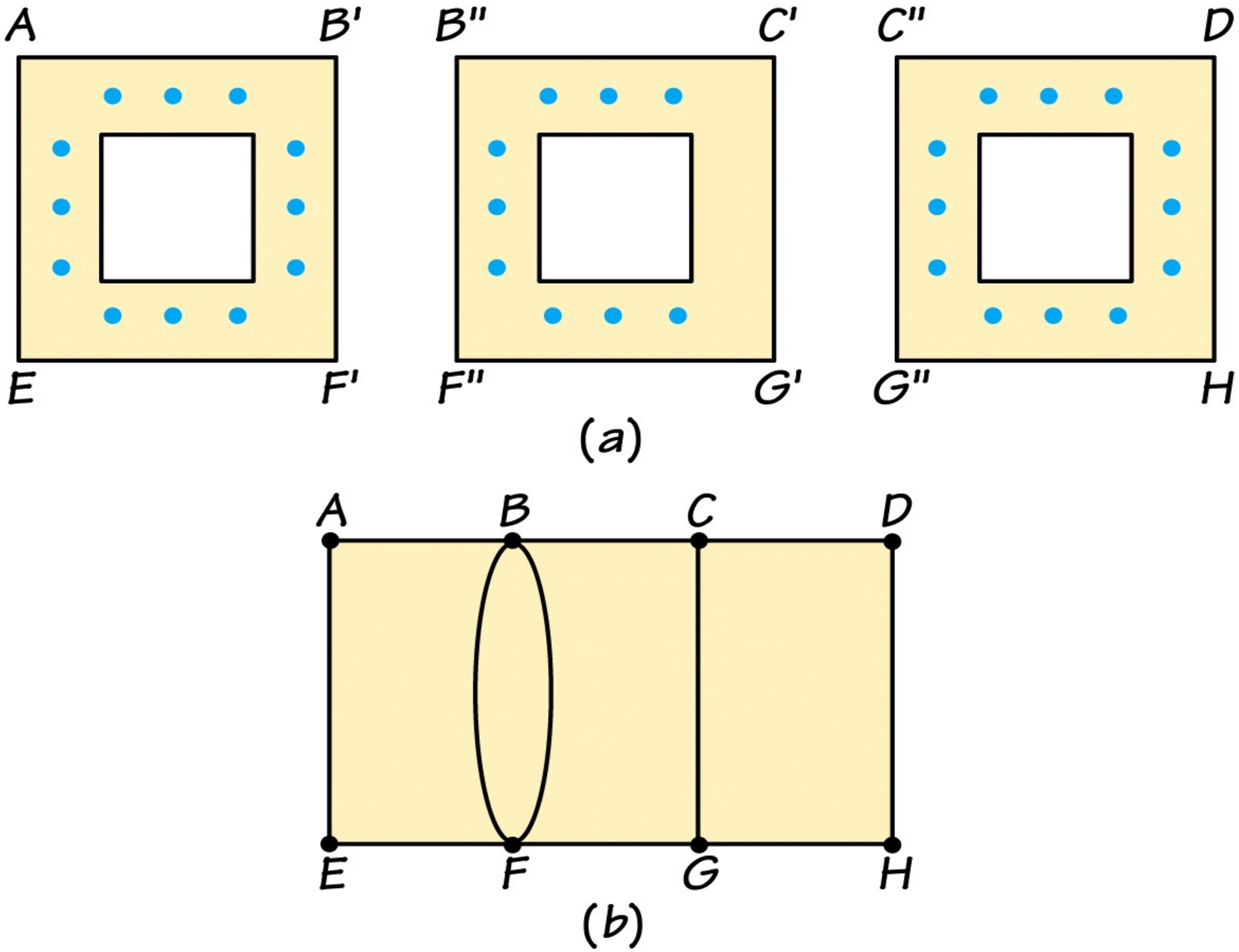




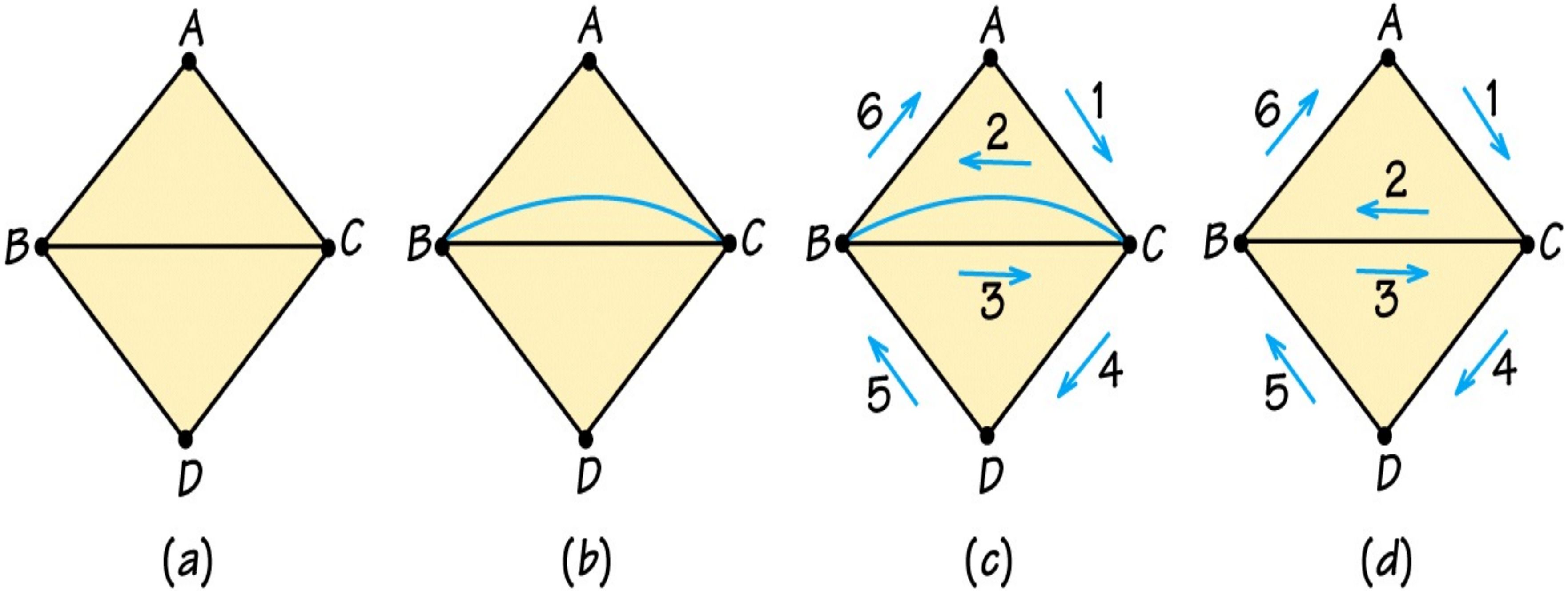
Circuitos de Euler



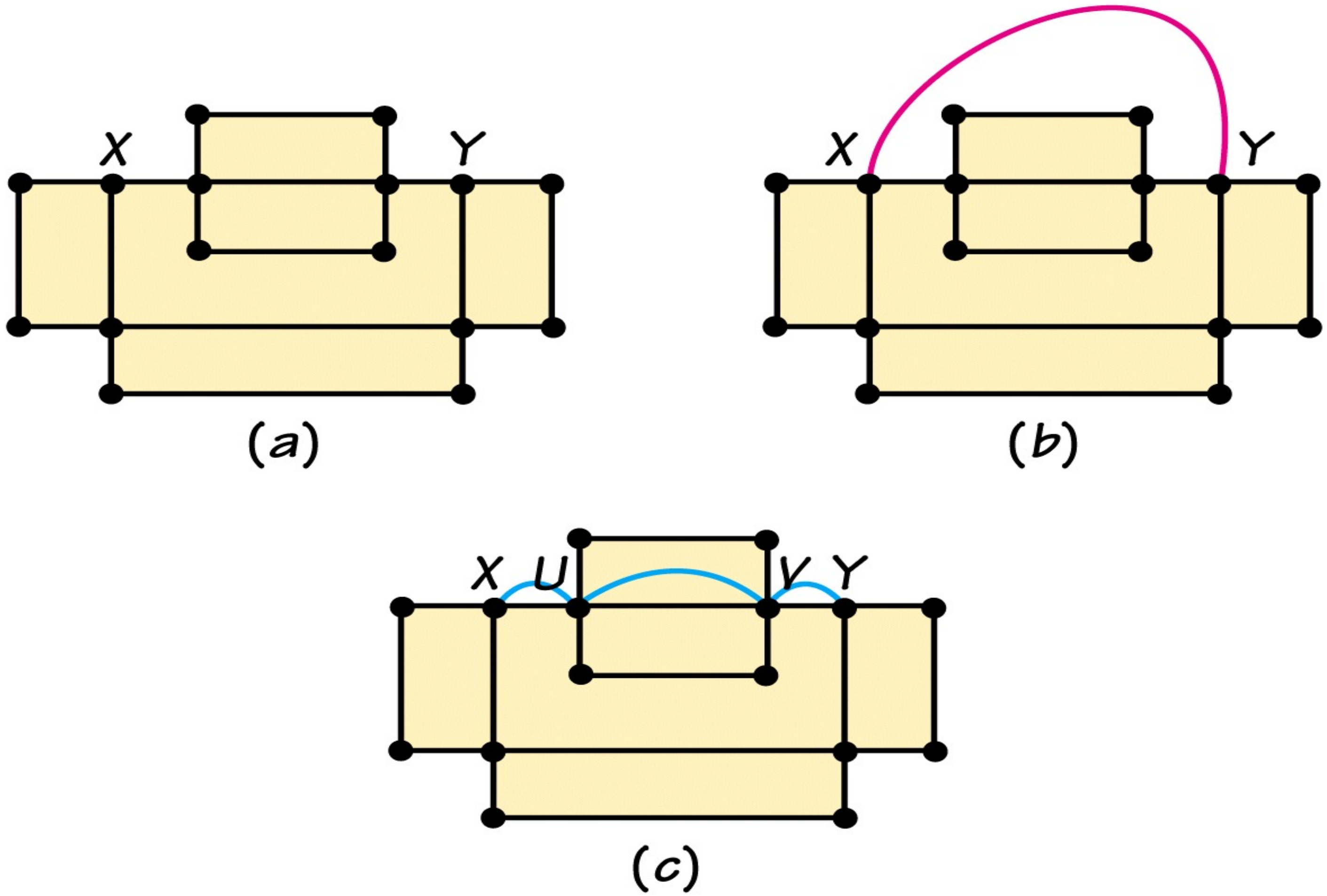
Circuitos de Euler



Eulerização

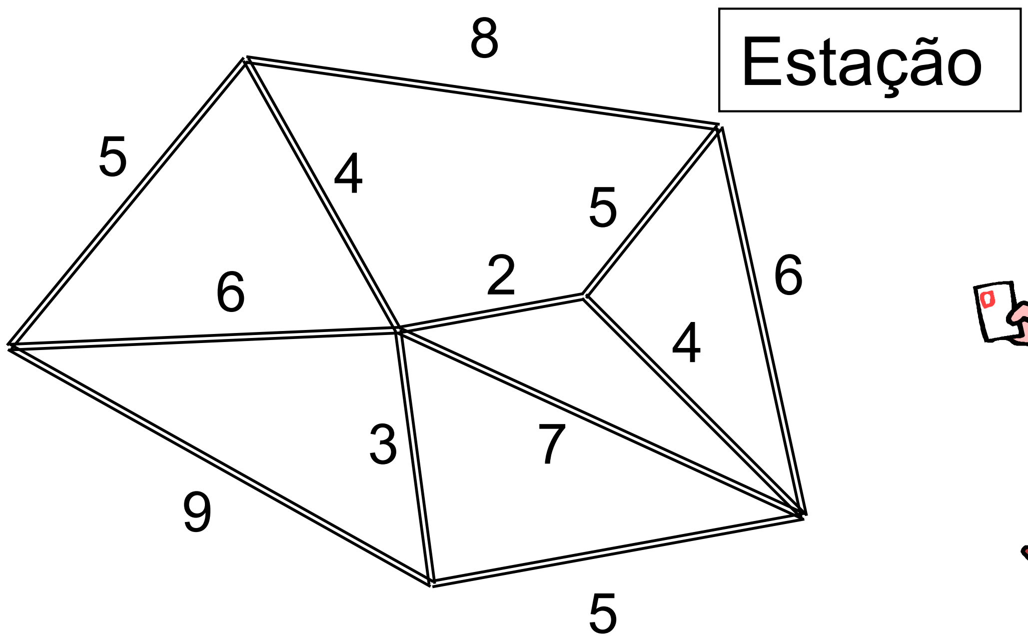


Eulerização



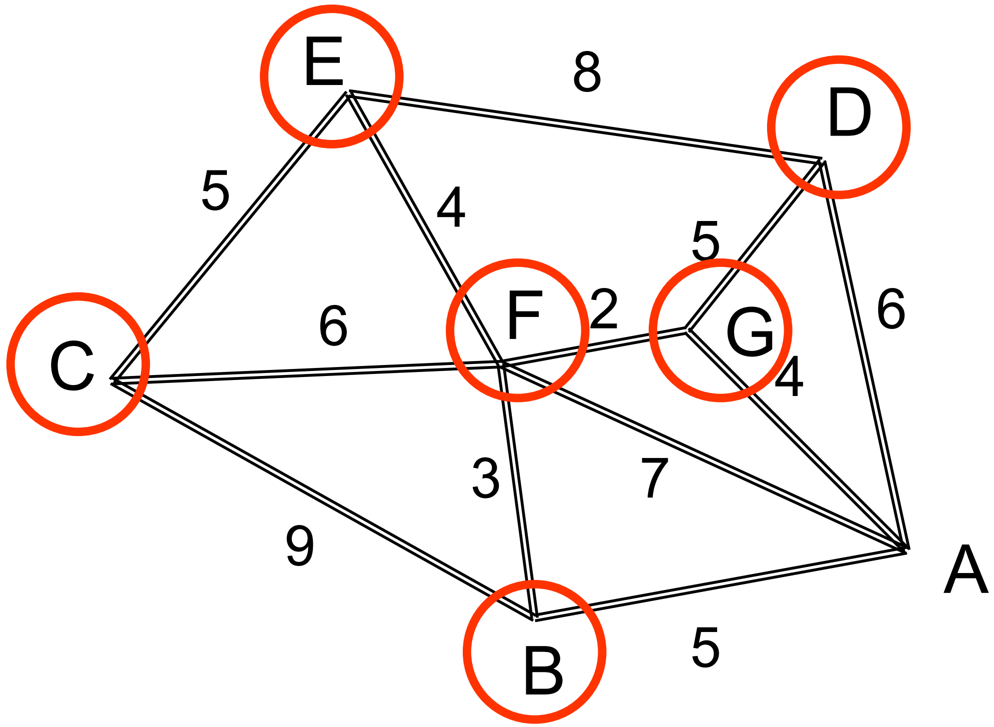
O problema do carteiro chinês

Um carteiro inicia a sua ronda na estação dos correios. Ele tem que entregar as cartas em todas as ruas e regressar à estação. Qual o caminho mais curto?

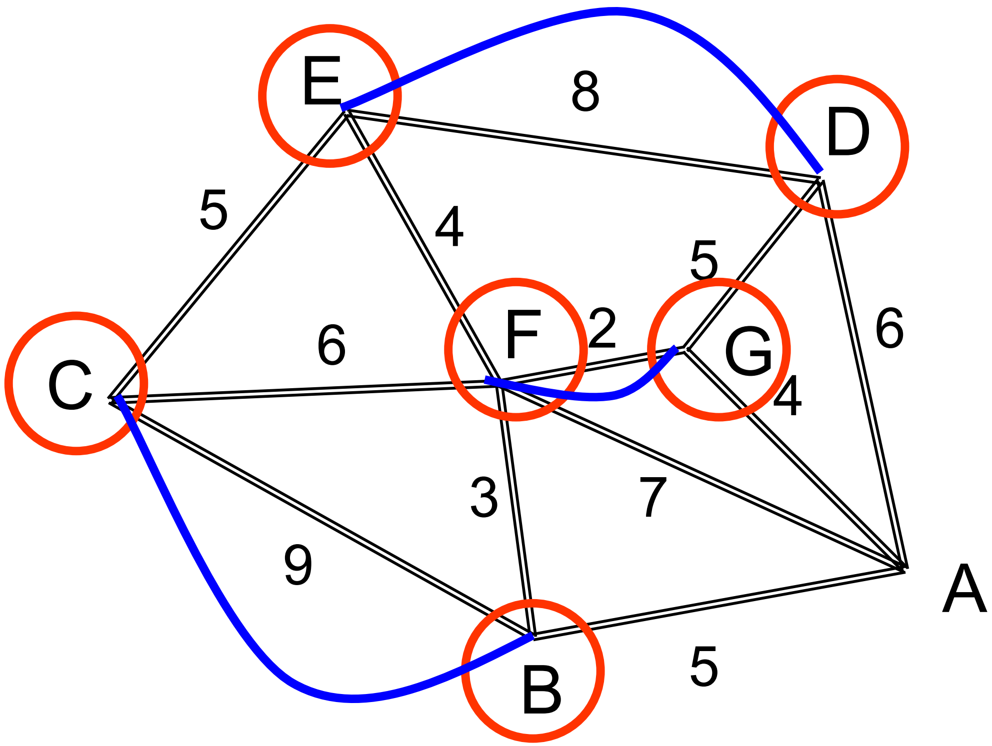


Mei Ko Kwan (1962)

Identificar as valências ímpares…



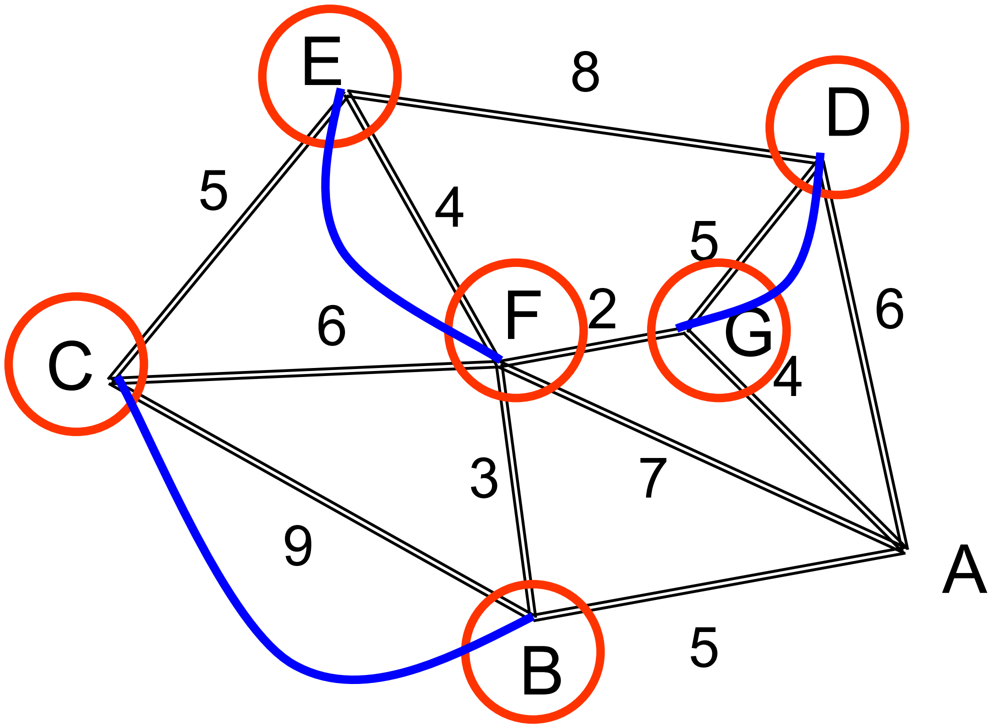
Eulerizar o grafo…



BC, DE, FG tem comprimento

9 + 8 + 2 = 19

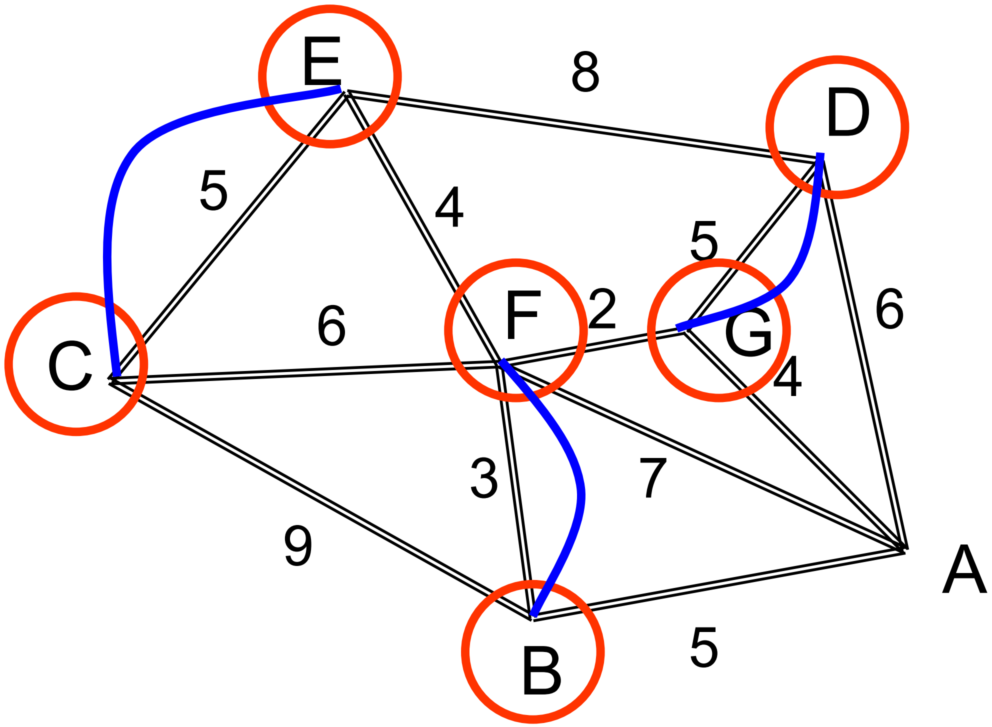
Outra possibilidade…



BC, EF, DG tem comprimento

9 + 4 + 5 = 18

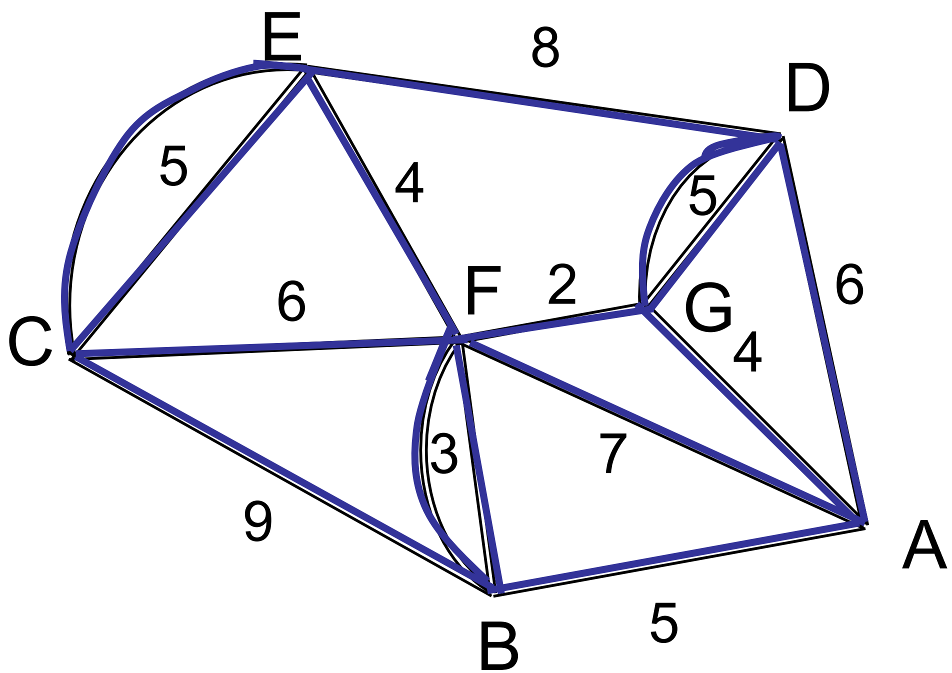
Eulerização óptima



BF, CE, DG tem comprimento

3 + 5 + 5 = 13

Eulerização óptima



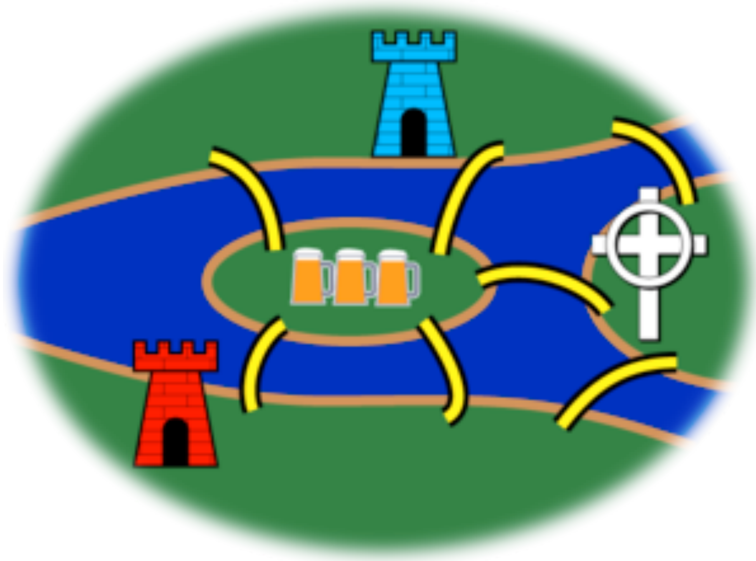
O comprimento total é

= 64 + 13

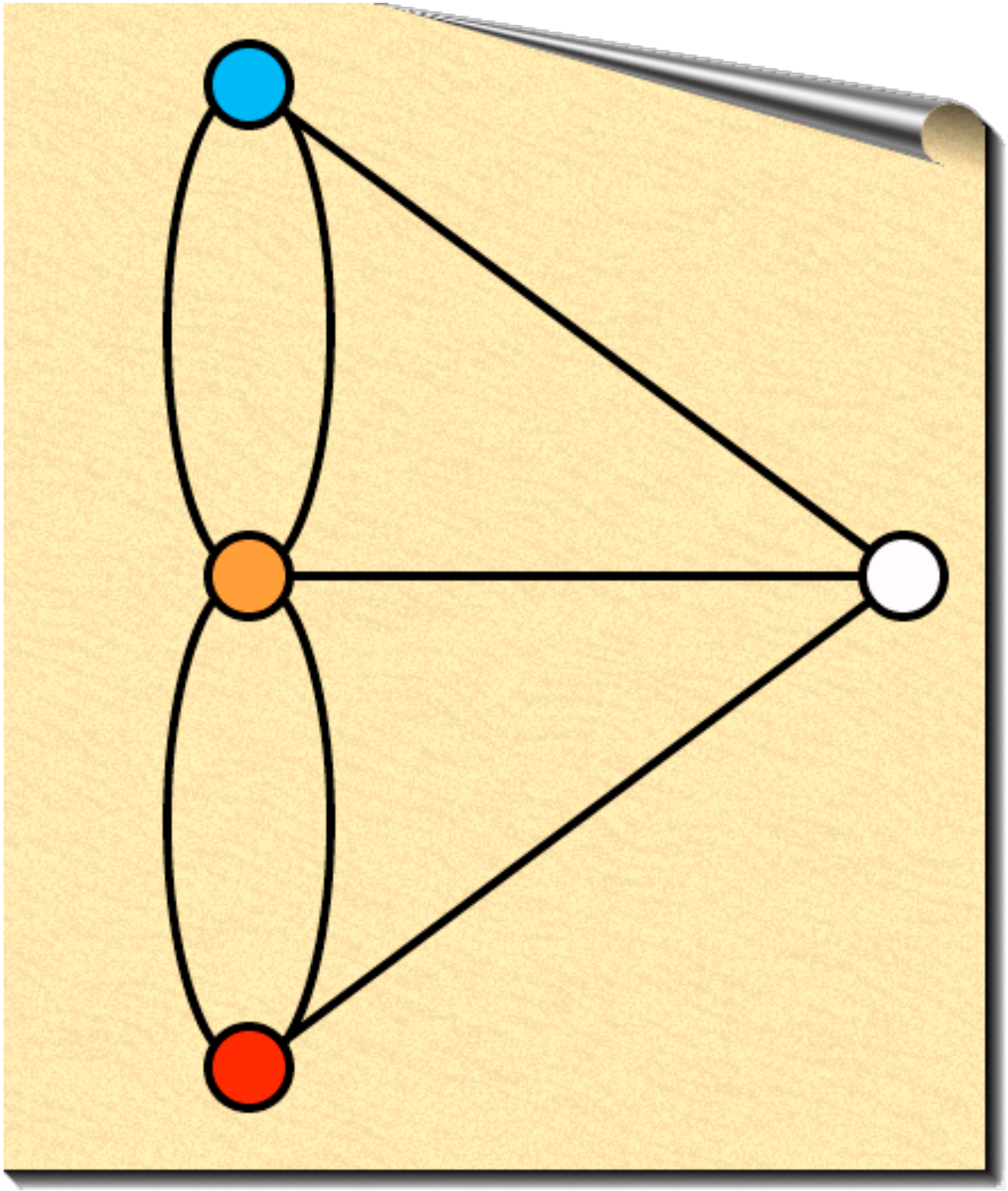
= 77

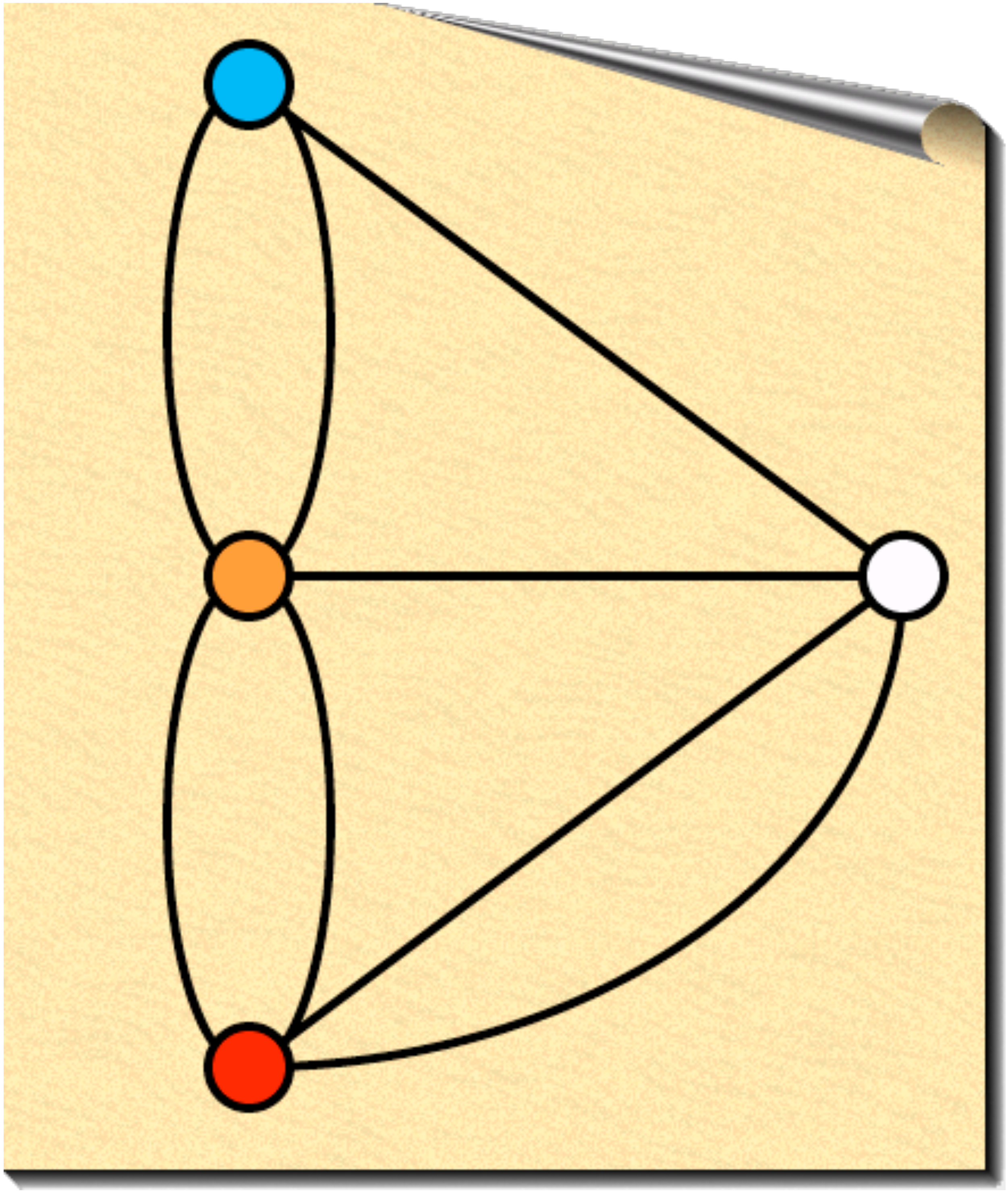
Um percurso possível é: DGFAGDABFBCECFED

De regresso a Königsberg…

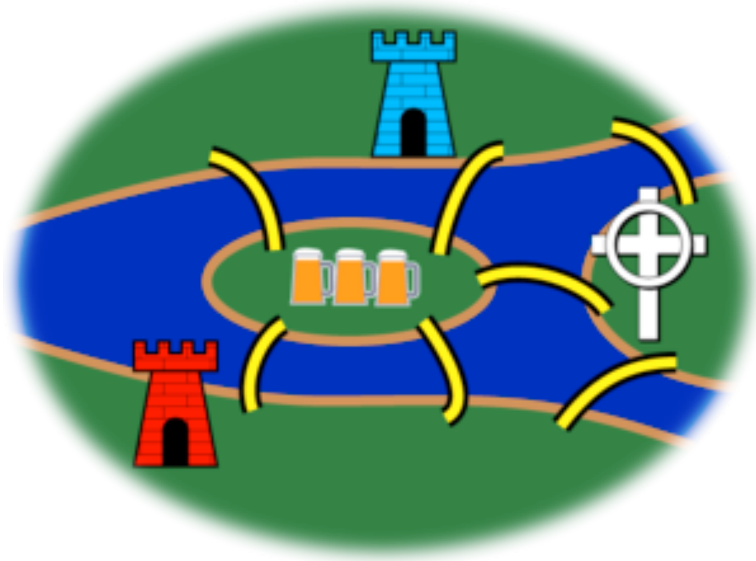


O Príncipe Azul quer visitar todas as pontes começando no seu castelo e terminando na *Gasthaus*, a pousada. Que nova ponte deve ele construir?



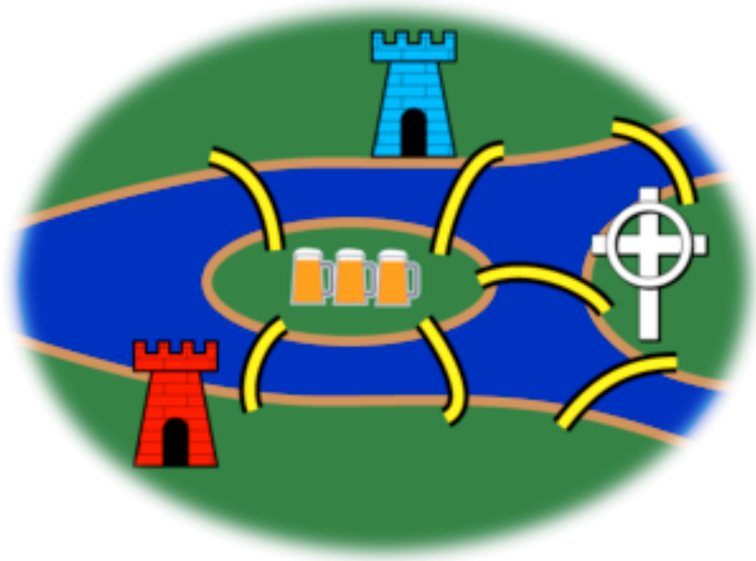


De regresso a Königsberg…



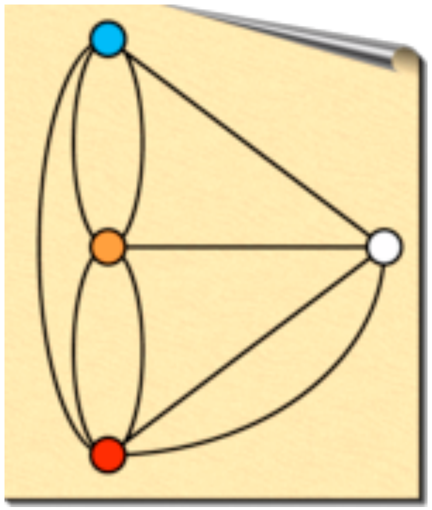
9 pontes: O Princípe Vermelho, furioso com os acontecimentos, quer construir uma nona ponte por forma a poder ir do seu castelo até à pousada, passando por todas as pontes, e impedir que o Princípe Azul faça o mesmo.

De regresso a Königsberg…

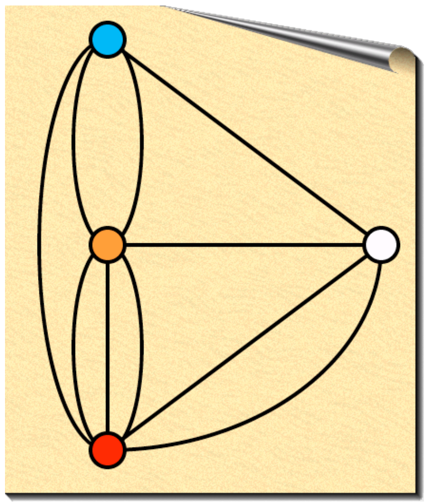


10 pontes: O Bispo, indisposto com toda esta construção de pontos e excesso de bebida, quer construir uma décima ponte por forma a que todos possam regressar a casa (i.e., por forma a conseguir um circuito de Euler).

Soluções



9 pontes.

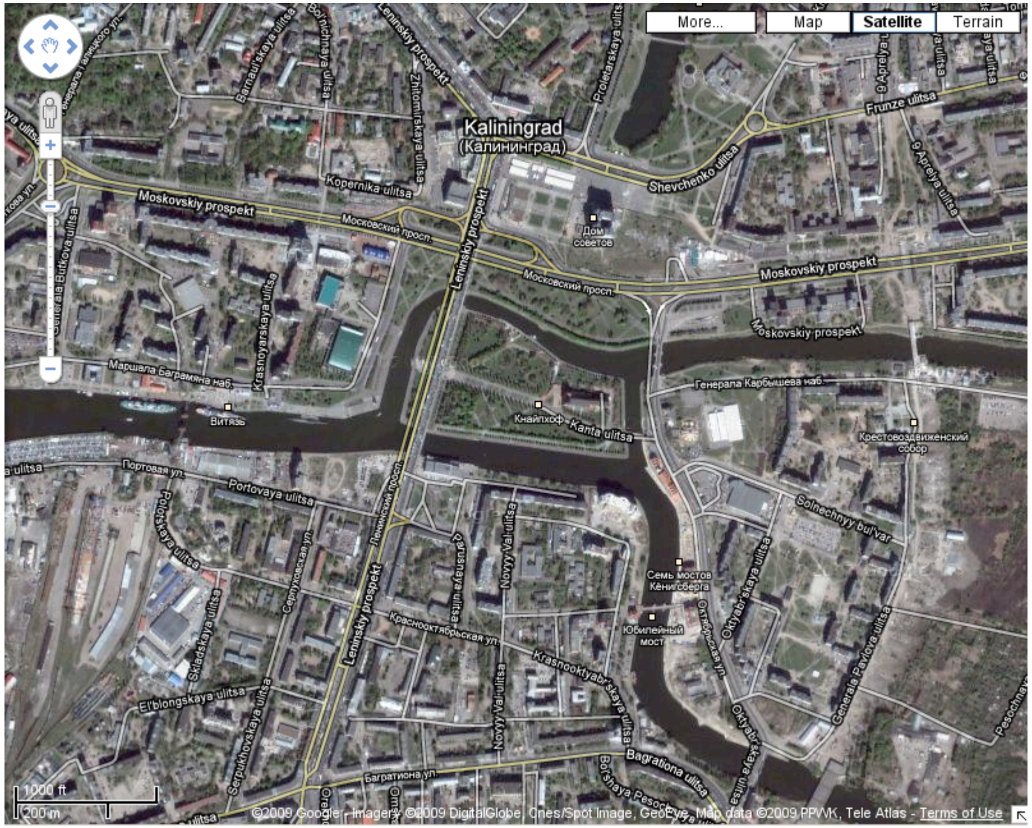


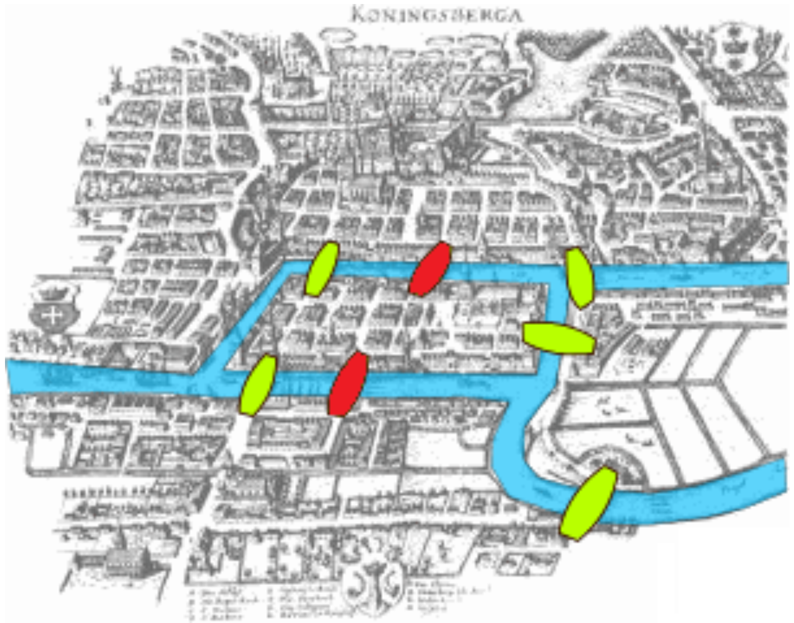
10 pontes.

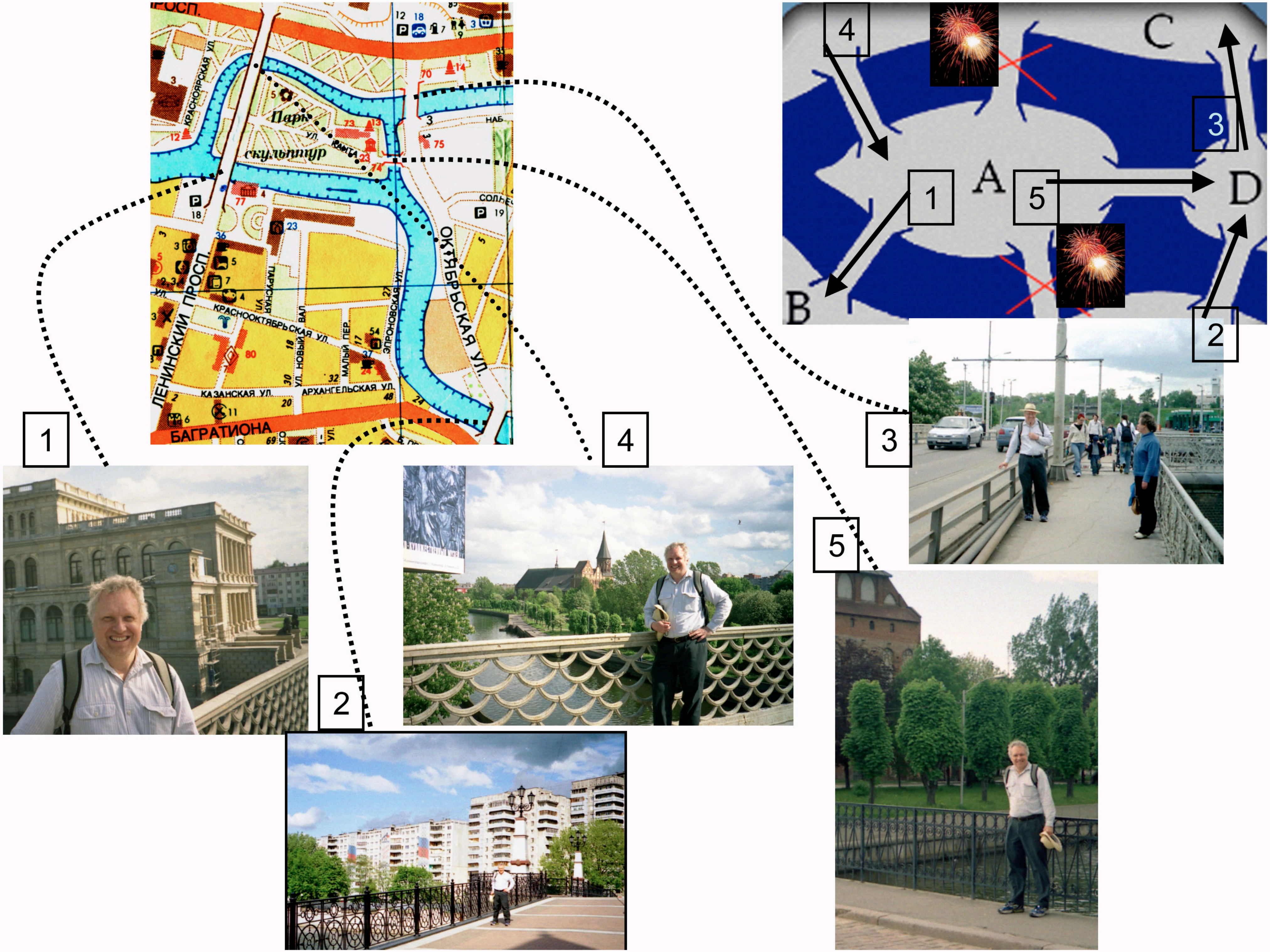
Outros problemas

- As pontes de Kaliningrado
- O problema do dominó
- O cavalo do xadrez
- Os apertos de mão
- O problema do caixeiro-viajante
- O problema das quatro cores
- Grafos minimais
- O problema da galeria de arte

As pontes de Kaliningrado



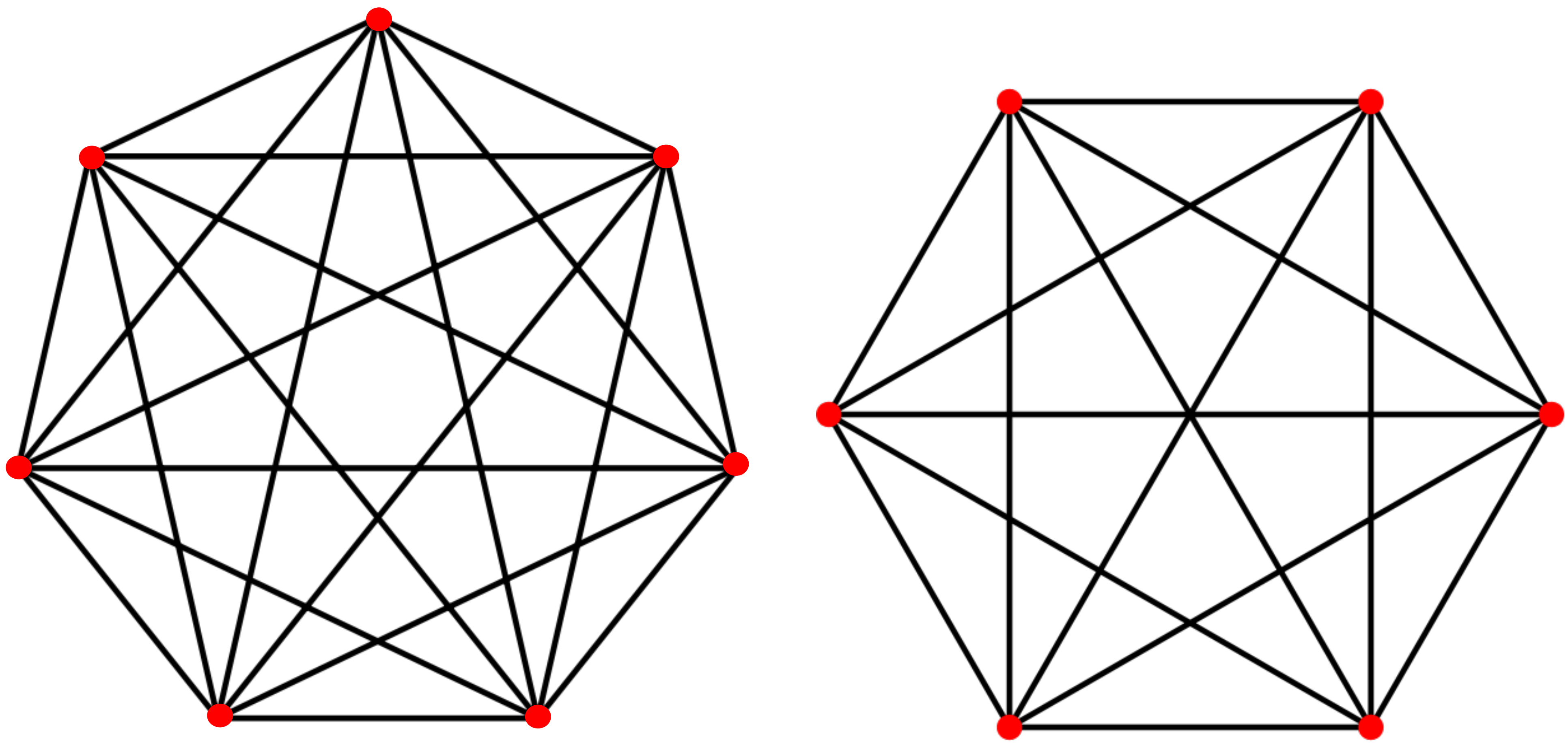



ПРОСП.
Парк
скульптур
КРАСНОЯРСКАЯ УЛ.
ЛЕНИНСКИЙ ПРОСП.
ОКТЯБРЬСКАЯ УЛ.
КРАСНООКТЯБРЬСКАЯ УЛ.
КАЗАНСКАЯ УЛ.
АРХАНГЕЛЬСКАЯ УЛ.
БАГРАТИОНА
A
B
C
D
1
2
3
4
5

O problema do dominó

Porque é possível fechar o dominó usando todas as suas peças?

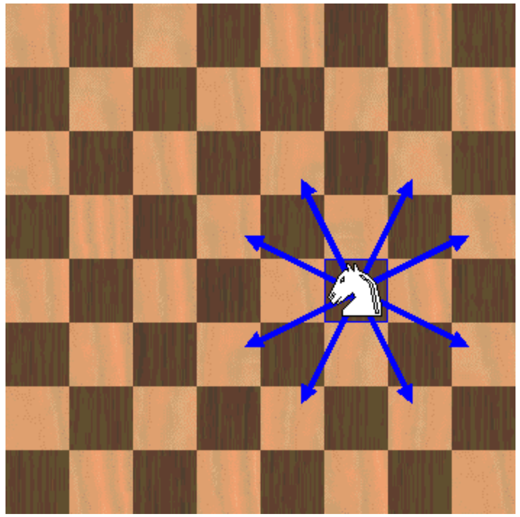
Louis Poinsot (1809)

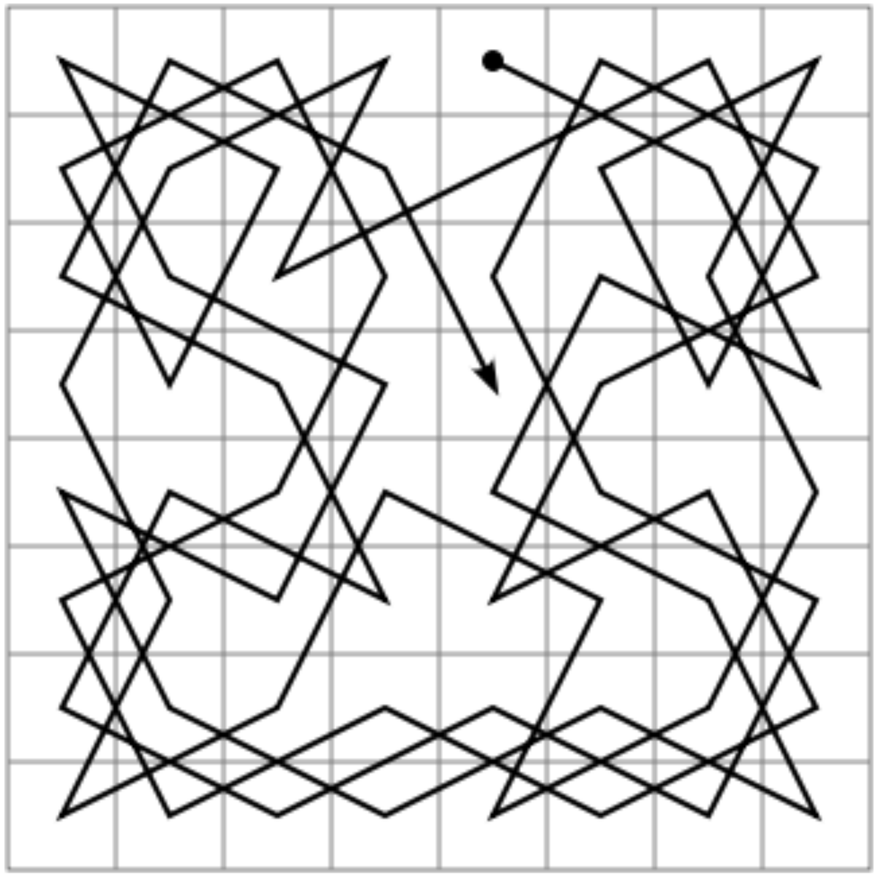


Grafos completos

O cavalo do xadrez

Dado um tabuleiro de xadrez, será possível, efectuando apenas movimentos com o cavalo (sem repetição), encontrar um circuito que una todos os quadrados do tabuleiro?

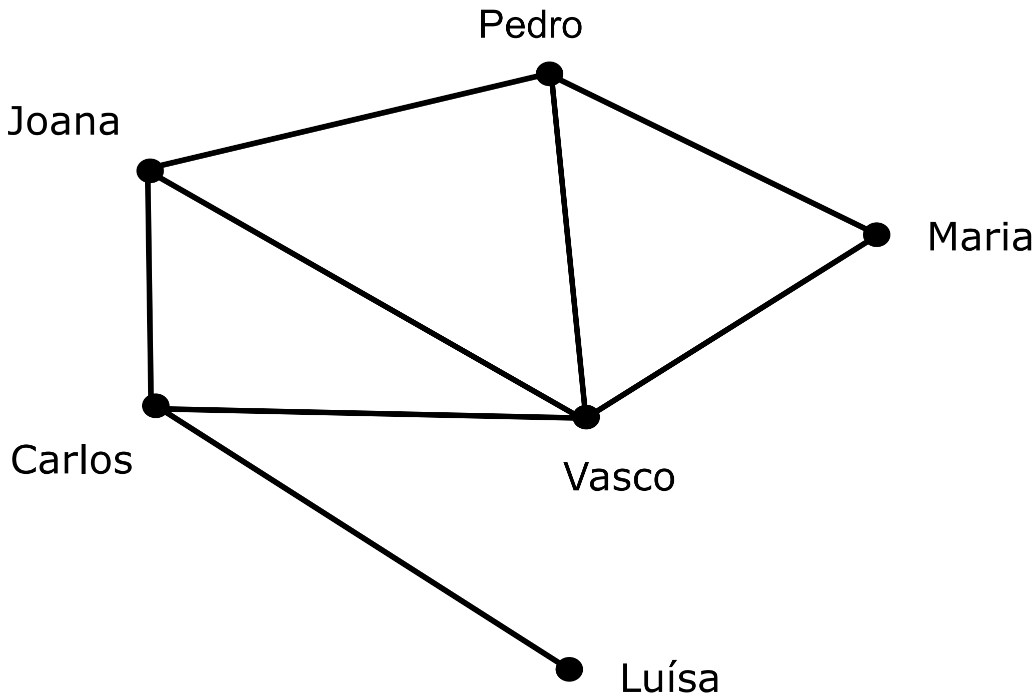




Os apertos de mão

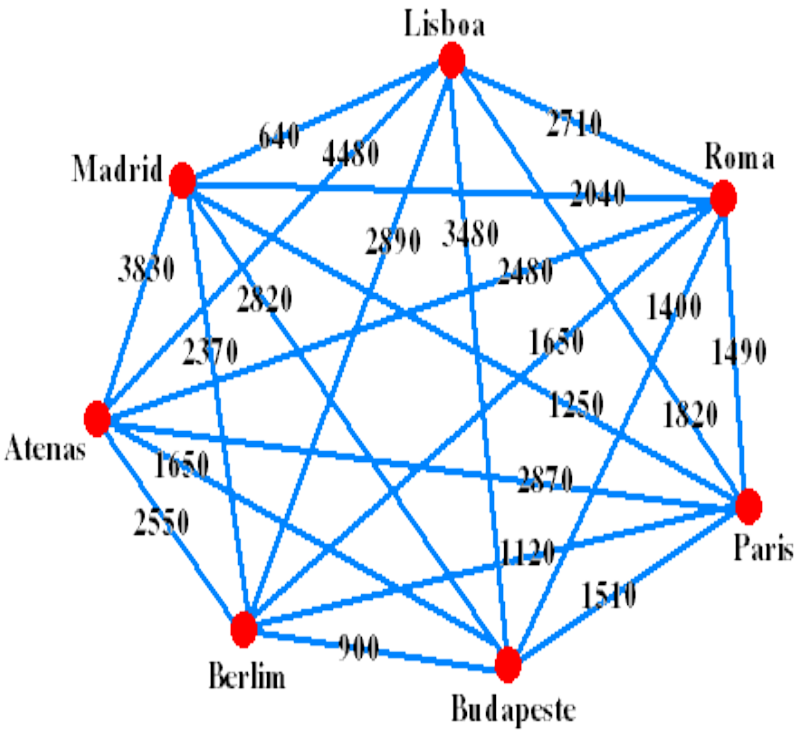
Se os convidados de uma festa apertarem as mãos quando se encontrarem pela primeira vez, o número de convidados que apertam a mão um número ímpar de vezes é par.

Leonhard Euler (1736)



Soma das valências = 1 + 3 + 3 + 3 + 2 + 4 = 16 (par)

O problema do caixeiro-viajante



William Hamilton (1859)

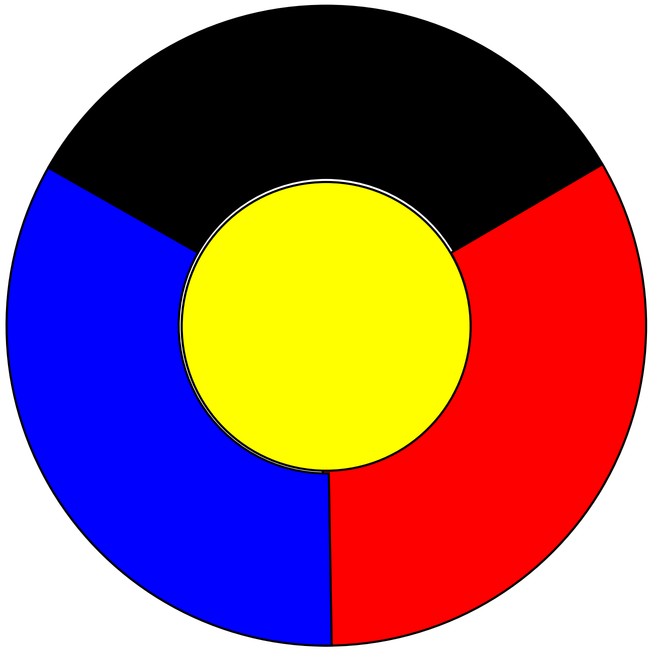
Lisboa–Madrid–Paris–Berlim–Budapeste–Atenas–Roma–Lisboa

Total = 640+1250+1120+900+1650+2480+2710 = 10750 km.

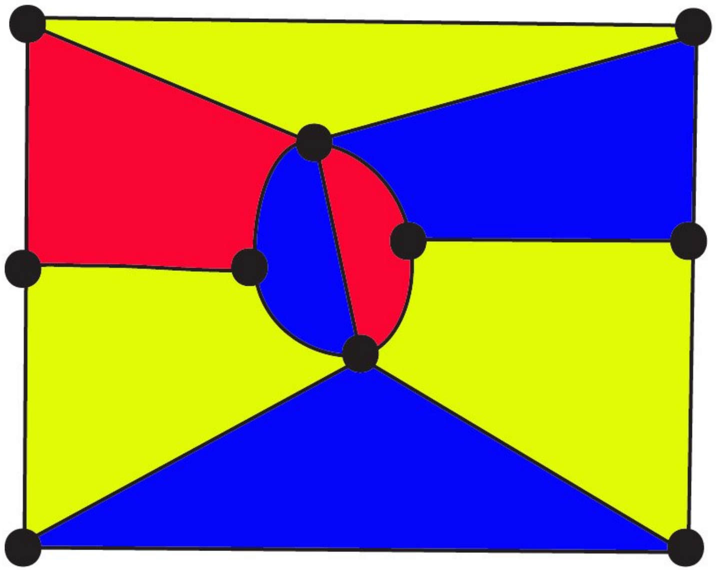
Ver: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes

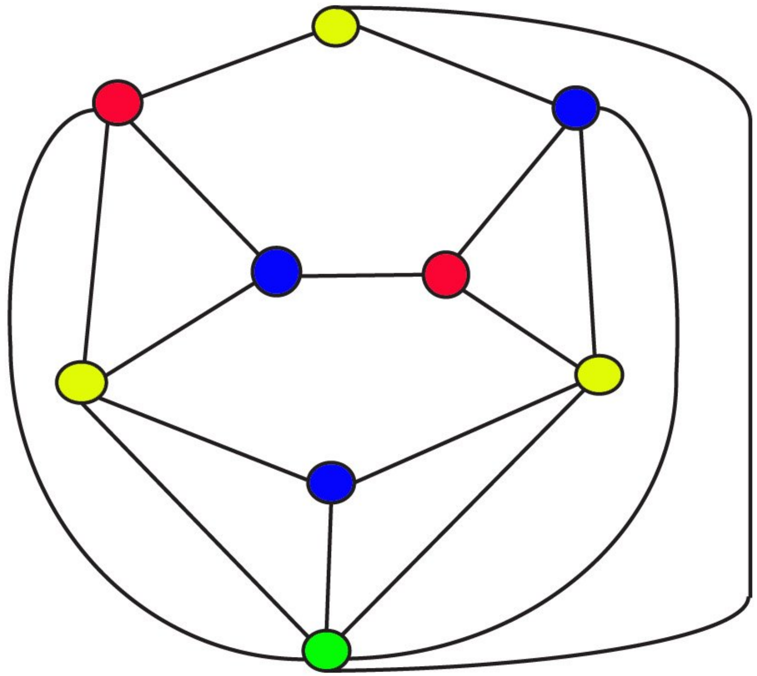
O problema das quatro cores

Proposto por Francis Guthrie em 1852, permaneceu mais de um século sem solução.

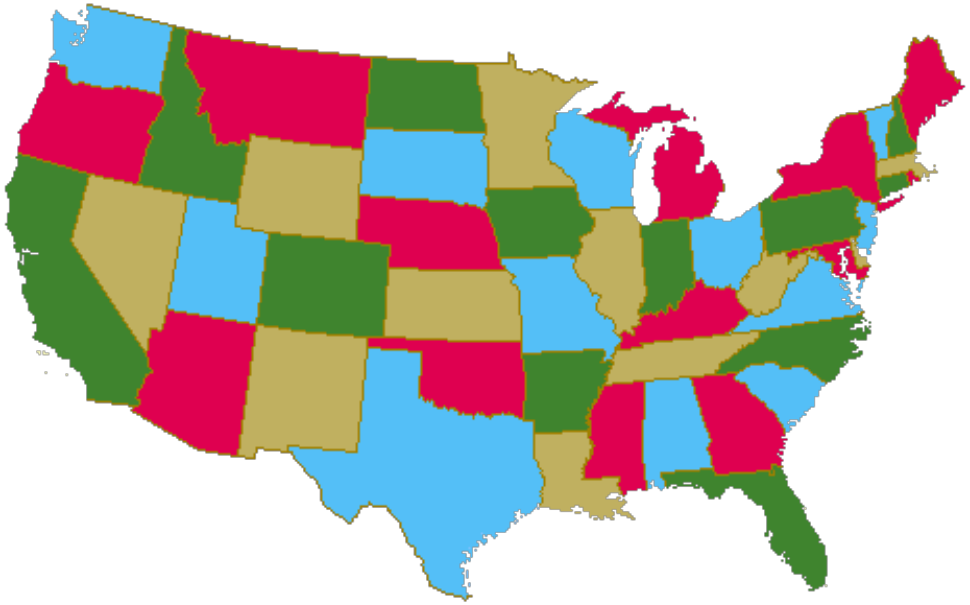


Três cores **não são** suficientes!



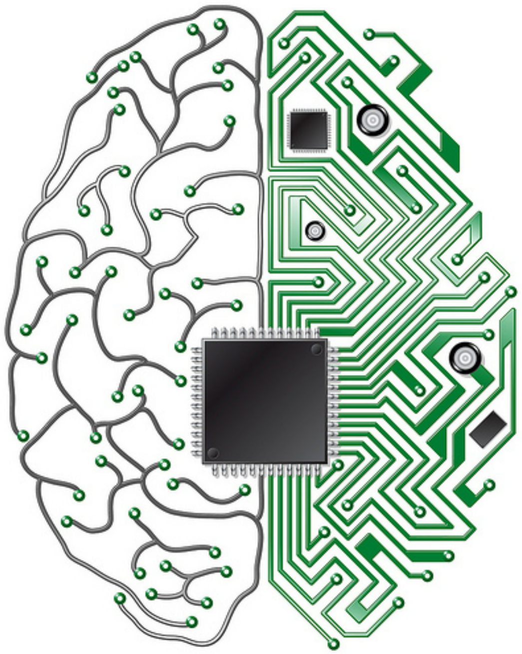


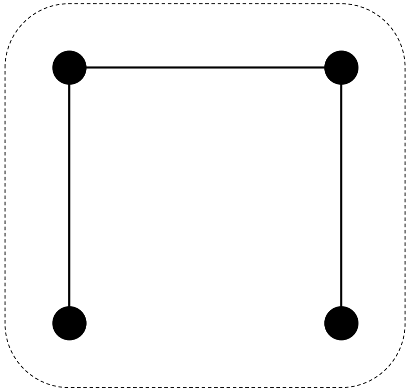
Quatro cores **são** suficientes!

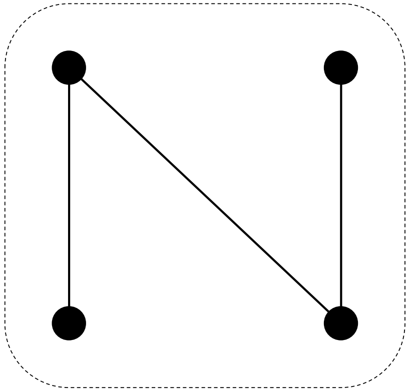


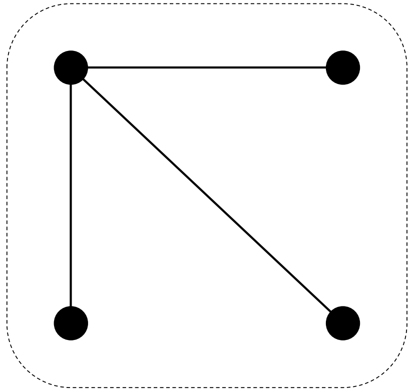
Grafos minimais

- Muitas vezes temos um conjunto de pontos e queremos encontrar o grafo mais pequeno que os une. Por exemplo
  - Estradas unindo cidades;
  - Cabos de telefone ou internet;
  - Gasodutos;
  - Circuitos eléctricos;
  - Neurónios no cérebro.



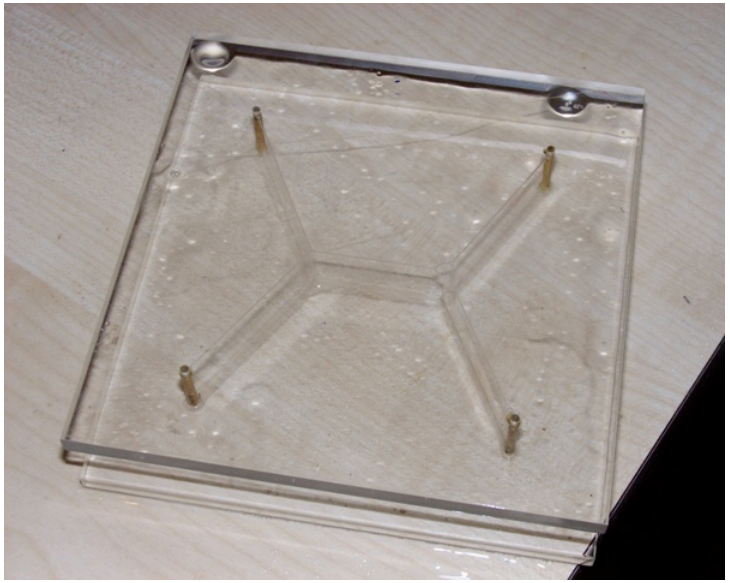


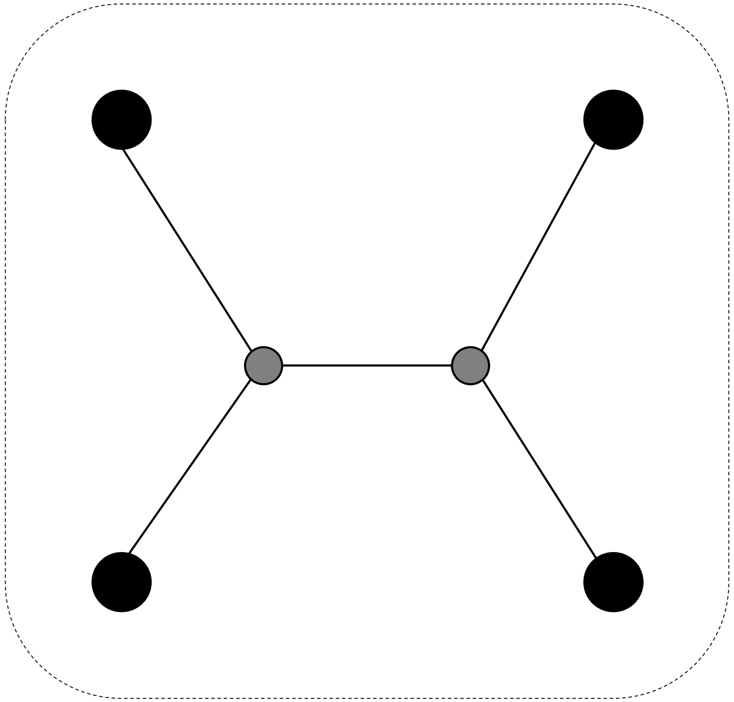




Qual o grafo minimal?

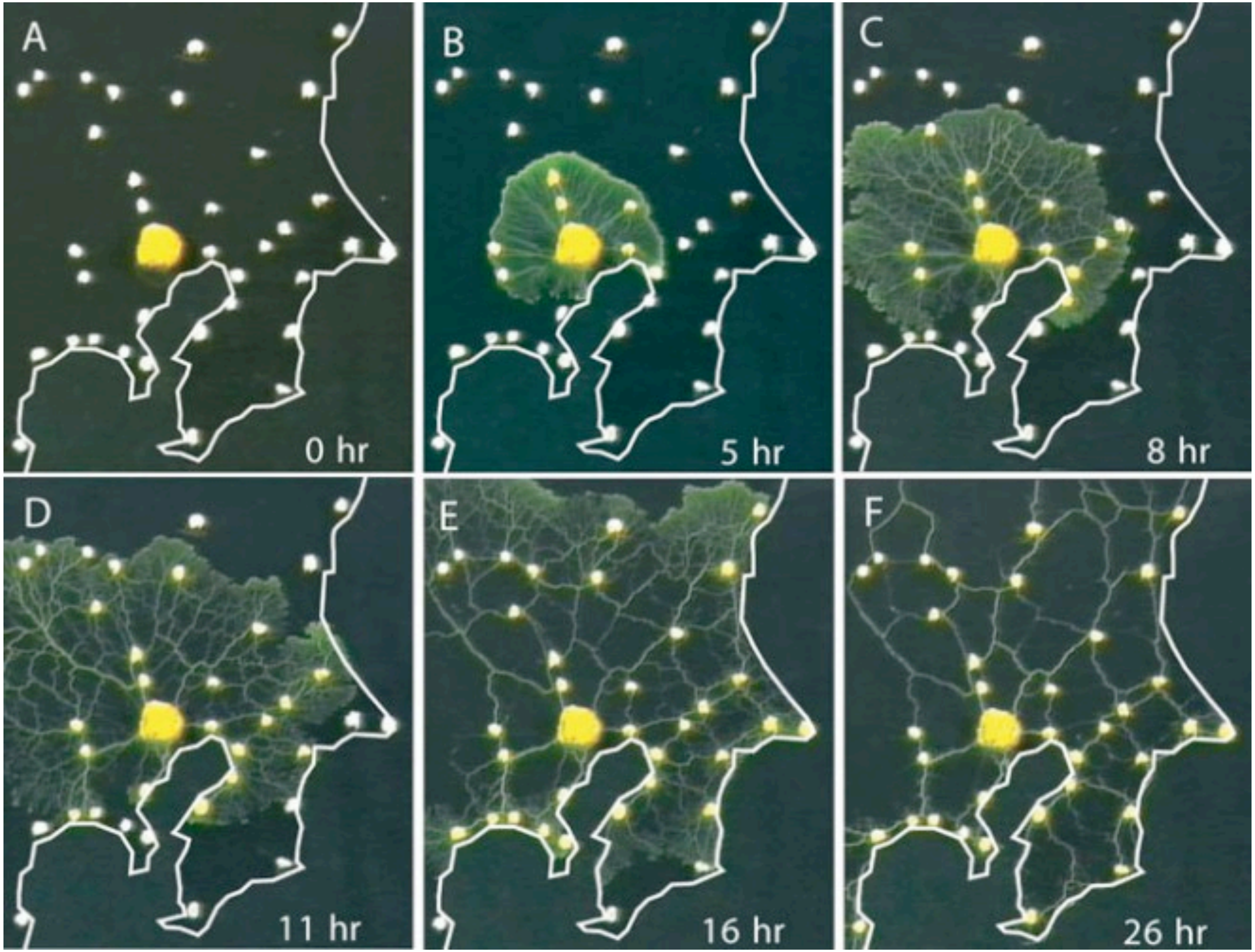
Solução das bolas de sabão

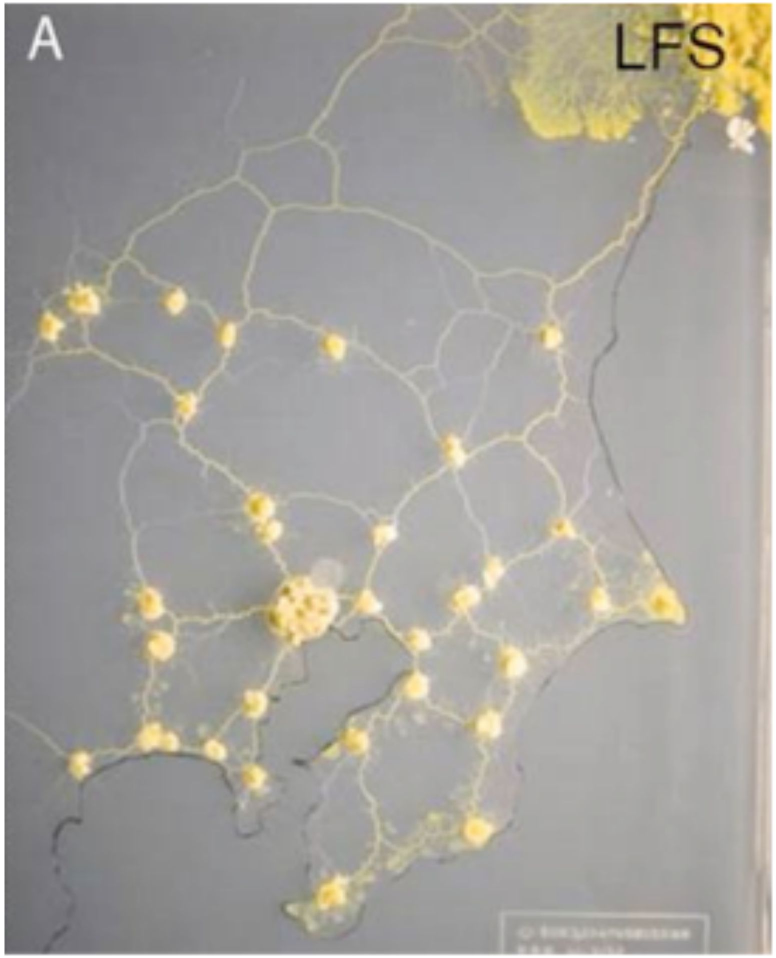




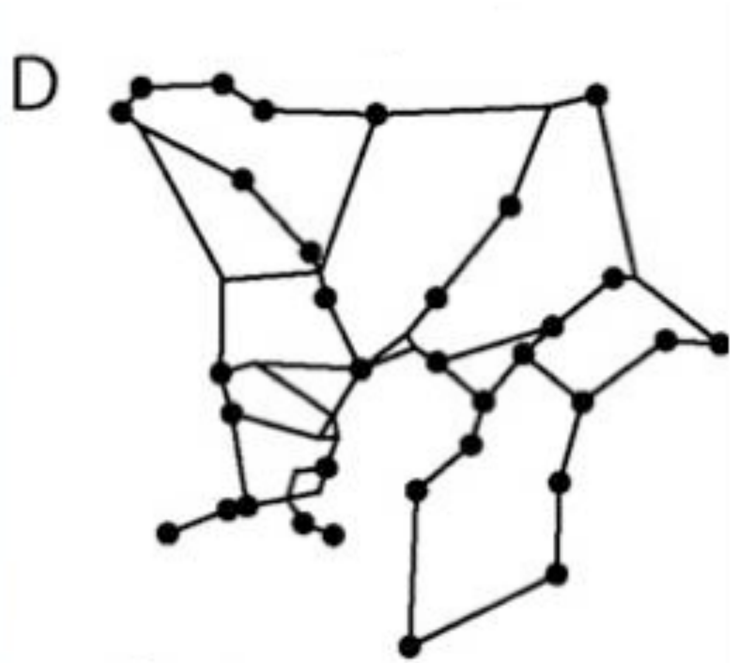
Grafo de Steiner

Redes de *slime mould*



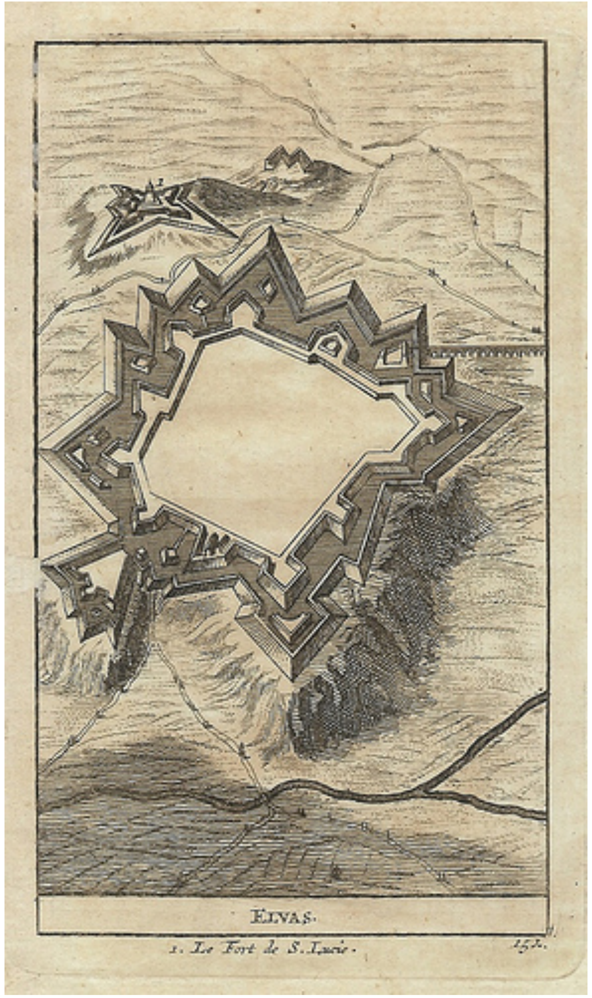


Slime mould

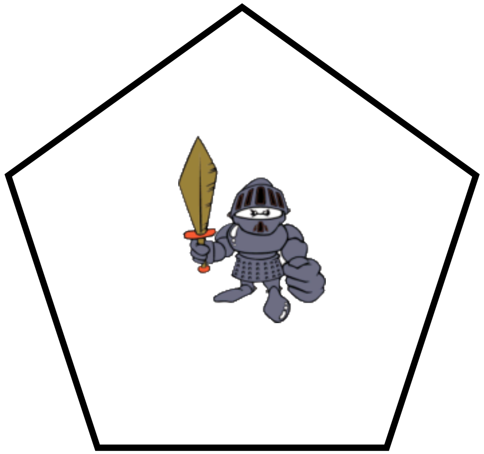


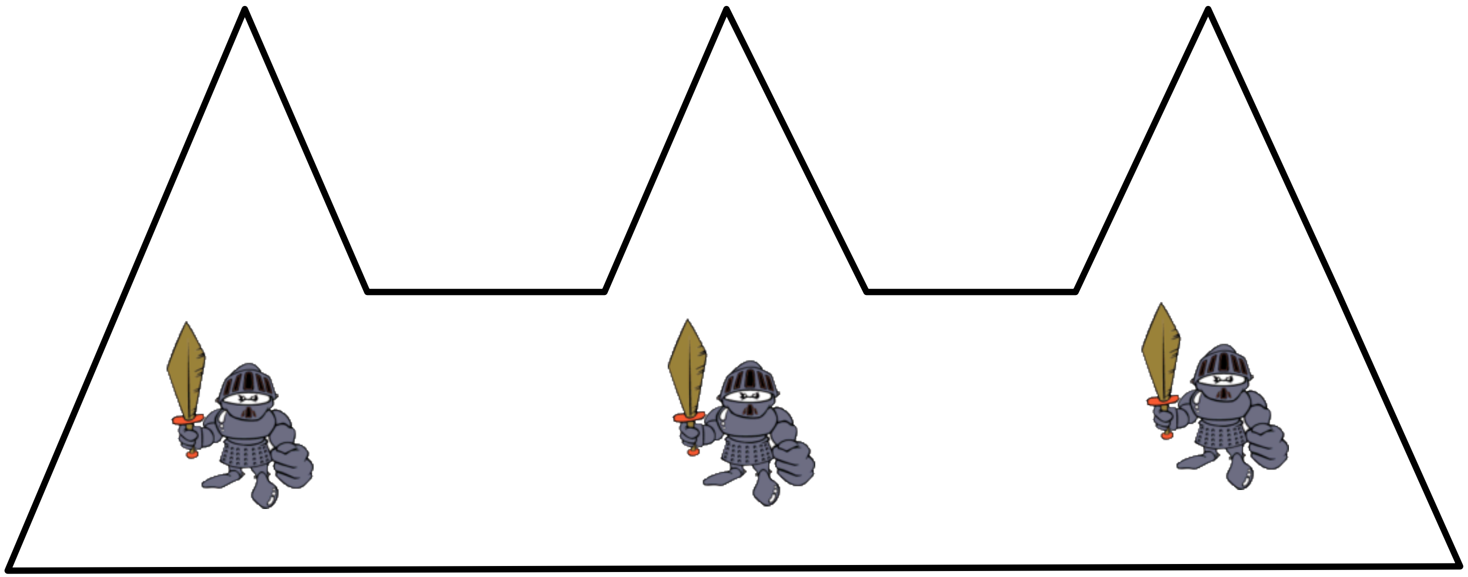
Rede ferroviária de Tóquio

O problema da galeria de arte

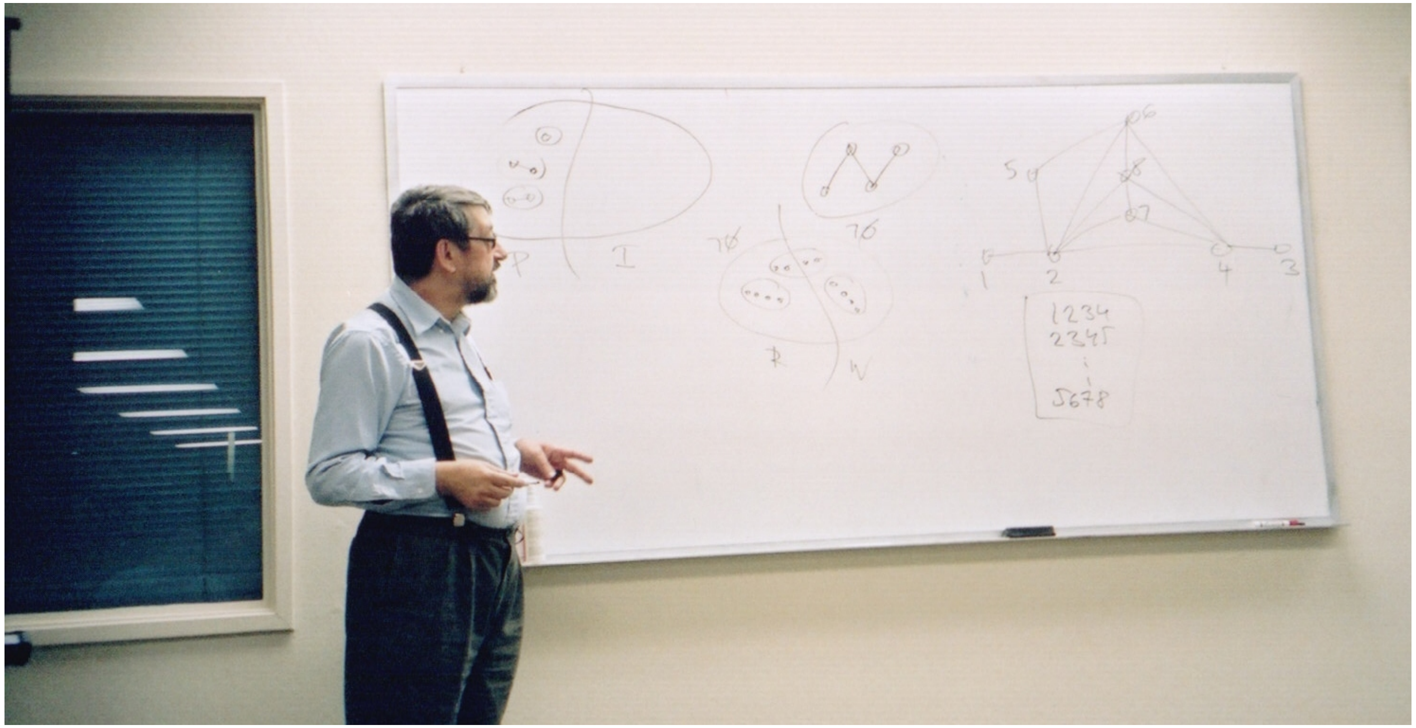


Quantos guardas são necessários para defender o interior dum castelo?

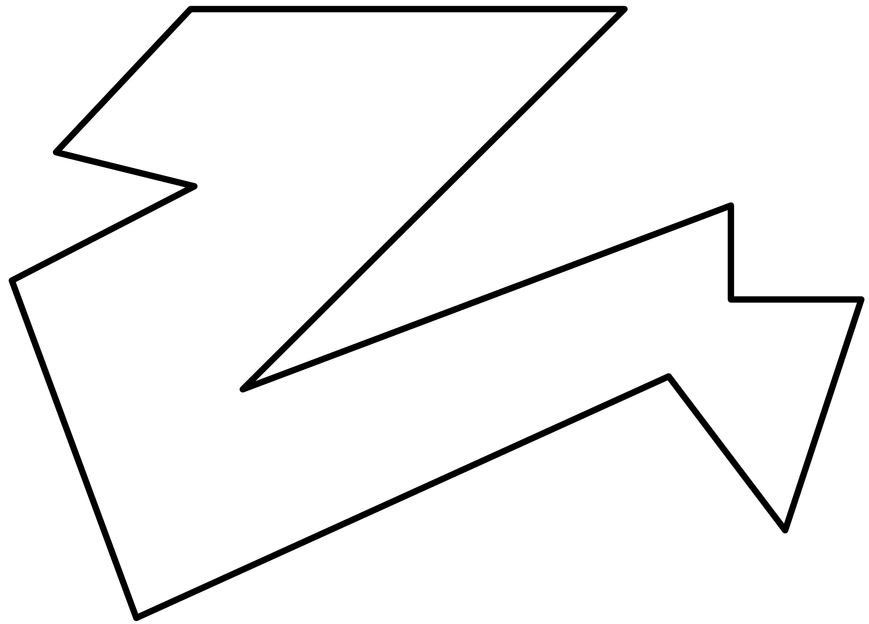


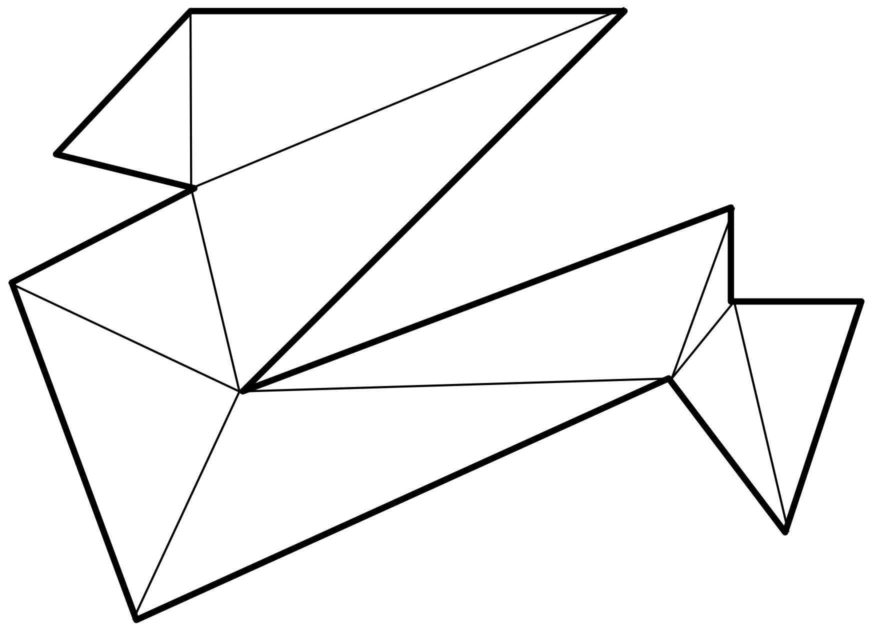


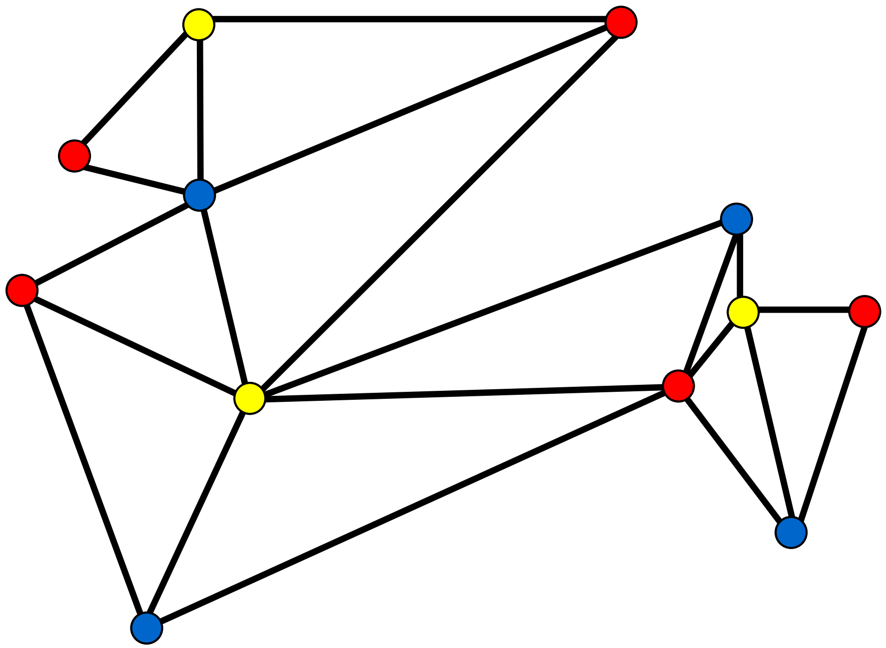
Chvátal (1975): Para qualquer castelo com *n* paredes são necessários *n*/3 guardas. Se *n* não for múltiplo de 3, o número de guardas será o maior inteiro inferior a *n*/3.

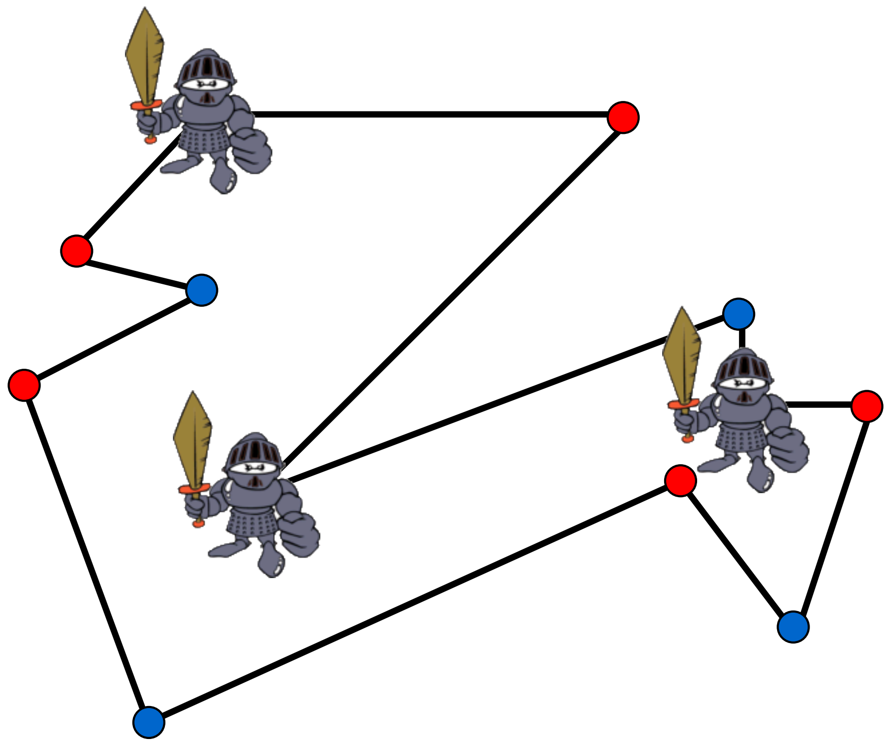


Vašek Chvátal









Obrigado!

Adérito Araújo: alma@mat.uc.pt

Ver: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes