Alfredo Manuel Gouveia da Costa

Semigrupos Profinitos e Dinâmica Simbólica

U. PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2007

Alfredo Manuel Gouveia da Costa

Semigrupos Profinitos e Dinâmica Simbólica

U. PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Doutor em Matemática

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2007

Agradecimentos

Esta dissertação foi financiada com uma bolsa da FCT (Bolsa SFRH/BD/24200/2005) no âmbito do Programa Operacional "Ciência, Tecnologia, Inovação"(POCTI) e do Programa Operacional Sociedade da Informação (POSI) do Quadro Comunitário de Apoio III (2000-2006), com fundos comunitários (FSE) e fundos nacionais.

O meu agradecimento à *Fundação Calouste Gulbenkian* pela concessão de uma bolsa de curta duração que permitiu a minha visita a Paris em 2004.

O meu reconhecimento ao *Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra* e ao *Centro de Matemática da Universidade de Coimbra* pelo apoio prestado. O financiamento vindo deste último foi essencial para a concretização da minha visita à Universidade Estatal dos Urais em 2005.

O meu muito obrigado a todas aquelas pessoas (investigadores, docentes, funcionários ou estudantes) do *Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências do Porto*, do *LIAFA* e da *Universidade Estatal dos Urais* que me acolheram tão bem durante a preparação desta dissertação.

O Professor Manuel Delgado e o José João foram sempre muito prestáveis ao ajudarem-me na utilização dos pacotes do *GAP* por eles desenvolvidos. Estou-lhes grato.

Agradeço à Professora Maria de Fátima Carvalho pela solicitude com que respondeu às minhas perguntas, em especial pela referência à solução no livro de Peter Walters *An Introduction to Ergodic Theory* da minha questão sobre quais os valores que a entropia de um sistema simbólico pode assumir.

O meu obrigado ao Professor Mikhail Volkov e à Ana Moura por tornarem fácil a minha visita à Universidade Estatal dos Urais. Obrigado à Ana Moura também pela ajuda preciosa aquando da avaria do meu computador portátil.

Para que fique mais saliente o meu reconhecimento, acabo exprimindo o meu grande apreço e agradecimento pela generosa disponibilidade do Professor Jorge Almeida. Tem sido muito gratificante aprender e trabalhar com ele.

Resumo

A teoria dos sistemas dinâmicos simbólicos pode ser encarada como uma área da teoria das linguagens, dado que existe uma bijecção natural $\mathcal{X} \mapsto L(\mathcal{X})$ entre sistemas simbólicos e linguagens factoriais prolongáveis. Os semigrupos, nomeadamente os finitos, têm-se revelado da maior importância em teoria das linguagens; e por sua vez, os semigrupos profinitos são de grande utilidade para a compreensão de questões da teoria dos semigrupos finitos.

Dados um alfabeto A e uma pseudovariedade de semigrupos V que contém os semigrupos nilpotentes finitos, não se perde informação sobre uma linguagem factorial prolongável L se considerarmos apenas os elementos infinitos do fecho topológico $\overline{L}$ de L em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, o semigrupo pró-$\mathsf{V}$ livre gerado por A. Motivados por esta observação, estudamos as propriedades de $\overline{L}$ e deduzimos invariantes de conjugação de sistemas simbólicos. Nomeadamente, recorrendo ao conceito de morfismo de sobreposição, mostramos que se $\mathcal{X}$ é um sistema irredutível então o grupo de Schützenberger da $\mathcal{J}$-classe minimal de $\overline{L(\mathcal{X})}$ é um invariante de conjugação, quando V satisfaz certas condições ($\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$ e $\mathscr{L}\mathsf{SI} \subseteq \mathsf{V}$). No caso das pseudovariedades V tais que $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$ demonstramos este facto por um segundo método, recorrendo ao conceito de semigrupóide profinito relativamente livre gerado por um grafo profinito. Utilizando um exemplo simples de um sistema simbólico, mostramos que o conceito actualmente utilizado de semigrupóide profinito relativamente livre tem falhas no caso em que o grafo gerador tem um número infinito de vértices. Corrigimos essas falhas, apresentando uma boa definição para esses casos. Com tal definição, concentramo-nos no estudo dos semigrupóides profinitos relativamente livres gerados pelo grafo das órbitas de um sistema simbólico.

Os sistemas simbólicos em que $L(\mathcal{X})$ é uma linguagem racional, denominados *sistemas sóficos*, merecem particular relevo. Com base em ferramentas que introduzimos para a dedução dos mencionados invariantes de conjugação relacionados com a estrutura dos semigrupos profinitos relativamente livres, obtemos um novo invariante de conjugação ulterior de sistemas sóficos, que consiste em propriedades estruturais do semigrupo sintáctico de $L(\mathcal{X})$. Este resultado melhora um invariante introduzido por Béal, Fiorenzi e Perrin, que utilizaram técnicas diferentes.

A *equivalência fraca* é uma relação introduzida por Béal e Perrin, e é uma relação mais fraca do que a conjugação. Determinamos quais as classes de sistemas sóficos invariantes para a equivalência fraca que são naturalmente definidas por pseudovariedades de semigrupos ordenados finitos. Entre tais classes contam-se as classes dos sistemas de tipo de quase finito e as classes dos sistemas aperiódicos.

Abstract

The theory of symbolic dynamical systems can be viewed as a research area of language theory, since there is a natural bijection $\mathcal{X} \mapsto L(\mathcal{X})$ from symbolic dynamical systems to factorial prolongable languages. Semigroups, namely finite semigroups, have shown to be very important in language theory; and profinite semigroups are very useful to understand and solve questions about finite semigroups.

Given an alphabet A and a pseudovariety of semigroups V containing the nilpotent finite semigroups, we do not lose information about a factorial prolongable language L if we only consider the infinite elements on the topological closure $\overline{L}$ of L in $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, the free pro-$\mathsf{V}$ semigroup generated by A. Motivated by this observation, we study the properties of $\overline{L}$ and deduce invariants of conjugation of symbolic systems. Namely, with the help of superposition homomorphisms, we show that if $\mathcal{X}$ is an irreducible symbolic system then the Schützenberger group of the minimal $\mathcal{J}$-class of $\overline{L(\mathcal{X})}$ is a conjugacy invariant, when V satisfies certain conditions ($\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$ and $\mathscr{L}\mathsf{SI} \subseteq \mathsf{V}$). When V is such that $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$ we prove this fact with another method, with the help of the concept of relatively free profinite semigroupoid generated by a profinite graph. Using a simple example of a symbolic system, we show that the presently used concept of relatively free profinite semigroupoid has flaws when the generating profinite graph has an infinite number of vertices. We fix these flaws, making a good definition for all profinite graphs. With this definition, we focus on the study of relatively free profinite semigroupoids generated by the orbits graph of a symbolic system.

The symbolic systems such that $L(\mathcal{X})$ is rational, called *sofic systems*, deserve special attention. With tools used for the deduction of the above mentioned conjugacy invariants related with the structure of relatively free profinite semigroups, we obtain a new eventual conjugacy invariant of sofic systems, which consists in structural properties of the syntactic semigroup of $L(\mathcal{X})$. This result improves an invariant introduced by Béal, Fiorenzi and Perrin using different techniques.

Weak equivalence is a relation between symbolic systems weaker than conjugacy introduced by M.-P. Béal and D. Perrin. We determine which classes of sofic systems naturally defined by pseudovarieties of finite ordered semigroups are closed under weak equivalence. Among such classes are the classes of almost finite type systems and aperiodic systems.

Résumé

La théorie des systèmes symboliques dynamiques peut être vue comme une partie de la théorie des langages, parc-que il existe une bijection naturelle $\mathcal{X} \mapsto L(\mathcal{X})$ entre les systèmes symboliques dynamiques et les langages factorielles prolongeables. Les semigroupes, surtout les finis, on prouvé être très importants pour la théorie des langages; et les semigroupes profinis sont très utiles pour comprendre et résoudre des questions de la théorie des semigroupes finis.

Si A est un alphabet fini et V est un pseudovariété de semigroupes a qui appartiennent les semigroupes finis nilpotentes, on reste avec la même information sur une langage factorielle prolongeable L si on considère seulement les éléments finis de la fermeture topologique $\overline{L}$ de L dans $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, le semigroupe pro-$\mathsf{V}$ livre engendré par A. Motivées par cette remarque, nous étudions les propriétés de $\overline{L}$ et on prouve l'existence de certains invariants de conjugaison des systèmes symboliques. Notamment, avec l'aide des homomorphismes de surposition, on prouve que si $\mathcal{X}$ est un système irréductible alors le groupe de Schützenberger de la $\mathcal{J}$-classe minimal de $\overline{L(\mathcal{X})}$ est un invariant de conjugaison, si V satisfait certains conditions ($\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$ et $\mathscr{L}\mathsf{SI} \subseteq \mathsf{V}$). Si $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$ alors on prouve aussi ça avec un autre méthode, utilisant le concept de semigroupoide profini libre engendré par un graphe profini. Pour que cette procédure marche bien, il a été nécessaire faire une redéfinition dans le cas où le graphe générateur a un nombre infini de sommets. Comme exemple de ce cas, nous étudions le semigroupoide profini libre engendré par le graphe des orbites d'un système symbolique.

Avec des instruments utilisés pour montrer l'existence des invariants dans la structure de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, on prouve un nouveau invariant de conjugaison ultérieur des systèmes sofiques, consistant en des propriétés structurelles du semigroupe syntactique de $L(\mathcal{X})$. Ce résultat améliore un invariant obtenu par Béal, Fiorenzi et Perrin avec des méthodes différentes.

L'*équivalence faible* est une relation entre systèmes symboliques plus faible que la conjugaison. Elle a été introduite par M.-P. Béal et D. Perrin. Nous déterminons quelles classes de systèmes sofiques naturellement définies par des pseudovariétés de semigroupes ordonnées sont unions des classes fermés pour la relation de conjugaison. Parmi de telles classes sont les classes des systèmes de type presque fini et des systèmes apériodiques.

Índice

Introdução

Consideremos um alfabeto A. Um *sistema dinâmico simbólico* de $A^{\mathbb{Z}}$ é um subconjunto não vazio de $A^{\mathbb{Z}}$ fechado topologicamente e estável para a acção da translação

$$(x_i)_{\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{\in\mathbb{Z}}, \quad x_i \in A,$$

e para a acção da sua inversa. A Dinâmica Simbólica é a área de investigação dedicada ao estudo e classificação dos sistemas dinâmicos simbólicos. Historicamente, os sistemas dinâmicos contínuos definidos por equações diferenciais forneceram a motivação para o estudo dos sistemas dinâmicos simbólicos. Com efeito, estes surgem frequentemente como resultado de um processo de discretização dos sistemas contínuos. Estudando o sistema simbólico, obtém-se informação sobre o sistema contínuo original. Conforme é afirmado na introdução de [LM96], foi resolvendo deste modo em [Had98] uma questão sobre sistemas dinâmicos contínuos que Hadamard inaugurou em 1898 a Dinâmica Simbólica. Antes da II Guerra Mundial, como o atesta o artigo fundamental de Hedlund e Morse [HM38], a Dinâmica Simbólica ganha autonomia, e muitos conceitos e assuntos da área actualmente investigados remontam a essa época. Os morfismos entre sistemas dinâmicos simbólicos designam-se *codificações*: tratam-se das funções contínuas que comutam com a translação de sequências bi-infinitas. As codificações bijectivas, designadas por *conjugações*, constituem a correspondente noção de isomorfismo. Dois sistemas dizem-se *conjugados* se houver entre eles alguma conjugação. Naturalmente, os sistemas dinâmicos simbólicos classificam-se em classes de conjugação.

Se $\mathcal{X}$ é um sistema dinâmico simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ então o conjunto $L(\mathcal{X})$ das palavras sobre A que aparecem em algum dos elementos de $\mathcal{X}$ é uma linguagem factorial prolongável. De facto, a correspondência $\mathcal{X} \mapsto L(\mathcal{X})$ é uma bijecção entre o conjunto dos sistemas dinâmicos simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ e o conjunto das linguagens factoriais prolongáveis não vazias de A^+. Logo a Dinâmica Simbólica pode ser considerada como uma área da teoria das linguagens.

Distinguem-se duas tendências quanto ao tipo de sistemas simbólicos estudados. A primeira tendência refere-se aos *sistemas minimais* que, tal como o nome indica, são os sistemas simbólicos que não contêm outros sistemas simbólicos. Traduzindo para o universo das linguagens, mostra-se facilmente que $\mathcal{X}$ é minimal se e só se a linguagem $L(\mathcal{X})$ é *uniformemente recorrente*, isto é, se e só se qualquer elemento u de $L(\mathcal{X})$ é factor de qualquer elemento de $L(\mathcal{X})$ de comprimento maior do que um inteiro N_u dependente unicamente de u.

A segunda tendência radica-se nos sistemas de tipo finito. O sistema $\mathcal{X}$ diz-se de *tipo finito* se $L(\mathcal{X}) = A^+ \setminus A^*WA^*$ para algum subconjunto finito W de A^+. Esta classe de sistemas revelou-se importante desde o início da história da Dinâmica Simbólica. Nos anos 1970, R. Williams [Wil73] deu um grande impulso ao problema da classificação dos sistemas de tipo finito ao traduzi-lo como um problema de álgebra linear sobre matrizes de inteiros não negativos. É com base nesta tradução que desde então tem sido atacado o problema da decidibilidade da relação de conjugação entre sistemas de tipo finito. Este difícil problema teórico, talvez o mais célebre da área, permanece por resolver, não obstante a investigação de grande qualidade que tem sido feita à volta dele [KR92, KR99, Boy00].

A classe dos *sistemas sóficos* foi introduzida em 1973 por Weiss [Wei73], o qual a definiu como sendo a menor classe de sistemas dinâmicos simbólicos que contém as imagens dos sistemas de tipo finito por uma codificação. O problema da classificação das classes de conjugação dos sistemas sóficos também tem sido fundamentalmente estudado no universo das matrizes, desta feita simbólicas. Os paralelismos com os sistemas de tipo finito são habituais.

Um sistema simbólico $\mathcal{X}$ é sófico se e só se $L(\mathcal{X})$ é racional. Este facto remete-nos para a teoria combinatória das linguagens racionais, e deste modo para a teoria dos autómatos finitos e dos semigrupos finitos.

É natural que o semigrupo sintáctico de $L(\mathcal{X})$ desempenhe um papel no estudo de um sistema dinâmico simbólico $\mathcal{X}$, especialmente quando esse semigrupo é finito, ou seja, quando $\mathcal{X}$ é sófico. Em [Bea85] o semigrupo sintáctico é utilizado para construir e deduzir propriedades sobre o grafo etiquetado minimal que reconhece $L(\mathcal{X})$ quando $\mathcal{X}$ é um sistema sófico irredutível. Algo de semelhante é feito em [Jon96c, Jon98] para certas classes de sistemas sóficos que generalizam propriedades dos sistemas sóficos irredutíveis. Várias classes de sistemas sóficos são caracterizadas em [BH86, Jon96c, Jon98, BFP06, BFP05] por propriedades algébricas do semigrupo sintáctico da linguagem desses sistemas.

Uma forma bem estabelecida de classificação das linguagens racionais consiste em agrupá-las em *variedades de linguagens racionais*. Por outro lado, os semigrupos finitos não se classificam a menos de isomorfismo, porque num certo sentido existem demasiados semigrupos para que tal seja exequível [SYT94]. Antes classificam-se em *pseudovariedades*, que são classes de semigrupos finitos que contêm os subsemigrupos, imagens homomorfas e produtos directos finitos dos seus elementos. O célebre Teorema da Correspondência de Eilenberg [Eil76] consiste na descrição de uma bijecção natural entre as pseudovariedades de semigrupos finitos e as variedades de linguagens racionais: a cada pseudovariedade V corresponde a variedade das linguagens racionais cujo semigrupo sintáctico pertence a V. O Teorema de Eilenberg, nomeadamente certas particularizações que em parte historicamente o precederam (como a descrição das linguagens $+$-livres por Schützenberger) forneceram desde os anos 1960/1970 uma das mais fortes motivações para o estudo de pseudovariedades de semigrupos.

As pseudovariedades de semigrupos e de outras álgebras, como por exemplo grupos, monóides ou anéis, constituem uma adaptação para o universo das estruturas finitas do conceito de *variedade de álgebras*, o qual é um dos principais temas abordados em Álgebra Universal [BS81]. Naturalmente tentou-se desde logo transpor para o universo das pseudovariedades certas características das variedades de álgebras. A dificuldade mais evidente que teve que ser superada é que enquanto que as variedades de álgebras contêm objectos livres, tal em geral não acontece com as pseudovariedades. A forma de contornar este obstáculo consistiu num alargamento do universo a considerar: se em vez dos semigrupos de uma pseudovariedade V considerarmos os limites projectivos dos membros de V, munidos da topologia discreta, obtemos uma classe de semigrupos topológicos — denominados semigrupos pró-V, ou profinitos no caso da pseudovariedades S de todos os semigrupos finitos — que contém objectos livres. O semigrupo pró-V livre $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é o limite projectivo de todos os semigrupos de V gerados por A (ou mais precisamente, por uma função de domínio A). A classe dos semigrupos pró-V não é grande demais, na medida em que um semigrupo finito gerado por A pertence a V se e só se é uma imagem homomorfa contínua de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Conforme é afirmado na introdução de [AV06], pode-se dizer que em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ ficam codificadas todas as propriedades algébrico-combinatórias gerais dos elementos de V. Portanto existem fortes motivações para o conhecimento das propriedades dos semigrupos profinitos relativamente livres (isto é, semigrupos da forma $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, para alguns A e V). Efectivamente, a maior parte dos avanços nos últimos 25 anos na teoria dos semigrupos finitos fez-se através do estudo de semigrupos profinitos relativamente livres, frequentemente a par com a ideia seminal de Tilson [Til87] de considerar categorias e semigrupóides como generalizações de monóides e de semigrupos.

O interesse sistemático pela exploração de elos entre a dinâmica simbólica e os semigrupos profinitos deve-se a Almeida e encontra a sua motivação primordial em [Alm02b], embora a dinâmica simbólica já tivesse pontualmente contribuído para a investigação sobre semigrupos profinitos: em [AA87] (ver [Alm95, Capitulo 12]) deduziram-se propriedades do semigrupo profinito livre localmente semi-reticulado com a ajuda da sequência de Prouhet-Thuë-Morse. Mais tarde J. C. Costa [Cos02] recorreu às substituições Sturmianas para deduzir mais propriedades sobre esse semigrupo. Em [Alm02b] estudam-se propriedades de pseudovariedades de semigrupos recorrendo-se a pseudopalavras definidas através da iteração de endomorfismos contínuos de semigrupos profinitos livres. O estudo da dinâmica desses endomorfismos — os quais em [Alm02b] surgem sob uma outra forma, a que se deu a designação de *operadores implícitos* — é retomado em [Alm02a, AV06, Alm05a]. Desse estudo resultou um conhecimento acrescido da estrutura do semigrupo profinito (absolutamente) livre. De uma parte desse conhecimento obteve-se em [AV06] um método para descrever, a partir de uma base de pseudoidentidades de uma pseudovaridade de grupos H, uma base de pseudoidentidades da pseudovariedade $\overline{\mathsf{H}}$ dos semigrupos cujos subgrupos pertencem a H. Também em [AV06], a definição de entropia que normalmente se faz em Dinâmica Simbólica foi pela primeira vez adaptada aos elementos do semigrupo profinito livre, com resultados impressivos. Uma parte destes resultados já havia sido demonstrada em [AV03], com o recurso a métodos substancialmente diferentes, que aí se revelaram de menor alcance.

Nos artigos [Alm02b, Alm02a, AV06], a que já fizemos referência, os sistemas dinâmicos estudados são o fecho das órbitas de operadores implícitos. A tese de Mestrado do autor [Cos03] é dedicada ao estudo de alguns desses sistemas. Prosseguindo numa outra direcção, Almeida iniciou a investigação sobre como se poderá dos sistemas dinâmicos simbólicos propriamente ditos extrair informação sobre os semigrupos profinitos livres. A ideia-chave consiste em considerar o fecho topológico de $L(\mathcal{X})$ em $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$. Nesse fecho topológico, toda a informação sobre o sistema dinâmico reside nas pseudopalavras infinitas. Esta ideia é um dos principais fios condutores da investigação original que se encontra presente neste trabalho.

Almeida concentrou a sua atenção em [Alm05a] nos sistemas minimais. Aí foi demonstrado que se $\mathcal{X}$ é um sistema minimal de $A^{\mathbb{Z}}$ então os elementos de $\overline{L(\mathcal{X})} \setminus A^+$ estão contidos numa mesma $\mathcal{J}$-classe $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$, e que a correspondência $\mathcal{X} \mapsto \mathfrak{J}(\mathcal{X})$ é uma bijecção entre os sistemas minimais e o conjunto das $\mathcal{J}$-classes regulares maximais de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$. Mais geralmente, Almeida constatou que se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico irredutível então os elementos $\mathcal{J}$-minimais de $\overline{L(\mathcal{X})}$ estão contidos numa mesma $\mathcal{J}$-classe regular $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Coloca-se naturalmente a questão de se saber, dado um sistema simbólico irredutível $\mathcal{X}$, qual é o subgrupo maximal $\mathfrak{G}(\mathcal{X})$ de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Em [Alm05a] foi possível dar uma resposta a esta questão para várias classes de sistemas minimais. Para o efeito, em [Alm05a] consideraram-se os sistemas minimais definidos por endomorfismos de A^+, os quais também podem ser designados por *substituições*. Explorando as propriedades combinatórias de um tal endomorfismo e transpondo-as para a sua extensão contínua a $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$, foi possível calcular $\mathfrak{G}(\mathcal{X})$ quando $\mathcal{X}$ é definido por uma substituição (fracamente) primitiva. Por exemplo, se a substituição é Sturmiana então $\mathfrak{G}(\mathcal{X})$ é isomorfo ao grupo profinito livre gerado por dois elementos.

A questão que em seguida se coloca com naturalidade é a de saber se a classe de isomorfismo do grupo compacto $\mathfrak{G}(\mathcal{X})$ é um invariante de conjugação de $\mathcal{X}$. Almeida anunciou em [Alm05b, Secção 9] que $\mathfrak{G}(\mathcal{X})$ é efectivamente um invariante de conjugação, mas sem demonstração. Numa comunicação pessoal, Almeida expôs ao autor os argumentos que justificaram essa afirmação, os quais consistiam na consideração do semigrupóide profinito livre gerado pelo grafo profinito das órbitas de um sistema dinâmico simbólico. Contudo o autor detectou nesses argumentos uma falha comprometedora, que surgiu da assumpção incorrecta de que o semigrupóide livre gerado por um grafo profinito é sempre denso no correspondente semigrupóide profinito livre. Isto é verdade para grafos com um número finito de vértices, mas no Capítulo 4 veremos um exemplo em que tal não acontece relativamente ao grafo das órbitas de um certo sistema sófico. A mencionada falha pôs mesmo em causa a própria noção — introduzida em [AW98] — de semigrupóide profinito livre gerado por um grafo profinito com um número infinito de vértices. Num esforço conjunto plasmado nos Capítulos 4 e 5, Almeida e o autor superaram estas dificuldades, tendo obtido uma definição satisfatória de semigrupóide profinito livre gerado por um grafo profinito, e reaproveitaram os métodos iniciais de Almeida para fazerem uma demonstração de que $\mathfrak{G}(\mathcal{X})$ é um invariante de conjugação.

Mas já em [Cos06], enquanto os mencionados problemas sobre semigrupóides profinitos livres estavam por resolver, o autor havia entretanto demonstrado que $\mathfrak{G}(\mathcal{X})$ é um invariante de conjugação utilizando um outro método. De facto, foi mesmo demonstrada a existência de um invariante de conjugação mais geral: trata-se do conjunto parcialmente ordenado etiquetado das $\mathcal{J}$-classes de elementos de $\overline{L(\mathcal{X})}$ que estão simultaneamente $\mathcal{R}$-abaixo e $\mathcal{L}$-abaixo de pseudopalavras não vazias idempotentes, etiquetado em cada uma dessas $\mathcal{J}$-classes pelo respectivo grupo de Schützenberger. Este assunto é um dos temas do Capítulo 3 desta tese. O método utilizado surgiu da consideração dos chamados morfismos de sobreposição, ou morfismos sequenciais, conforme são apresentados em [Alm95, Secção 10.6]. É natural que tais morfismos sejam considerados, pois eles actuam nas palavras finitas do mesmo modo como as codificações actuam nas sequências bi-infinitas.

A dedução do resultado que descrevemos no parágrafo anterior foi em grande parte motivada por um resultado análogo de Béal, Fiorenzi e Perrin sobre o semigrupo sintáctico de $L(\mathcal{X})$ quando $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico sófico [BFP06]. O conjunto parcialmente ordenado considerado em [BFP06] é constituído apenas por $\mathcal{J}$-classes regulares do semigrupo sintáctico. O autor melhorou em [Cos06] este invariante de conjugação de sistemas sóficos, ao considerar todas as $\mathcal{J}$-classes do semigrupo sintáctico constituídas por elementos que estão simultaneamente $\mathcal{R}$-abaixo e $\mathcal{L}$-abaixo de idempotentes; esta parte do artigo [Cos06] é recapitulada e melhorada no Capítulo 6 desta tese. Não obstante a semelhança de resultados, os métodos aplicados em [BFP06] e em [Cos06] foram substancialmente diferentes. Em [BFP06] foi aplicada a perspectiva segundo a qual um sistema sófico pode ser encarado como uma matriz simbólica. Os métodos aplicados em [Cos06], consistem na aplicação das ferramentas desenvolvidas para deduzir o invariante geral descrito no parágrafo anterior, relacionado com a estrutura do semigrupo profinito livre.

Esta monografia encontra-se dividida em três partes. A primeira parte é dedicada às definições e resultados que são preliminares das contribuições originais principais. Este preliminares encontram-se organizados em dois capítulos. O primeiro situa-se no âmbito da teoria de semigrupos, autómatos e linguagens. No segundo capítulo são abordados aspectos gerais da Dinâmica Simbólica. A longa extensão desta parte deve-se ao facto de nos vermos obrigados a lidar com duas áreas de investigação, e de ser curto o historial das interacções entre elas, pelo que não é de esperar que em geral um leitor familiarizado com uma dessas áreas esteja familiarizado com muitos aspectos da outra.

A segunda parte é constituída pelos Capítulos 3 a 5. Os Capítulos 4 e 5 e uma porção do Capítulo 3 foram obtidos em colaboração com Almeida. Esta segunda parte é dedicada à investigação de ligações entre propriedades dos semigrupos e semigrupóides profinitos relativamente livres e propriedades dos sistemas dinâmicas simbólicos. No Capítulo 3 são deduzidas várias propriedades do fecho topológico em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ de uma linguagem factorial e/ou prolongável de A^+. Estudamos o efeito que tem sobre esse fecho a aplicação dos morfismos de sobreposição definidos por codificações, deduzindo desse modo invariantes algébrico-topológicos de conjugação relacionados com a estrutura de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. No Capítulo 4, fazemos uma recapitulação crítica do conceito de semigrupóide profinito relativamente livre gerado por um grafo profinito, guiados pelo caso dos grafos das órbitas dos sistemas dinâmicos simbólicos. Os semigrupóides profinitos relativamente livres gerados por tais grafos tornam-se o tema principal no Capítulo 5.

Na terceira parte, constituída pelos Capítulos 6 e 7, são apresentados resultados originais sobre propriedades algébricas do semigrupo sintáctico da linguagem dos factores de um sistema dinâmico simbólico. O conteúdo do Capítulo 7 foi obtido em parte em colaboração com L. Chaubard [CC06]. Essa colaboração resultou da convergência entre o artigo [Cos07] e a tese de Mestrado [Cha03].

Em complemento, existem três capítulos em apêndice.

Vamos agora indicar algumas referências bibliográficas que sirvam de apoio principal para a leitura desta tese. Sobre dinâmica simbólica, indicamos [LM96], e de forma complementar [Béa93]. Para os resultados conhecidos sobre semigrupos, autómatos e linguagens, baseamo-nos em [Lal79, Pin86, Alm95], o texto introdutório [Alm05b] sobre semigrupos profinitos, e ainda [CHK83] para resultados sobre semigrupos compactos.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Semigrupos, autómatos e linguagens

1.1 Semigrupos

Um *semigrupo* é um conjunto não vazio munido de uma operação binária associativa. Em geral adoptaremos uma notação multiplicativa para a operação de semigrupo: isto é, essa operação será denotada por $\cdot$, e poderemos escrever st no lugar de $s \cdot t$, e s^n para designar o produto $ss \cdots s$ de n cópias de s, onde n é um inteiro positivo. Pela mesma ordem de ideias, a operação de semigrupo também será frequentemente designada por *multiplicação*.

Um *idempotente* de um semigrupo S é um elemento e de S tal que $e^2 = e$. Por exemplo, seja $\mathscr{U}$ o semigrupo constituído pelos inteiros 0 e 1 com a multiplicação usual: todos os elementos de $\mathscr{U}$ são idempotentes.

Um elemento 1_M de um semigrupo M diz-se um *elemento neutro* se $m \cdot 1_M = 1_M \cdot m = m$ para qualquer $m \in M$. Num semigrupo existe no máximo um elemento neutro. Um *monóide* é um semigrupo com um elemento neutro. Por exemplo, $\mathscr{U}$ é um monóide: o seu elemento neutro é 1. Se s é um elemento de um monóide M então s^0 denota o elemento neutro de M.

Seja S um semigrupo. Denotamos por S^1 o semigrupo definido do seguinte modo: se S é um monóide então $S^1 = S$; se S não é um monóide então consideramos um elemento denotado por 1 que não pertence a S e definimos S^1 como sendo $S \cup \{1\}$ munido da multiplicação que estende a multiplicação de S e que tem 1 como elemento neutro.

A noção de grupo é bastante mais familiar, e assumimos que o leitor está familiarizado com os conceitos elementares relacionados. Note-se que um grupo é um semigrupo.

Um semigrupo S diz-se *comutativo* se $st = ts$ para quaisquer $s, t \in S$. Um *semi-reticulado* é um semigrupo comutativo em que todos os elementos são idempotentes. O semigrupo $\mathscr{U} = \{0, 1\}$ é um semi-reticulado. Dado um conjunto A, o conjunto dos subconjuntos de A é denotado por $\mathcal{P}(A)$. Munindo $\mathcal{P}(A)$ da operação binária de união obtemos um monóide, cujo elemento neutro é o conjunto vazio. O monóide $\mathcal{P}(A)$ é um semi-reticulado.

Sejam X e Y subconjuntos de um semigrupo S. O seu produto é o conjunto $XY = \{xy \mid x, y \in S\}$. O conjunto dos subconjuntos de S é um semigrupo para esta operação. Não havendo lugar a ambiguidade, se s é um elemento de S então escrevemos Xs no lugar de $X\{s\}$.

Dado um semigrupo S, um subconjunto não vazio T de S fechado para a multiplicação de S é um semigrupo para a restrição a T da operação definida em S. Dizemos que T é um *subsemigrupo* de S.

Seja X um subconjunto não vazio de um semigrupo S. Consideremos o conjunto

$$\langle X \rangle = \bigcup_{n \geq 1} X^n.$$

Então $\langle X \rangle$ é um subsemigrupo de S, e é a intersecção de todos os subsemigrupos de S que contêm X; por isso dizemos que $\langle X \rangle$ é o *subsemigrupo de S gerado por X*. Se $A \neq \emptyset$ então o conjunto $\mathcal{P}'(A) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ é um subsemigrupo de $\mathcal{P}(A)$, e se A é finito então $\mathcal{P}'(A)$ é gerado pelo conjunto $\{\{x\} \mid x \in A\}$.

Um *subgrupo* de um semigrupo é um subsemigrupo cuja multiplicação faz dele um grupo. A noção usual de subgrupo de um grupo é consistente com esta noção. Por outro lado, o monóide $\mathscr{U}$ tem $\{0\}$ como subsemigrupo, mas os elementos neutros de $\mathscr{U}$ e de $\{0\}$ são distintos. Daí que, para não haver ambiguidade, só falamos de submonóides de monóides: um *submonóide* de um monóide M é um subsemigrupo de M que contém o elemento neutro de M.

Um *ideal* de um semigrupo S é um subconjunto não vazio I de S tal que $S^1IS^1 = I$. Um ideal de S é em particular um subsemigrupo de S. A intersecção não vazia de ideais é um ideal. Em particular, a intersecção K_S de todos os ideais de S é um ideal de S, se $K_S \neq \emptyset$. Dizemos que K_S é o *ideal mínimo* de S, se $K_S \neq \emptyset$. Todos os semigrupos finitos têm um ideal mínimo mas, por exemplo, o semigrupo aditivo dos inteiros positivos não tem um ideal mínimo.

Dada uma família não vazia $(S_i)_{i \in I}$ de semigrupos (respectivamente, monóides, grupos), o produto Cartesiano $S = \prod_{i \in I} S_i$ é um semigrupo (respectivamente, monóide, grupo) para a operação definida naturalmente componente a componente. Dizemos que S é o *produto directo* da família $(S_i)_{i \in I}$. Em particular, dado um conjunto não vazio A e um semigrupo S, o conjunto S^A das funções de A em S é desta forma um semigrupo. Dizemos que S^A é uma *potência* de S.

Um *homomorfismo de semigrupos* de um semigrupo S num semigrupo T é uma função $\varphi : S \to T$ tal que $\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t)$. Se U é um subsemigrupo de S então $\varphi(U)$ é um subsemigrupo de T; se V é um subsemigrupo de T e se $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ então $\varphi^{-1}(V)$ é um subsemigrupo de S. A imagem R de S por φ é um subsemigrupo de T. Dizemos que R é uma *imagem homomorfa* de S. Se S é um monóide com elemento neutro 1_S então R é um monóide com elemento neutro $\varphi(1_S)$. No entanto $\varphi(1_S)$ pode não ser elemento neutro de T. Torna-se por isso conveniente a seguinte definição: um *homomorfismo de monóides* de um monóide S num monóide T, com elementos neutros 1_S e 1_T respectivamente, é um homomorfismo de semigrupos $\varphi : S \to T$ tal que $\varphi(1_S) = \varphi(1_T)$. Enquanto que um homomorfismo de semigrupos entre dois monóides pode não ser um homomorfismo de monóides, um homomorfismo de semigrupos entre dois grupos é um homomorfismo de grupos no sentido usual.

Se φ é um homomorfismo bijectivo então φ^{-1} também é um homomorfismo. Um homomorfismo bijectivo é designado por *isomorfismo*. Dois semigrupos dizem-se *isomorfos* se existir um isomorfismo entre eles. Um *endomorfismo* é um homomorfismo de um semigrupo nele próprio.

Seja $\varphi : S \to T$ um homomorfismo de semigrupos tal que S não é um monóide. Convencionamos que o homomorfismo $S^1 \to T^1$ que estende φ e que envia 1 em 1 também seja denotado por φ.

Dizemos que um semigrupo S *divide* um semigrupo T se S é uma imagem homomorfa de um subsemigrupo de T. Também dizemos que S é um *divisor* de T. Não é difícil mostrar que a divisão de semigrupos é uma relação transitiva.

Proposição 1.1 (Folklore)**.** *Qualquer semi-reticulado (finito) é um divisor de uma potência (finita) de* $\mathscr{U}$.

1.1.1 Semigrupos livres

Seja A um conjunto não vazio, designado por *alfabeto*. Dado um inteiro positivo n, uma sequência de n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ de A é denotada por $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$. O conjunto das sequências finitas não vazias de elementos de A é denotado por A^+. Os elementos de A^+ são designados por *palavras sobre* A. O *comprimento* da palavra $a_1 \ldots a_n$ é o inteiro n. As sequências de comprimento 1 chamam-se *letras* e identificam-se com os elementos do conjunto A, o qual deste modo é considerado um subconjunto de A^+. A *palavra vazia* é a sequência vazia, denotada por 1, e o conjunto A^* designa a união $A^+ \cup \{1\}$. O comprimento de 1 é zero. O comprimento de uma palavra w é denotado por $|w|$. Também usaremos a notação $|X|$ para designar o cardinal de um conjunto X.

O conjunto A^+ é um semigrupo para a operação de *concatenação* de palavras: se $u = a_1 \ldots a_n$ e $v = b_1 \ldots b_m$ são palavras de comprimento n e m respectivamente ($a_i, b_j \in A$) então a concatenação de u com v é a palavra $uv = a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m$, de comprimento $n + m$.

Se $\varphi : A \to S$ é uma função e S é um semigrupo, então existe um único homomorfismo de semigrupos φ^+ entre A^+ e S, dado pela regra $\varphi^+(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n)$, onde $a_i \in A$. Esta propriedade justifica a designação de A^+ como o *semigrupo livre gerado por* A.

Do mesmo modo, A^* é um monóide para a operação de concatenação, e para toda a função $\varphi : A \to M$ em que M é um monóide existe um único homomorfismo de monóides φ^* entre A^* e M, razão pela qual A^* é designado por *monóide livre gerado por* A.

O termo *linguagem* de A^+ é uma outra forma de nos referirmos a um subconjunto de A^+. Se L é uma linguagem não vazia de A^+ então $\langle L \rangle$ é geralmente denotado por L^+. Habitualmente também se considera $\emptyset^+$ como sendo $\emptyset$. Os subconjuntos de A^* também se designam linguagens[1], e L^* denota o submonóide de A^* gerado por L.

A linguagem das palavras de comprimento n é A^n. Por conveniência, a linguagem das palavras de comprimento menor do que (respectivamente, menor ou igual a) n será denotada por $A^{<n}$ (respectivamente, $A^{\leq n}$).

1.1.2 Semigrupos topológicos

Ao longo desta monografia, estudaremos várias estruturas topológicas. No que diz respeito a resultados puramente topológicos, apenas necessitaremos de um punhado de definições e resultados familiares que se encontram na maioria dos livros de Topologia Geral. De entre tais livros, escolhemos [Eng89] e [Wil70] como referências complementares. Tal como em [Eng89] (mas ao contrário de [Wil70]), decidimos que por definição um espaço compacto tem que ser Hausdorff.

Um *semigrupo topológico (compacto)* é um semigrupo munido de uma topologia Hausdorff (compacta) para a qual a multiplicação é contínua.

Dois semigrupos topológicos dizem-se *isomorfos* se entre eles existir um isomorfismo de semigrupos que também é um homeomorfismo de espaços topológicos. Um tal isomorfismo também poderá ser mencionado como sendo um isomorfismo de semigrupos topológicos.

Um *grupo topológico (compacto)* é um grupo munido de uma topologia Hausdorff (compacta) para a qual a multiplicação e a função de inversão $x \mapsto x^{-1}$ são contínuas. Num

[1] Na literatura, quando há necessidade de distinção, os subconjuntos de semigrupos livres designam-se $+$-linguagens, e os de monóides livres designam-se $*$-linguagens.

grupo que é um semigrupo compacto, a função de inversão é contínua, ou seja, um grupo é um semigrupo compacto se e só se é um grupo compacto [CHK83, Teorema 1.13].

Estamos a seguir [CHK83] quando exigimos que a topologia que define o semigrupo topológico seja Hausdorff, tal como em [Wil70, Exercício 13G] se exige o mesmo para os grupos topológicos. Essa exigência não é feita em [Alm05b]. O custo da restrição ao universo das topologias Hausdorff é compensado por um maior espaço de manobra, que resulta por exemplo do facto de que os conjuntos com um único elemento são fechados num espaço Hausdorff, ou de que num espaço Hausdorff uma rede convergente tem um único limite. Seja como for, ao longo deste trabalho estaremos quase exclusivamente interessados em espaços compactos.

Os semigrupos finitos serão considerados como sendo semigrupos compactos (para a topologia discreta, evidentemente). Dado um semigrupo topológico S, no caso de S não ser monóide vamos atribuir ao monóide S^1 a topologia que resulta da adição do ponto isolado 1 à topologia de S. Com esta topologia S^1 é um semigrupo topológico.

Se I é um ideal de um semigrupo topológico então $S^1\overline{I}S^1 = \overline{S^1IS^1} = \overline{I}$. Portanto $\overline{I}$ também é um ideal. O ideal mínimo de um semigrupo topológico (se existir) é um ideal fechado.

Teorema 1.2 ([CHK83, Teorema 1.29])**.** *Se S é um semigrupo compacto então S tem um ideal mínimo.*

Dado um semigrupo topológico S e um subconjunto não vazio X de S, o conjunto $\overline{\langle X\rangle}$ é um subsemigrupo de S, designado por *subsemigrupo fechado de S gerado por X*. Um semigrupo topológico S diz-se *monogénico* se existir $s \in S$ tal que $S = \overline{\langle s\rangle}$. Um semigrupo topológico monogénico é comutativo.

Teorema 1.3 ([CHK83, Teorema 3.5])**.** *Se S é um semigrupo compacto monogénico então o seu ideal mínimo K é um grupo compacto monogénico, e qualquer subgrupo de S está contido em S. O conjunto dos pontos isolados de S é $S \setminus K$.*

De acordo com o Teorema 1.3, se s é um elemento de um semigrupo compacto S então $\overline{\langle s\rangle}$ contém um único idempotente, o qual será denotado por s^ω. Podemos definir um *pseudo-inverso* de s do seguinte modo: $s^{\omega-1}$ é o único elemento do ideal mínimo de $\langle s\rangle$ tal que $s \cdot s^{\omega-1} = s^\omega$. A operação $x \mapsto x^{\omega-1}$ é contínua. Note-se que se S é um grupo compacto então $s^{-1} = s^{\omega-1}$.

1.1.3 Semigrupos quocientes

Dada uma relação de equivalência R num conjunto X, a classe de equivalência de um elemento x de X módulo R é denotada por $[x]_R$, e o quociente de X por R é denotado por X/R.

O *núcleo* de uma função $f : P \to Q$ é o conjunto $\operatorname{Ker} f = \{(x, y) \in P \times P : f(x) = f(y)\}$. Uma *congruência* sobre um semigrupo S é uma relação de equivalência θ em S tal que, para quaisquer $u, v \in S$ e $a, b \in S^1$, se $u\ \theta\ v$ então $aub\ \theta\ avb$. Se θ é uma congruência então o quociente S/θ fica naturalmente munido de uma estrutura de semigrupo. A função

$$\begin{array}{rccc} q_\theta : & S & \to & S/\theta \\ & s & \mapsto & [s]_\theta \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo de semigrupos, e o seu núcleo é θ. Se $\varphi : S \to T$ é um homomorfismo de semigrupos então $\operatorname{Ker}\varphi$ é uma congruência sobre S e a função

$$\begin{array}{ccc} S/\operatorname{Ker}\varphi & \to & \operatorname{Im}\varphi \\ [s]_{\operatorname{Ker}\varphi} & \mapsto & \varphi(s) \end{array} \tag{1.1}$$

está bem definida e é um isomorfismo de semigrupos. Se θ e ρ são congruências sobre o semigrupo S tais que $\theta \subseteq \rho$ então a função

$$\begin{array}{rccc} q_{\theta,\rho}: & S/\theta & \to & S/\rho \\ & [s]_\theta & \mapsto & [s]_\rho \end{array} \tag{1.2}$$

está bem definida e é um homomorfismo sobrejectivo.

Vejamos de que forma as noções sobre semigrupos quocientes se enquadram no contexto dos semigrupos topológicos. Recordemos que, dado um espaço topológico X e uma função sobrejectiva $f : X \to Y$, a *topologia quociente* de Y induzida por f é a maior topologia sobre Y para a qual a função f é contínua. A topologia quociente de X/R é a topologia quociente induzida pela função quociente $X \to X/R$.

Proposição 1.4 ([Wil70, Exercício 17N.2])**.** *Se X é um espaço compacto então o espaço quociente X/R é compacto se e só se R é um fechado de $X \times X$.*

Diremos que uma relação de equivalência R definida num espaço topológico X é *fechada*[2] se R for um fechado de $X \times X$. O próximo teorema demonstra-se facilmente com o auxílio da Proposição 1.4.

Teorema 1.5 ([CHK83, Teorema 1.54])**.** *Se θ é um congruência fechada de um semigrupo compacto S então S/θ é um semigrupo compacto.*

Se $f : X \to Y$ é uma função contínua sobrejectiva entre espaços compactos então a topologia de Y coincide com a topologia quociente de Y induzida por f (pelo Teorema 9.2 de [Wil70] e de acordo com o comentário que se segue ao Teorema 17.7 do mesmo livro).

Teorema 1.6 ([Wil70, Teorema 9.4])**.** *Suponhamos que $f : X \to Y$ é uma função contínua sobrejectiva entre dois espaços compactos X e Y. Seja Z um espaço topológico. Então uma função $g : Y \to Z$ é contínua se e só se $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

O Teorema 1.6 é uma ferramenta muito útil para lidarmos com espaços quocientes. Graças ao Teorema 1.6 é imediato que os homomorfismos (1.1) e (1.2) são contínuos se S e T são semigrupos compactos.

Dado um ideal I de um semigrupo S, consideremos a seguinte relação ρ_I entre elementos de S:

$$s \;\rho_I\; t \Leftrightarrow (s = t \text{ ou } s, t \in I).$$

A relação ρ_I é uma congruência, cujas classes consistem no ideal I e nos conjuntos singulares constituídos por elementos de $S \backslash I$. A congruência ρ_I é a *congruência de Rees* definida por I. O semigrupo quociente S/ρ_I é habitualmente denotado por S/I e designado por *quociente de Rees de S por I*.

[2]Esta definição de relação de equivalência fechada é a utilizada em [CHK83], mas não é a mesma de [Eng89] (veja-se Exercício 2.4.C de [Eng89]).

1.1.4 Limites projectivos

Um conjunto I munido de uma ordem parcial $\leq$ diz-se *dirigido* se para quaisquer $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$. Um *sistema dirigido de funções* indexado pelo conjunto dirigido I é uma família não vazia de funções

$$\mathscr{F} = \{\varphi_{j,i} : X_j \to X_i \,|\, i, j \in I, i \leq j\},$$

tais que

- $\forall i, j, k \in I, i \leq j \leq k \Rightarrow \varphi_{j,i} \circ \varphi_{k,j} = \varphi_{k,i}$,
- $\forall i, j, k \in I, \varphi_{i,i} = \mathrm{Id}_{X_i}$,

onde Id_Q denota a função identidade no conjunto Q. O *limite projectivo* associado a $\mathscr{F}$ é o conjunto

$$\varprojlim \mathscr{F} = \{(s_i)_i \in \textstyle\prod_{i \in I} X_i \,|\, i \leq j \Rightarrow \varphi_{j,i}(s_j) = s_i\}.$$

Se φ_i for a restrição a $\varprojlim \mathscr{F}$ da projecção canónica de $\prod_{i \in I} X_i$ em X_i, então $\varphi_i = \varphi_{j,i} \circ \varphi_j$. Dizemos que $\mathscr{F}$ é um *sistema dirigido sobrejectivo* se os elementos de $\mathscr{F}$ forem funções sobrejectivas; o respectivo limite projectivo diz-se um *limite projectivo sobrejectivo*.

Usualmente $\varprojlim \mathscr{F}$ é denotado por $\varprojlim_{i \in I} X_i$ quando a definição completa de $\mathscr{F}$ está subentendida.

Proposição 1.7 ([Eng89, Teorema 3.2.13 e Corolário 3.2.15])**.** *Consideremos um sistema dirigido $\mathscr{F} = \{\varphi_{j,i} : X_j \to X_i \,|\, i, j \in I, i \leq j\}$ de funções contínuas entre espaços topológicos. O conjunto $\varprojlim \mathscr{F}$ é fechado em $\prod_{i \in I} X_i$ e as projecções $\varphi_i : \varprojlim \mathscr{F} \to X_i$ são contínuas.*

Se os espaços X_i forem compactos então $\varprojlim \mathscr{F}$ é um espaço compacto não vazio.

Se os espaços X_i forem compactos e se o sistema $\mathscr{F}$ for sobrejectivo então as projecções φ_i são sobrejectivas.

Proposição 1.8. *Seja $\mathscr{F} = \{\varphi_{j,i} : X_j \to X_i \,|\, i, j \in I, i \leq j\}$ um sistema dirigido de funções contínuas entre espaços topológicos. Consideremos um subconjunto Y de $\varprojlim \mathscr{F}$. Suponhamos que para qualquer $i \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e a projecção canónica de Y em X_k é igual a X_k. Então Y é denso em $\varprojlim \mathscr{F}$.*

Demonstração. Seja Λ um subconjunto finito de I. Consideremos uma família $B_\Lambda = (\mathcal{U}_i)_{i \in \Lambda}$ de conjuntos tais que $\mathcal{U}_i$ é um aberto de X_i. Denotando por φ_i a projecção canónica de $\varprojlim \mathscr{F}$ em X_i, consideremos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{U}_{B_\Lambda} = \bigcap_{i \in \Lambda} \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i).$$

Os conjuntos da forma $\mathcal{U}_{B_\Lambda}$ formam uma base de abertos da topologia de $\varprojlim \mathscr{F}$. Para mostrarmos que Y é denso em $\varprojlim \mathscr{F}$, apenas precisamos mostrar que se $\mathcal{U}_{B_\Lambda} \neq \emptyset$ então $\mathcal{U}_{B_\Lambda} \cap Y \neq \emptyset$. Suponhamos pois que existe um elemento x em U_{B_Λ}. Como I é um conjunto dirigido, existe $j \in I$ tal que $i \leq j$ para qualquer $i \in \Lambda$. Por hipótese, existe $k \in I$ tal que $j \leq k$ e $\varphi_k(Y) = X_k$. Seja $y \in Y$ tal que $\varphi_k(y) = \varphi_k(x)$. Se $i \leq k$ então

$$\varphi_i(y) = \varphi_{k,i}(\varphi_k(y)) = \varphi_{k,i}(\varphi_k(x)) = \varphi_i(x).$$

Logo, como $x \in U_{B_\Lambda}$, se $i \in \Lambda$ então $\varphi_i(y) \in \mathcal{U}_i$. Portanto y pertence a $\mathcal{U}_{B_\Lambda} \cap Y$. $\square$

O sistema dirigido $\mathscr{F} = \{\varphi_{j,i} : S_j \to S_i \,|\, i, j \in I, i \leq j\}$ é um *sistema dirigido de semigrupos (topológicos)* se S_i for um semigrupo (topológico) e $\varphi_{j,i}$ for um homomorfismo (contínuo), para quaisquer $i, j \in I$ tais que $i \leq j$. Nesse caso, se $\varprojlim \mathscr{F}$ for não vazio então $\varprojlim \mathscr{F}$ é um semigrupo (topológico), e as projecções φ_i são homomorfismos (contínuos).

1.1.5 Semigrupos profinitos

Um *semigrupo profinito* é um semigrupo compacto T tal que, para qualquer par de elementos distintos u e v de T, existe um homomorfismo contínuo φ de T num semigrupo finito F tal que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Teorema 1.9 ([Alm05b, Teorema 3.1])**.** *Um semigrupo topológico é profinito se e só se é isomorfo a um limite projectivo de semigrupos finitos.*

Um *aberto-fechado* de um espaço topológico é um conjunto da topologia que é simultaneamente aberto e fechado. Um espaço topológico diz-se *zero-dimensional* se for gerado por uma base de aberto-fechados. Um espaço compacto é zero-dimensional se e só se é totalmente desconexo [Wil70, Teorema 29.7].

Teorema 1.10 (Numakura [Num57]; [Alm05b, Teorema 3.1])**.** *Um semigrupo compacto é profinito se e só se é zero-dimensional.*

Proposição 1.11 ([Alm05b, pág. 20])**.** *Dado um elemento s de um semigrupo profinito, temos* $s^\omega = \lim_{n\to+\infty} s^{n!}$.

A definição de grupo profinito é inteiramente análoga à de semigrupo profinito, e os Teoremas 1.9 e 1.10 também valem para grupos: basta substituir a palavra semigrupo por grupo (veja-se [Num57, Alm89, CDFJ04] para outras estruturas em que ocorre o mesmo fenómeno, e [CDFJ04] para um estudo das suas limitações). De facto, um grupo topológico é profinito se e só se é um semigrupo profinito.

1.2 Grafos e autómatos

Um *grafo* G é uma estrutura $(V_{\mathrm{G}}, E_{\mathrm{G}}, \alpha_{\mathrm{G}}, \omega_{\mathrm{G}})$ constituída por dois conjuntos disjuntos V_{G} e E_{G}, e por duas funções α_{G} e ω_{G} de E_{G} em V_{G}. O conjunto $V_{\mathrm{G}} \cup E_{\mathrm{G}}$ será denotado por G, sempre que não haja confusão entre conjunto e estrutura de grafo associada. Os elementos de V_{G} são os *vértices* (ou *estados*) de G, e os elementos de E_{G} são as *arestas* de G. As funções α_{G} e ω_{G} denominam-se *funções de incidência*. Dizemos que uma aresta x *começa* em $\alpha_{\mathrm{G}}(x)$ e *acaba* em $\omega_{\mathrm{G}}(x)$, ou que $\alpha_{\mathrm{G}}(x)$ é a *origem* e $\omega_{\mathrm{G}}(x)$ é o *término* de x. O conjunto das arestas que começam no vértice p e acabam no vértice q é denotado por $\mathrm{G}(p, q)$. A notação $e : p \to q$ serve para referir que e é uma aresta de $\mathrm{G}(p, q)$. Um grafo diz-se *essencial* se as suas funções de incidência forem sobrejectivas.

Duas arestas x e y dizem-se *consecutivas* quando $\omega_{\mathrm{G}}(x) = \alpha_{\mathrm{G}}(y)$, e dizem-se *co-terminais* quando $\alpha_{\mathrm{G}}(x) = \alpha_{\mathrm{G}}(y)$ e $\omega_{\mathrm{G}}(x) = \omega_{\mathrm{G}}(y)$. Um *caminho* de G é uma sequência finita $x_1 x_2 \ldots x_n$ de arestas consecutivas, onde $n \geq 1$; o inteiro n é o *comprimento* do caminho. Um *descendente* de um vértice p é o vértice terminal de um caminho que começa em p.

Os *grafos finitos* são aqueles que têm um número finito de arestas e de vértices. A forma de representação gráfica de um grafo é bem conhecida. Na Figura 1.1 encontra-se representado um grafo com dois vértices, numerados 1 e 2, e três arestas. Duas delas são co-terminais, com origem em 1 e término em 2. A aresta l é um *lacete*, isto é, uma aresta com origem igual ao término.

Um grafo G diz-se *fortemente conexo* se entre quaisquer dois vértices distintos x e y existe um caminho de x a y; e diz-se *conexo* caso seja fortemente conexo o grafo G' que se obtém de G acrescentando uma aresta que começa em y e a acaba em x sempre que existe uma aresta que começa em x e a acaba em y

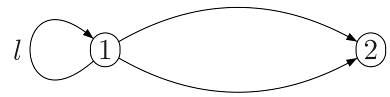


Figura 1.1: Representação gráfica de um grafo.

O grafo da Figura 1.1 é conexo, mas não é fortemente conexo.

Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo H tal que $V_{\mathrm{H}} \subseteq V_{\mathrm{G}}$, $E_{\mathrm{H}} \subseteq E_{\mathrm{G}}$, e α_{H} e ω_{H} são restrições de α_{G} e ω_{G}, respectivamente. Uma *componente (fortemente) conexa* de um grafo é um subgrafo (fortemente) conexo maximal. Um subgrafo H do grafo G diz-se *terminal* se todos os caminhos de G que começam num vértice de H são caminhos de H.

O *produto directo* de uma família não vazia $(\mathrm{G}_i)_{i\in I}$ de grafos é o grafo G tal que $V_{\mathrm{G}} = \prod_{i\in I} V_{\mathrm{G}_i}$, $E_{\mathrm{G}} = \prod_{i\in I} E_{\mathrm{G}_i}$, e $\alpha((x_i)_{i\in I}) = (\alpha(x_i))_{i\in I}$ e $\omega((x_i)_{i\in I}) = (\omega(x_i))_{i\in I}$, para qualquer $(x_i)_{i\in I} \in E_{\mathrm{G}}$.

Um *homomorfismo de grafos* entre os grafos G e H é uma função $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ com as seguintes características:

- $\varphi(V_{\mathrm{G}}) \subseteq V_{\mathrm{H}}$ e $\varphi(E_{\mathrm{G}}) \subseteq E_{\mathrm{H}}$;

- para toda a aresta x de G temos $\varphi(\alpha_{\mathrm{G}}(x)) = \alpha_{\mathrm{H}}(\varphi(x))$ e $\varphi(\omega_{\mathrm{G}}(x)) = \omega_{\mathrm{H}}(\varphi(x))$.

Se U é um subgrafo de G então $\varphi(\mathrm{U})$ é um subgrafo de H. O homomorfismo de grafos $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ é

1. um *isomorfismo* se φ for uma função bijectiva (a função inversa de um isomorfismo de grafos também é um isomorfismo);

2. um *homomorfismo fiel* se $\varphi|_{\mathrm{G}(p,q)}$ for uma função injectiva, para quaisquer $p, q \in V_{\mathrm{G}}$;

3. um *homomorfismo quociente* se $\varphi|_{V_{\mathrm{G}}}$ for uma bijecção entre V_{G} e V_{H} e se $\varphi(E_{\mathrm{G}}) = E_{\mathrm{H}}$;

4. um *mergulho* se φ for uma função injectiva.

Dois grafos dizem-se *isomorfos* se existir um isomorfismo entre eles.

O *reverso* de um grafo G é o grafo denotado G^T com o mesmo conjunto de vértices e de arestas de G e tal que $\alpha_{\mathrm{G}^T} = \omega_{\mathrm{G}}$ e $\omega_{\mathrm{G}^T} = \alpha_{\mathrm{G}}$.

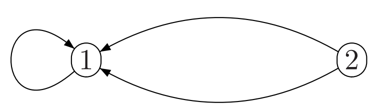


Figura 1.2: Reverso do grafo da Figura 1.1.

Um *grafo etiquetado* num alfabeto A é um par (G, λ) em que G é um grafo e λ é uma função do conjunto das arestas de G no alfabeto A; à letra $\lambda(x)$ chamamos *etiqueta* de x. A etiqueta de um caminho $w = x_1x_2\ldots x_n$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são arestas consecutivas, é a palavra $\lambda(x_1)\lambda(x_2)\cdots\lambda(x_n)$, a qual também é denotada por $\lambda(w)$. O *contexto direito* de um estado é o conjunto das etiquetas dos caminhos que começam nesse estado. No grafo

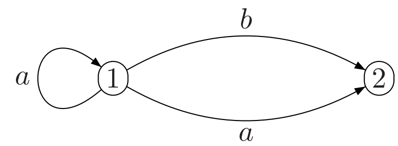


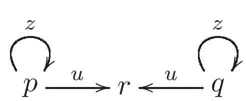
Figura 1.3: Grafo da Figura 1.1 etiquetado com as letras a e b.

etiquetado da Figura 1.3, a etiqueta do lacete l é a, e a etiqueta do caminho lll é a^3. O contexto direito de 1 é $a^+ \cup a^*b$, e o de 2 é $\emptyset$.

Um grafo etiquetado sobre o alfabeto A diz-se:

- *fiel* se arestas co-terminais distintas tiverem etiquetas distintas;
- *resolvente* se arestas distintas com a mesma origem têm etiquetas distintas;
- *fechante* se existe um inteiro positivo n tal que se dois caminhos $x_1 \dots x_n$ e $y_1 \dots y_n$ têm a mesma origem e a mesma etiqueta, então $x_1 = y_1$;
- *completo* se para qualquer estado p e para qualquer letra a de A existir uma aresta etiquetada a com origem em p;
- *reduzido* se estados distintos têm contextos direitos distintos.

Podemos ainda considerar as noções duais de *contexto esquerdo* de um estado, grafo etiquetado *co-resolvente*, *co-fechante*, *co-completo* e *co-reduzido*. Um grafo etiquetado diz-se *bi-resolvente* se for resolvente e co-resolvente, e *bi-fechante* se for fechante e co-fechante. Em [Béa93] são mencionados algoritmos para decidir se um grafo etiquetado finito é fechante ou não, ou se é co-fechante ou não. Por exemplo, um grafo etiquetado finito é co-fechante se e só se não existem nele caminhos etiquetados de acordo com a disposição da Figura 1.4. Note-se que, como o grafo é finito, o comprimento dos caminhos que surgem na Figura 1.4 pode ser limitado pelo inteiro n^2+1 onde n é o número de vértices do grafo.



p, q, r estados, $p \neq q$, $u, z \in A^+$.

Figura 1.4: Subgrafo etiquetado presente em grafos etiquetados finitos que não são co-fechantes, e apenas nesses.

Um *autómato sobre o alfabeto* A é uma estrutura $\mathfrak{A} = (\mathrm{G}, \lambda, I, F)$ em que (G, λ) é um grafo etiquetado sobre A, e I e F são subconjuntos de V_{G}. Os elementos de I são os *estados iniciais* do autómato, e os de F são os *estados finais*. A *linguagem reconhecida* por um autómato é o conjunto das etiquetas dos caminhos que começam num estado inicial e acabam num estado final.

Um homomorfismo entre dois grafos etiquetados $(\mathrm{G}_1, \lambda_1)$ e $(\mathrm{G}_2, \lambda_2)$ é um homomorfismo φ entre os grafos G_1 e G_2 tal que $\lambda_2 \circ \varphi = \lambda_1$. Um homomorfismo entre dois autómatos $(\mathrm{G}_1, \lambda_1, I_1, F_1)$ e $(\mathrm{G}_2, \lambda_2, I_2, F_2)$ é um homomorfismo φ entre os grafos etiquetados $(\mathrm{G}_1, \lambda_1)$ e $(\mathrm{G}_2, \lambda_2)$ tal que $\varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2)$ e $\varphi(F_1) \subseteq \varphi(F_2)$. Também temos naturalmente as correspondentes noções de isomorfismo.

Em geral estaremos interessados no grafo etiquetado (G, λ) como sendo um dispositivo de reconhecimento de linguagens, encarando-o como um autómato em que todos os estados são iniciais e finais. Deste modo, o autómato $(\mathrm{G}, \lambda, V_{\mathrm{G}}, V_{\mathrm{G}})$ será identificado com (G, λ).

1.3 Reconhecimento de linguagens

Dado um autómato $\mathfrak{A} = (\mathrm{G}, \lambda, I, F)$ sobre o alfabeto A, para cada $w \in A^+$ seja $\tau(w)$ o conjunto dos pares (p, q) de vértices de G para os quais existe um caminho em G entre p e q etiquetado w. O conjunto $T = \{\tau(w) \mid w \in A^+\}$ é um subsemigrupo do semigrupo (para a operação de composição) das relações binárias entre vértices de G. O semigrupo T é designado por *semigrupo de transição de* $\mathfrak{A}$. A função $\tau : A^+ \to T$ é um homomorfismo de semigrupos, designado por *homomorfismo de transição de* $\mathfrak{A}$. Reparemos que $\mathfrak{A}$ é resolvente se e só se τ é uma função parcial; nesse caso é habitual usar-se as notações $p \cdot \tau(u) = q$ ou $p \cdot u = q$ para representar o facto de que q é a imagem de p por $\tau(u)$.

Se L for a linguagem reconhecida por $\mathfrak{A}$ então

$$L = \{w \mid \tau(w) \cap I \times F \neq \emptyset\} = \tau^{-1}\tau(L). \tag{1.3}$$

Dizemos que uma linguagem L de A^+ é *reconhecida por um semigrupo* S se existir um homomorfismo $\varphi : A^+ \to S$ tal que $L = \varphi\varphi^{-1}(L)$. A equação (1.3) justifica a implicação directa do próximo teorema.

Teorema 1.12 (Myhill [Myh57])**.** *Seja A um alfabeto finito. Uma linguagem de A^+ é reconhecida por um autómato finito se e só se é reconhecida por um semigrupo finito.*

Uma linguagem diz-se *reconhecível* se puder ser reconhecida por um autómato finito.

Uma *linguagem racional de* A^+ é uma linguagem que pode ser obtida dos subconjuntos de A usando um número finito de vezes as seguintes operações:

- União binária de linguagens: $(L, K) \mapsto L \cup K$.
- Concatenação de linguagens: $(L, K) \mapsto LK$.
- Operação *mais* numa linguagem: $L \mapsto L^+$.

Teorema 1.13 (Kleene [Kle56])**.** *Seja A um alfabeto finito. Uma linguagem de A^+ é reconhecível se e só se for racional.*

Um autómato *determinístico* (respectivamente *co-determinístico*) é um autómato resolvente (co-resolvente) com um único estado inicial (final).

Seja L uma linguagem de A^+. Dado $u \in A^*$, consideremos o seguinte conjunto:

$$R_L(u) = \{w \in A^* \mid uw \in L\}.$$

Reparemos que

$$\forall a \in A,\ R_L(u) = R_L(v) \Rightarrow R_L(ua) = R_L(va).$$

Consideremos o autómato determinístico e completo R_L definido do seguinte modo:

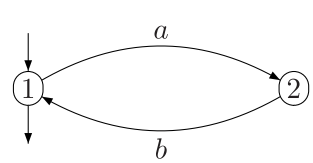


Figura 1.5: Autómato com estado inicial e final 1. A linguagem reconhecida é $(ab)^+$.

- o conjunto de estados de R_L é o conjunto $\{R_L(u) \mid u \in A^*\}$;
- o único estado inicial de R_L é $R_L(1)$;
- o conjunto de estados finais de R_L é o conjunto $\{R_L(u) \mid u \in L\}$;
- para quaisquer $u \in A^*$ e $a \in A$, tem-se $R_L(u) \cdot a = R_L(ua)$.

O autómato R_L reconhece L e é uma imagem homomorfa de todos os autómatos determinísticos completos que reconhecem L. Em particular, L é reconhecível se e só se R_L é finito. O autómato R_L é, a menos de isomorfismo, o único autómato determinístico completo e reduzido que reconhece L. Tal autómato designa-se por *autómato minimal à direita de L*. Ambos os programas de cálculo simbólico [GAP06, Inc05] contêm pacotes denominados Automata com algoritmos para o cálculo do autómato minimal à direita de uma linguagem racional.

Consideremos um semigrupo T e um subconjunto K de T. Uma congruência θ em T *satura* T se K é a união de classes de equivalência módulo θ. Dado $u \in T$, o *contexto em T de u relativamente a K* é o conjunto

$$C_{K,T}(u) = \{(x, y) \in T^1 \times T^1 \mid xuy \in K\}.$$

Consideremos a relação binária $\equiv$ em T que identifica elementos com o mesmo contexto:

$$u \equiv v \Leftrightarrow C_{K,T}(u) = C_{K,T}(v).$$

A relação $\equiv$ é uma congruência que satura K, e é a intersecção de todas as congruências em T que saturam K. A congruência $\equiv$ denomina-se *congruência sintáctica*. O semigrupo quociente $T/\equiv$, denotado por $S_T(K)$, é o *semigrupo sintáctico de K em T*. A classe de equivalência módulo $\equiv$ de um elemento u de T é denotada por $\delta_{K,T}(u)$.

Observação 1.14. O semigrupo $S_{A^+}(L)$ é uma imagem homomorfa de qualquer semigrupo de transição de um autómato sobre o alfabeto A que reconhece L.

Justificação. Se τ é o homomorfismo de transição de um autómato sobre o alfabeto A que reconhece L então a congruência $\operatorname{Ker}\tau$ satura L, pelo que a congruência sintáctica de L está contida em $\operatorname{Ker}\tau$. Portanto a função $\tau(u) \mapsto \delta_L(u)$ está bem definida e é um homomorfismo de semigrupos. $\square$

Mais geralmente, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.15 ([Lal79, Lema 5.5])**.** *Uma linguagem L de A^+ é reconhecida pelo semigrupo S se e só se $S_{A^+}(L)$ divide S.*

Vejamos agora uma outra caracterização do semigrupo sintáctico de uma linguagem.

Proposição 1.16 ([Lal79, Proposição 1.8])**.** *Seja L uma linguagem de A^+. Seja τ o homomorfismo de transição de R_L. A função*

$$\begin{array}{rcl} S_{A^+}(L) & \to & \tau(A^+) \\ \delta_{L,A^+}(u) & \mapsto & \tau(u),\ u \in A^+ \end{array}$$

está bem definida e é um isomorfismo de semigrupos.

Dualmente, podemos considerar o *autómato minimal à esquerda de* L. O seu semigrupo de transição também é isomorfo ao semigrupo sintáctico de L.

O semigrupo sintáctico de uma linguagem L pode depender do alfabeto A. Por exemplo, o semigrupo sintáctico de A^+ como linguagem de A^+ é o semigrupo trivial, enquanto que se $A \subsetneqq B$ então o semigrupo sintáctico de A^+ enquanto linguagem de B^+ é o monóide $\mathscr{U} = \{0, 1\}$. Mas se o alfabeto A estiver subentendido, não havendo perigo de confusão adoptam-se notações mais simples: $S(L)$ e δ_L, no lugar de $S_{A^+}(L)$ e de δ_{L,A^+}, respectivamente.

1.4 Relações de Green

Consideremos um semigrupo S. Dados $u, v \in S$, dizemos que v é um *factor* de u se $u = xvy$ para alguns $x, y \in S^1$. Dizemos que v é um *prefixo* de u se $u = vy$ para algum $y \in S^1$, e que é um *sufixo* se $u = xv$ para algum $x \in S^1$. Consideremos as seguintes relações em S:

- $u \leq_{\mathcal{J}} v \Leftrightarrow v$ é um factor de u
- $u \leq_{\mathcal{R}} v \Leftrightarrow v$ é um prefixo de u;
- $u \leq_{\mathcal{L}} v \Leftrightarrow v$ é um sufixo de u.

Uma *quasi-ordem* é uma relação reflexiva e transitiva. As relações $\leq_{\mathcal{J}}$, $\leq_{\mathcal{R}}$ e $\leq_{\mathcal{L}}$ são quasi-ordens. Cada uma delas dá origem a uma relação de equivalência do seguinte modo:

$$u \mathrel{\mathcal{K}} v \Leftrightarrow (u \leq_{\mathcal{K}} v \text{ e } v \leq_{\mathcal{K}} u), \quad \mathcal{K} \in \{\mathcal{J}, \mathcal{R}, \mathcal{L}\}.$$

Consideremos ainda a relação $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ e a menor relação de equivalência contendo $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$, denotada por $\mathcal{D}$. Tem-se $\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. As relações $\mathcal{J}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$ são conhecidas como *relações de Green*.

Um elemento do semigrupo S diz-se *$\mathcal{J}$-minimal* se todos os elementos de S forem seus factores. O semigrupo S tem elementos $\mathcal{J}$-minimais se e só se tem um ideal mínimo, e se S tem um ideal mínimo K (por exemplo, se S for compacto) então K é o conjunto dos elementos $\mathcal{J}$-minimais de S.

Um semigrupo *estável* é um semigrupo S tal que

$$\forall q, x \in S, \begin{cases} q \mathrel{\mathcal{J}} qx \Leftrightarrow q \mathrel{\mathcal{R}} qx, \\ q \mathrel{\mathcal{J}} xq \Leftrightarrow q \mathrel{\mathcal{L}} xq. \end{cases}$$

Num semigrupo estável as relações $\mathcal{J}$ e $\mathcal{D}$ coincidem. Os semigrupos compactos são estáveis.

Proposição 1.17. *Consideremos um semigrupo S. Sejam $a, b \in S$. Então $ab \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{L}}$ se e só se $[a]_{\mathcal{L}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$ contém algum idempotente.*

Proposição 1.18. *Seja H uma $\mathcal{H}$-classe de um semigrupo S. As seguintes condições são equivalentes:*

- *H contém um idempotente;*
- *existem $a, b \in H$ tais que $ab \in H$;*
- *H é um subgrupo.*

É claro que um subgrupo está contido numa $\mathcal{H}$-classe. Portanto, as $\mathcal{H}$-classes de S que contêm idempotentes são precisamente os subgrupos maximais de S.

Proposição 1.19. *Se e e f são idempotentes de S então, para cada $x \in [e]_{\mathcal{R}} \cap [f]_{\mathcal{L}}$, existe um único $y \in [f]_{\mathcal{R}} \cap [e]_{\mathcal{L}}$ tal que $xy = e$ e $yx = f$.*

Um elemento u de S diz-se *regular* se $u = uxu$ para algum $x \in S$. Um subconjunto de S diz-se *regular* se todos os seus elementos forem regulares.

Proposição 1.20. *As seguintes condições são equivalentes para uma $\mathcal{D}$-classe D de um semigrupo S:*

- *D é regular;*
- *D contém algum elemento regular;*
- *cada $\mathcal{R}$-classe de D contém algum idempotente;*
- *cada $\mathcal{L}$-classe de D contém algum idempotente;*
- *D contém algum idempotente.*

Ao contrário do que se afirma na última alínea do Exercício 5.1.9 em [Alm95], o corolário seguinte não é válido para todos os semigrupos [Alma], conforme se constata no Exemplo 1.22.

Corolário 1.21. *Uma $\mathcal{D}$-classe D de um semigrupo compacto S é regular se e só se existem $a, b \in D$ tais que $ab \in D$.*

Demonstração. Note-se que D é uma $\mathcal{J}$-classe, uma vez que S é estável.

Se D é regular então D contém algum idempotente e, pelo que bastará tomar $a = b = e$.

Reciprocamente, suponhamos que existem $a, b \in D$ tais que $ab \in D$. Então $a = xaby$ para alguns $x, y \in S^1$, pelo que $a = x^n a(by)^n$ para qualquer inteiro positivo n. Logo $a = x^\omega a(by)^\omega$, uma vez que x^ω e y^ω são pontos aderentes de $(x^n)_n$ e $((by)^n)_n$, respectivamente. Portanto $a \leq_{\mathcal{J}} (by)^\omega \leq_{\mathcal{J}} b$. Como $a, b \in D$, deduzimos que $(by)^\omega \in D$. Ora as $\mathcal{D}$-classes regulares são precisamente aquelas que contêm algum idempotente. □

Exemplo 1.22. [Almb, Exercício 5.58] Seja S o semigrupo de transição do grafo etiquetado da Figura 1.6. Para cada palavra u sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$, denotemos por $[u]$ a imagem pelo homomorfismo de transição do grafo etiquetado. Tem-se $[a] = [baca]$, pois $[bac]$ é a identidade no domínio de a, que é o conjunto dos números ímpares. Do mesmo modo, $[b] = [bacb]$ e $[c] = [cbac]$. Logo $[a]$, $[b]$ e $[c]$ são $\mathcal{J}$-equivalentes, pelo que S tem apenas duas $\mathcal{J}$-classes, sendo uma delas constituída apenas pela relação vazia.

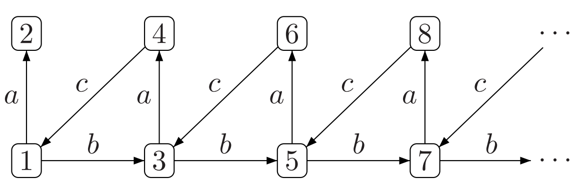


Figura 1.6: Exemplo atestando que a condição "compacto" no Corolário 1.21 não é supérflua.

É claro que $[a] = [baca] \leq_{\mathcal{L}} [aca] \leq_{\mathcal{L}} [ca] \leq_{\mathcal{L}} [a]$. Logo $[a]$, $[aca]$ e $[ca]$ são $\mathcal{L}$-equivalentes. Portanto $[aca] = [a][ca]$ é o produto de dois elementos da $\mathcal{L}$-classe de $[a]$. Contudo, $[a]$ não é regular. Com efeito, se $[a]$ fosse regular, então existiria uma palavra não vazia x no alfabeto $\{a, b, c\}$ tal que $[a] = [axa]$, e então teríamos $2 = 1[a] = 1[axa] = 2[xa]$, o que é absurdo porque 2 não pertence ao domínio de nenhum elemento de S. Logo a condição "compacto" no Corolário 1.21 não é supérflua.

O semigrupo S também serve para mostrar que as relações $\mathcal{J}$ e $\mathcal{D}$ nem sempre coincidem. Com efeito, $[bac]$ e $[a]$ são $\mathcal{J}$-equivalentes, mas como $[bac]$ é idempotente e $[a]$ não é regular, não são $\mathcal{D}$-equivalentes, pela Proposição 1.20.

Tanto as $\mathcal{R}$-classes como as $\mathcal{L}$-classes saturam cada $\mathcal{D}$-classe de um semigrupo, enquanto que a intersecção não vazia de uma $\mathcal{R}$-classe com uma $\mathcal{L}$-classe é uma $\mathcal{H}$-classe. Este facto está na base do chamado *diagrama de Green* de um semigrupo. Neste diagrama, cada $\mathcal{D}$-classe representa-se através de um rectângulo de quadrados no qual cada quadrado agrupa os elementos de uma $\mathcal{H}$-classe, cada linha representa uma $\mathcal{R}$-classe, e cada coluna uma $\mathcal{L}$-classe. Os elementos idempotentes são assinalados com uma estrela. No Exemplo 1.23 os rectângulos externos representam as $\mathcal{D}$-classes. Note-se que, tratando-se de um semigrupo finito, temos $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. A $\mathcal{J}$-ordem é representada pelas linhas unindo as $\mathcal{J}$-classes, de tal forma que se a $\mathcal{J}$-classe D_1 está $\mathcal{J}$-abaixo de D_2 então D_1 está representada abaixo de D_2.

Exemplo 1.23. Na Figura 1.7 surge um grafo etiquetado com as letras a e b e ao lado o diagrama de Green do seu semigrupo S de transição (cada palavra representa a sua imagem pelo homomorfismo de transição). Note-se que o semigrupo S tem um ideal mínimo com três elementos. A Figura 1.7 foi obtida com recurso a um pacote de rotinas desenvolvido por Almeida para serem utilizadas no *Mathematica* [Inc05].

Todos os cálculos de semigrupos e autómatos foram efectuados com esse pacote e/ou com os pacotes *Automata* e *SgpViz* do *GAP* [GAP06].

Seja H uma $\mathcal{H}$-classe de S. O *estabilizador direito* de H é o submonóide de S^1 dado por

$$T(H) = \{x \in S^1 : Hx \subseteq H\}.$$

De facto,

$$T(H) = \{x \in S^1 : Hx = H\} = \{x \in S^1 : Hx \cap H \neq \emptyset\}.$$

Em $T(H)$ podemos considerar a seguinte relação de equivalência:

$$x \approx y \Leftrightarrow \exists h \in H : hx = hy \Leftrightarrow \forall h \in H, hx = hy.$$

A relação $\approx$ é uma congruência em $T(H)$. Seja $\Gamma(H) = T(H)/\approx$. O homomorfismo quociente $T(H) \to \Gamma(H)$ será denotado por ξ_H.

Teorema 1.24 ([Lal79, Teorema 3.1])**.** *Seja H uma $\mathcal{H}$-classe de um semigrupo S. O monóide $\Gamma(H)$ é um grupo de permutações de H com o mesmo cardinal que H. Se H_1 e H_2 são $\mathcal{H}$-classes contidas na mesma $\mathcal{D}$-classe de S então $\Gamma(H_1)$ e $\Gamma(H_2)$ são grupos isomorfos. Se H é um subgrupo maximal de S então H e $\Gamma(H)$ são grupos isomorfos.*

Segue-se a versão topológica do Teorema 1.24 para semigrupos compactos.

Teorema 1.25 ([CHK83, Teorema 3.61])**.** *Seja H uma $\mathcal{H}$-classe de um semigrupo compacto S. Para a topologia quociente, o monóide $\Gamma(H)$ é um grupo compacto de permutações de H com o mesmo cardinal que H. Se H_1 e H_2 são $\mathcal{H}$-classes contidas na mesma $\mathcal{D}$-classe de S então $\Gamma(H_1)$ e $\Gamma(H_2)$ são grupos compactos isomorfos. Se H é um subgrupo maximal de S então H e $\Gamma(H)$ são grupos compactos isomorfos.*

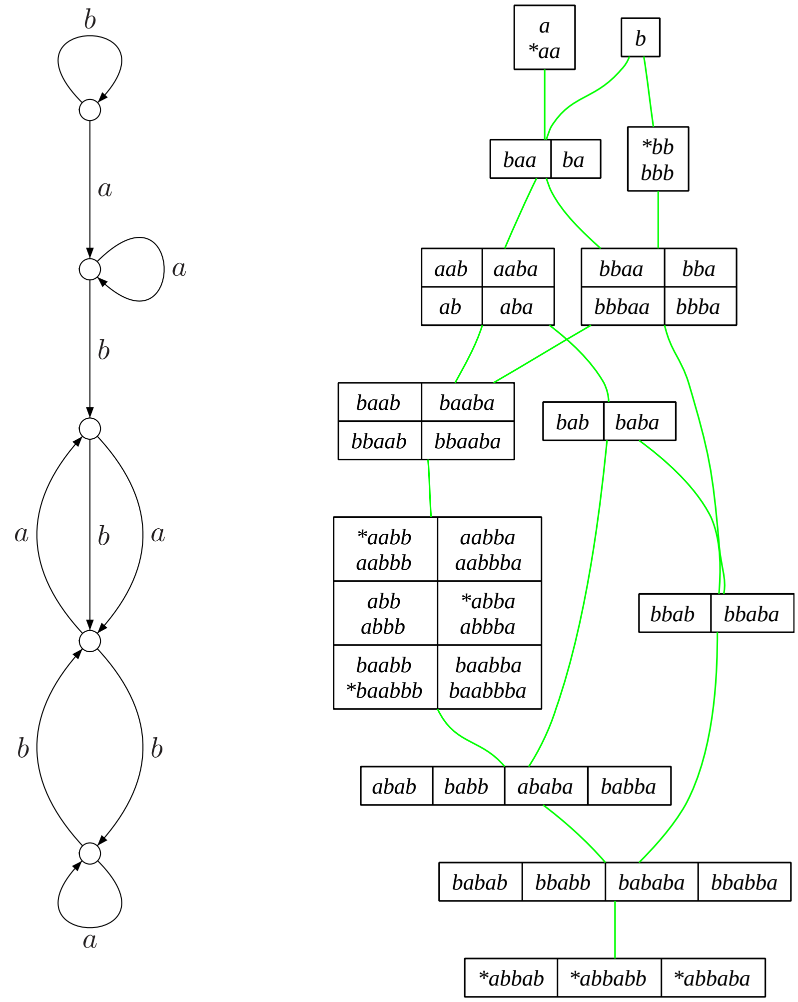


Figura 1.7: Um grafo etiquetado e o diagrama de Green do seu semigrupo de transição.

O grupo (compacto) $\Gamma(H)$ de uma $\mathcal{H}$-classe de um semigrupo (compacto) S é referido como sendo o *grupo de Schützenberger* de H e da $\mathcal{D}$-classe de S em que H está contida. Na verdade, no caso dos semigrupos compactos falaremos antes no grupo de Schützenberger de $\mathcal{J}$-classes, o que podemos fazer já que em semigrupos compactos as relações $\mathcal{D}$ e $\mathcal{J}$ coincidem.

Proposição 1.26. *Os grupos de Schützenberger de semigrupos profinitos são grupos profinitos.*

Demonstração. Seja H uma $\mathcal{H}$-classe de um semigrupo profinito S. Pelo Teorema 1.6, já sabemos que o grupo $\Gamma(H)$ é compacto. Fixemos $h \in H$. Sejam $x, y \in T(H)$ tais que $\xi_H(x) \neq \xi_H(y)$. Então $hx \neq hy$. Como S é profinito, existe um homomorfismo contínuo sobrejectivo $\varphi : S \to F$ de S num semigrupo finito F tal que $\varphi(hx) \neq \varphi(hy)$. Seja K a $\mathcal{H}$-classe de $\varphi(h)$. Facilmente concluímos que $\varphi(T(H)) \subseteq T(K)$. Consideremos a função

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \Gamma(H) & \to & \Gamma(K) \\ & \xi_H(z) & \mapsto & \xi_K(\varphi(z)),\ z \in T(H). \end{array}$$

A função ψ está bem definida e é um homomorfismo. A função $\xi_K \circ \varphi$ é contínua. Como

$\psi \circ \xi_H = \xi_K \circ \varphi$, pelo Teorema 1.6 a função ψ é contínua. Finalmente, como $\varphi(h)\varphi(x) \neq \varphi(h)\varphi(y)$, temos $\psi(\xi_H(x)) \neq \psi(\xi_H(y))$. Logo $\Gamma(H)$ é um grupo profinito. $\square$

Uma forma alternativa de demonstrar a Proposição 1.26 consiste em utilizar o Teorema 1.10. Com efeito, dada uma função contínua aberta e fechada com domínio num espaço Hausdorff zero-dimensional, a sua imagem também é zero-dimensional [Eng89, Exercício 6.2.H]. Portanto, se R é uma relação fechada definida num espaço compacto zero-dimensional X então X/R também é um espaço compacto zero-dimensional.

1.4.1 Elementos limitados por idempotentes

Sejam e e f idempotentes de um semigrupo S. Um elemento u de S tal que $u = euf$ diz-se *limitado* pelos idempotentes e e f (por esta ordem). Um elemento diz-se *limitado por idempotentes* se for limitado por alguns idempotentes. Os elementos regulares são limitados por idempotentes.

Lema 1.27. *Se S é um semigrupo compacto então um elemento u de S é limitado por idempotentes se e só se $u \in SuS$.*

Demonstração. A implicação directa é trivial. Reciprocamente, suponhamos que existem $x, y \in S$ tais que $u = xuy$. Então $u = x^n u y^n$ para qualquer inteiro positivo n. Logo $u = x^\omega u y^\omega$, uma vez que x^ω e y^ω são pontos aderentes de $(x^n)_n$ e $(y^n)_n$, respectivamente. $\square$

Lema 1.28. *Uma $\mathcal{J}$-classe J de um semigrupo compacto S contém um elemento limitado por idempotentes se e só se todos os elementos de J são limitados por idempotentes.*

Demonstração. Suponhamos que u é um elemento de J limitado pelos idempotentes e e f. Seja $v \in J$. Então existem $x, y, z, t \in S^1$ tais que $u = xvy$ e $v = zut$. Logo

$$v = zut = zeuft = (zex)v(yft) \in SvS.$$

Portanto v é limitado por idempotentes, pelo Lema 1.27. $\square$

Exemplo 1.29. Consideremos o grafo etiquetado G da Figura 1.8. Para cada palavra u sobre o alfabeto $\{a, b, c, d\}$, denotemos por $[u]$ a imagem pelo homomorfismo de transição de G. Denotemos por L a linguagem reconhecida por G. Temos $[a] = [bca]$. Logo $[a]$ é $\mathcal{L}$-equivalente a $[ca]$. Como $[b] = [b^2]$ e $[a] = [bcab]$, também sabemos que $[a]$ é limitado por idempotentes. Logo $\delta_L(a)$ e $\delta_L(ca)$ são $\mathcal{L}$-equivalentes e $\delta_L(a)$ é limitado por idempotentes, pela Observação 1.14. Suponhamos que existe uma palavra não vazia x tal que $\delta_L(x)$ é idempotente e $\delta_L(ca) = \delta_L(xca)$. Então $dxca \in L$, pois $dca \in L$. Ora $dxca \in L$ implica que $x = cy$ para alguma palavra y, eventualmente vazia. Como $\delta_L(x)$ é idempotente e $x \in L$, temos $cycy \in L$. Logo b e c são as únicas letras que podem ser factores de y. Como $[cb] = [c]$, deduzimos que $[cy] = [c^k]$ para algum inteiro positivo k. Portanto, podemos supor que $x = c^k$. Como $dc^k d^k b \in L$ e $dc^{2k} d^k b \notin L$, temos $\delta_L(c^k) \neq \delta_L(c^{2k})$, o que contradiz a hipótese de que $\delta_L(x)$ é idempotente. Logo $\delta_L(ca)$ é um elemento de $S(L)$ que não é limitado por idempotentes, apesar de ser $\mathcal{L}$-equivalente (e portanto $\mathcal{J}$-equivalente) a um elemento de $S(L)$ que é limitado por idempotentes. Portanto a condição “compacto” no Lema 1.28 não é supérflua, e o semigrupo $S(L)$ é disso exemplo.

No caso dos semigrupos compactos, o Lema 1.28 permite-nos falar sem ambiguidade numa *$\mathcal{J}$-classe limitada por idempotentes*. Contudo, os elementos de uma $\mathcal{J}$-classe limitada

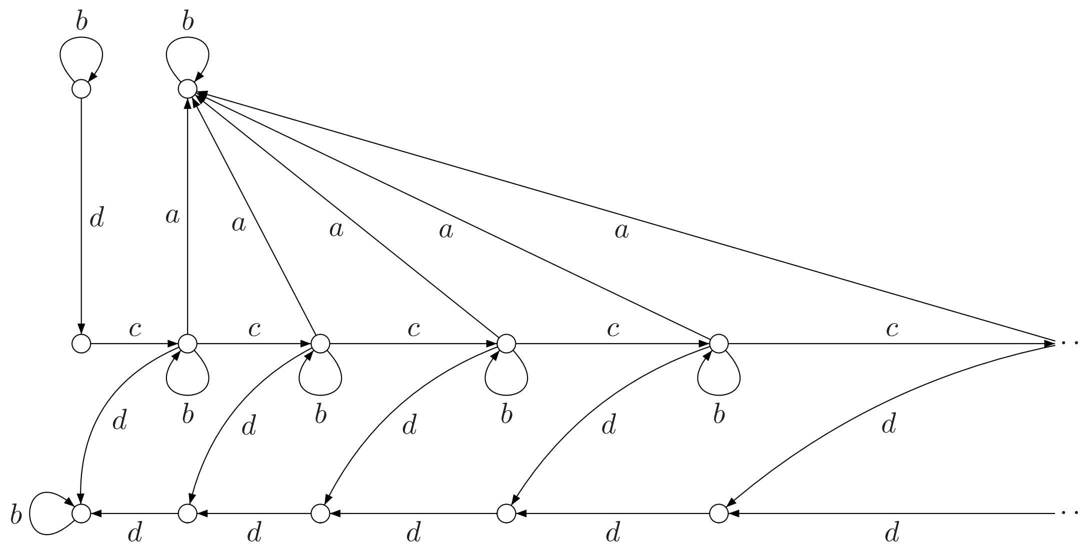


Figura 1.8: Exemplo atestando que a condição “compacto” no Lema 1.28 não é supérflua.

por idempotentes não têm que ser limitados pelos mesmos idempotentes. Por outro lado, os elementos de uma $\mathcal{H}$-classe são limitados pelos mesmos idempotentes. Uma condição necessária (mas não suficiente) para que uma $\mathcal{J}$-classe seja limitada por idempotentes é que esteja $\mathcal{J}$-abaixo de alguma $\mathcal{J}$-classe regular. Esta condição não é suficiente: no caso do semigrupo da Figura 1.7, ba está $\mathcal{J}$-abaixo da $\mathcal{J}$-classe de a, a qual é regular, no entanto se ba fosse limitado por idempotentes então teríamos $ba = a^2ba$ uma vez que a^2 é o único idempotente que é factor de ba; ora $ba \neq a^2ba$. O próximo lema dá-nos uma condição suficiente para que uma $\mathcal{J}$-classe seja limitada por idempotentes.

Lema 1.30. *Num semigrupo compacto S, seja J uma $\mathcal{J}$-classe com pelo menos um par de elementos que não são $\mathcal{R}$-equivalentes nem $\mathcal{L}$-equivalentes. Então J é limitada por idempotentes.*

Demonstração. Sejam u e v dois elementos de J que não são $\mathcal{R}$-equivalentes nem são $\mathcal{L}$-equivalentes. Uma vez que u e v são $\mathcal{J}$-equivalentes, existem $x, y, z, t \in S^1$ tais que $u = xvy$ e $v = zut$. Então $u = xzuty$. Se tivéssemos $xz \notin S$ então teríamos $x = z = 1$, e portanto $u = vy$ e $v = ut$; mas então u e v seriam $\mathcal{R}$-equivalentes. Logo $xz \in S$. Analogamente, $ty \in S$. Então $u = (xz)u(ty) \in SuS$. Portanto u (e logo J) é limitado por idempotentes, pelo Lema 1.27. $\square$

Por exemplo, no semigrupo da Figura 1.7 a $\mathcal{J}$-classe de $baab$ não é regular mas é limitada por idempotentes, porque contém mais do que uma $\mathcal{R}$-classe e mais do que uma $\mathcal{L}$-classe. Por outro lado, a condição dada pelo Lema 1.30 não é necessária: no semigrupo da Figura 1.7, b^2ab^2 (imediatamente acima do ideal mínimo) é limitado pelo idempotente b^2, no entanto a sua $\mathcal{J}$-classe apenas tem uma $\mathcal{R}$-classe; um outro exemplo é dado pelo próprio ideal mínimo.

1.5 Pseudovariedades de semigrupos e variedades de linguagens

Uma *pseudovariedade de semigrupos* é uma classe não vazia de semigrupos finitos que contém os divisores e os produtos directos finitos dos seus elementos. Vejamos alguns exemplos.

1. A classe S dos semigrupos finitos é uma pseudovariedade de semigrupos.

2. Um semigrupo diz-se *trivial* se tiver um único elemento. A classe I dos semigrupos triviais é uma pseudovariedade de semigrupos.

3. A classe Com dos semigrupos finitos comutativos é uma pseudovariedade de semigrupos.

4. A classe Sl dos semi-reticulados finitos é uma pseudovariedade de semigrupos.

5. A classe dos monóides finitos não é uma pseudovariedade de semigrupos, pois um monóide finito pode ter subsemigrupos que não são monóides.

6. Um subsemigrupo de um grupo pode não ser um grupo (por exemplo, $\mathbb{Z}^+$ é um subsemigrupo do grupo aditivo $\mathbb{Z}$, mas não é um grupo porque não contém os simétricos dos seus elementos). No entanto, num grupo finito o inverso de um elemento g é igual a g^n para algum inteiro positivo n, pelo que um subsemigrupo de um grupo finito ainda é um grupo. Logo a classe G dos grupos finitos é uma pseudovariedade de semigrupos.

7. Dada uma relação de Green $\mathcal{K}$ num semigrupo S, dizemos que S é $\mathcal{K}$-*trivial* se a relação $\mathcal{K}$ em S for a igualdade. As classes J, R, L e A dos semigrupos finitos $\mathcal{J}$-triviais, $\mathcal{R}$-triviais, $\mathcal{L}$-triviais e $\mathcal{H}$-triviais, respectivamente, são pseudovariedades de semigrupos. Os semigrupos $\mathcal{H}$-triviais denominam-se *aperiódicos*.

8. Um *zero à direita* (respectivamente, *à esquerda*) de um semigrupo S é um elemento z de S tal que $xz = z$ (respectivamente, $zx = z$) para todo o elemento x de S; observemos que um zero à direita (ou à esquerda) é um idempotente. A classe D (respectivamente K) dos semigrupos finitos cujos idempotentes são zeros à direita (respectivamente à esquerda) é uma pseudovariedade de semigrupos. Um *zero* de um semigrupo S é um elemento de S que é simultaneamente zero à esquerda e zero à direita; um semigrupo tem no máximo um zero. Um semigrupo com zero diz-se *nilpotente*. A classe N dos semigrupos finitos nilpotentes é a pseudovariedade $\mathsf{D} \cap \mathsf{K}$.

9. Se e é um idempotente de um semigrupo S então o conjunto eSe é um subsemigrupo de S que tem e como elemento neutro. O monóide eSe é referido como sendo o *monóide local* de S em e. Dada uma classe V de semigrupos, o *local de* V é a classe $\mathscr{L}\mathsf{V}$ dos semigrupos finitos cujos monóides locais estão em V. Se V é uma pseudovariedade de semigrupos então $\mathscr{L}\mathsf{V}$ é uma pseudovariedade de semigrupos.

A intersecção de pseudovariedades também é uma pseudovariedade. A *pseudovariedade gerada* por uma classe $\mathscr{C}$ de semigrupos finitos é a intersecção das pseudovariedades contendo $\mathscr{C}$. Por exemplo, pela Proposição 1.1, qualquer pseudovariedade de semigrupos que contém o semi-reticulado $\mathscr{U}$ também contém Sl, isto é, Sl é a pseudovariedade de semigrupos gerada por $\mathscr{U}$ (admite-se o abuso de notação que consiste em considerar $\mathscr{U}$ no lugar de $\{\mathscr{U}\}$). Mais geralmente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.31 ([Alm95, Início da Secção 3.1]). *A pseudovariedade de semigrupos gerada por $\mathscr{C}$ é a classe dos divisores de produtos directos finitos de elementos de $\mathscr{C}$.*

Em geral a união de pseudovariedades não é uma pseudovariedade: por exemplo, $\mathsf{G} \cup \mathsf{SI}$ não é uma pseudovariedade porque se G é um grupo não trivial então $G \times \mathscr{U}$ não é um grupo (porque tem mais do que um idempotente) nem é um semi-reticulado (porque nem todos os seus elementos são idempotentes).

Uma *variedade de linguagens* é uma correspondência $\mathcal{W}$ que associa a cada alfabeto finito A um conjunto $\mathcal{W}A^+$ de linguagens racionais de A^+ com as seguintes propriedades, para quaisquer alfabetos finitos:

1. o conjunto $\mathcal{W}A^+$ contém a união de uma qualquer família finita dos seus elementos, e o complementar em A^+ de qualquer dos seus elementos;
2. se $L \in \mathcal{W}A^+$ então para qualquer $a \in A$ as linguagens $\{w \in A^+ : aw \in L\}$ e $\{w \in A^+ : wa \in L\}$ pertencem a $\mathcal{W}A^+$;
3. se $\varphi : A^+ \to B^+$ é um homomorfismo e se $L \in \mathcal{W}B^+$ então $\varphi^{-1}(L) \in \mathcal{W}A^+$.

A variedade de linguagens $\mathcal{V}$, em vez de ser encarada como uma correspondência, também pode ser encarada como sendo a classe das linguagens L sobre alfabetos finitos A tais que $L \in \mathcal{V}A^+$.

Vamos considerar no conjunto das variedades de linguagens a seguinte ordem: $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ se e só se $\mathcal{V}A^+ \subseteq \mathcal{W}A^+$ para qualquer alfabeto finito A. Quanto ao conjunto das pseudovariedades, vamos considerá-lo ordenado pela inclusão. Dada uma pseudovariedade V, uma linguagem L de A^+ diz-se V-*reconhecível* se for reconhecida por um semigrupo de V. Denotemos por $\mathcal{V}$ a classe das linguagens V-reconhecíveis. Pela Proposição 1.15 a classe $\mathcal{V}$ é a classe das linguagens sobre alfabetos finitos cujo semigrupo sintáctico pertence a V.

Teorema 1.32 (Eilenberg [Eil76]). *Para qualquer pseudovariedade V de semigrupos a classe $\mathcal{V}$ é uma variedade de linguagens. A correspondência $\mathsf{V} \to \mathcal{V}$ é um isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados.*

O *fecho Booleano* de uma família $\mathscr{F}$ de subconjuntos de um conjunto X é o conjunto dos subconjuntos de X que podem ser obtidos dos elementos de $\mathscr{F}$ aplicando um número finito de vezes a união binária e a operação unária de tomar o complemento em X. Note-se que o fecho Booleano de $\mathscr{F}$ também é fechado para a intersecção binária de elementos de $\mathscr{F}$. Dado um alfabeto finito A, as *linguagens localmente testáveis* de A^+ são as linguagens do fecho Booleano do conjunto de linguagens da forma A^*wA^*, wA^* e A^*w, com $w \in A^+$. A seguinte caracterização da classe das linguagens localmente testáveis é um resultado muito importante da teoria dos semigrupos finitos. Trata-se de uma particularização do Teorema 1.32, e o seu interesse imediato reside em fornecer um algoritmo que decide se uma linguagem é localmente testável ou não.

Teorema 1.33 ([BS73, McN74, Zal73, Zal72]). *A variedade de linguagens correspondente a $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ é a classe das linguagens localmente testáveis.*

A noção de pseudovariedade de semigrupos pode ser transportada para outras estruturas algébricas. Por exemplo, uma *pseudovariedade de monóides* é uma classe de monóides finitos que contém os produtos finitários dos seus elementos, as imagens dos seus elementos por homomorfismos de monóides, e os submonóides dos seus elementos. De acordo com esta definição, a classe dos monóides finitos é um exemplo de uma pseudovariedade de monóides que não é uma pseudovariedade de semigrupos. Se V é uma pseudovariedade de monóides então $\mathscr{L}\mathsf{V}$ é uma pseudovariedade de semigrupos. Em [Alm02c] é feito um tratamento unificado e sistemático da noção de pseudovariedade no contexto mais abrangente da Álgebra Universal.

1.6 Semigrupos profinitos relativamente livres

Seja V uma pseudovariedade de semigrupos. Um *semigrupo pró-*V é um semigrupo compacto T tal que, para qualquer par de elementos distintos u e v de T, existe um homomorfismo contínuo φ de T num semigrupo F de V tal que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Recordemos que S designa a pseudovariedade dos semigrupos finitos. Note-se que os semigrupos pró-S são precisamente os semigrupos profinitos.

Facilmente se verifica que o produto directo de semigrupos pró-V é pró-V, e que um subsemigrupo fechado de um semigrupo pró-V também é pró-V. Um semigrupo finito é pró-V se e só se pertence a V [Alm02c, Secção 4].

Teorema 1.34 ([Alm05b, Secção 3.2] ou [Alm02c, Proposição 4.4])**.** *Consideremos uma pseudovariedade* V *de semigrupos. Seja S um semigrupo topológico. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *S é pró-V;*
2. *S é isomorfo a um limite projectivo sobrejectivo de semigrupos de V;*
3. *S é isomorfo a um limite projectivo de semigrupos de V.*

Consideremos um alfabeto A e uma pseudovariedade V de semigrupos. Seja $Con_A\mathsf{V}$ o conjunto das congruências θ sobre A^+ tais que A^+/θ pertence a V. Como a intersecção de congruências sobre um mesmo semigrupo ainda é uma congruência sobre esse semigrupo, o conjunto $Con_A\mathsf{V}$ munido da ordem parcial $\supseteq$ é um conjunto dirigido. A família

$$\{q_{\theta,\rho} : A^+/\theta \to A^+/\rho \mid \rho, \theta \in Con_A\mathsf{V}, \rho \supseteq \theta\}$$

é um sistema dirigido sobrejectivo. O seu limite projectivo é um semigrupo pró-V, denotado por $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Se o alfabeto A for finito então $Con_A\mathsf{V}$ é numerável, pelo que o espaço topológico $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é gerado por uma métrica [Wil70, Teorema 22.3]. Observemos desde já que o semigrupo $\overline{\Omega}_A\mathsf{I}$ é trivial.

Uma função ψ de um conjunto não vazio X num semigrupo topológico S diz-se uma *função geradora de S* se o subsemigrupo de S gerado por $\psi(X)$ for denso em S.

Teorema 1.35 ([Alm05b, Proposição 3.4])**.** *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos.*

1. *Se V é uma pseudovariedade diferente de I então a função $\iota : A \to \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ definida por $\iota(a) = ([a]_\theta)_{\theta \in Con_A\mathsf{V}}$ é injectiva, pelo que A pode de forma natural ser considerado um subconjunto de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.*

2. *A função ι é uma função geradora do semigrupo compacto $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.*

3. *Para todo o semigrupo S pró-V e para toda a função $\varphi : A \to S$ existe um único homomorfismo contínuo $\hat{\varphi} : \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \to S$ tal que $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$, ou seja, $\hat{\varphi}$ é tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \arrow[d, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

4. *Seja T um semigrupo pró-V com função geradora $\kappa : B \to T$ tal que $|A| = |B|$ e tal que para todo o semigrupo S de V e para toda a função $\varphi : B \to S$ existe um homomorfismo contínuo $\varphi_T : T \to S$ tal que $\varphi_T \circ \kappa = \varphi$. Então T é isomorfo a $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.*

Esboço de uma demonstração. (1): Se $\mathsf{V} \neq \mathsf{I}$ então existe um semigrupo S com pelo menos dois elementos distintos. Dados dois elementos distintos a e b de A, existe uma função $\varphi : A \to S$ tal que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Logo $[a]_{\operatorname{Ker}\varphi^+} \neq [b]_{\operatorname{Ker}\varphi^+}$, donde $\iota(a) \neq \iota(b)$.

(2): Resulta da Proposição 1.8.

(3): A unicidade de $\hat{\varphi}$ resulta de $\iota(A)$ ser denso em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Verifiquemos a existência. Existe um isomorfismo ψ de $A^+/\operatorname{Ker}\varphi^+$ em $\langle\varphi(A)\rangle$. Suponhamos que $S \in \mathsf{V}$. Então $A^+/\operatorname{Ker}\varphi^+ \in \mathsf{V}$. Seja π a projecção canónica de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ em $A^+/\operatorname{Ker}\varphi^+$. Basta então tomar $\hat{\varphi} = \psi \circ \pi$. Mais geralmente, se S é pró-V então invocamos o Teorema 1.34 de modo a utilizarmos o caso anterior.

(4): Seja f uma bijecção de A em B. Sejam $g = \widehat{\kappa \circ f}$ e $h = (\iota \circ f^{-1})_T$. Então $h \circ g \circ \iota = \mathrm{Id}_A$ e $g \circ h \circ \kappa = \mathrm{Id}_B$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \arrow[d, dashed, "g"] \\ B \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & T \arrow[d, dashed, "h"] \\ A \arrow[r, "\iota"] & \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \end{tikzcd}$$

Como ι e κ são funções geradoras, concluímos que as funções g e h são isomorfismos mutuamente inversos. □

O semigrupo $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é designado como sendo o *semigrupo profinito livre gerado por A relativamente à pseudovariedade* V, ou simplesmente como o *semigrupo pró-*V *livre gerado por A*. Para o caso da pseudovariedade de todos os semigrupos finitos existe uma designação especial: o semigrupo compacto $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$ denomina-se *semigrupo profinito livre gerado por A*.

Pela alínea 4 do Teorema 1.35, se A e B têm o mesmo cardinal então $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e $\overline{\Omega}_B\mathsf{V}$ são semigrupos compactos isomorfos. É por esta razão que se n for o cardinal de A então $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é frequentemente representado por $\overline{\Omega}_n\mathsf{V}$. Observe-se também que se $A \subseteq B$ então $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ mergulha em $\overline{\Omega}_B\mathsf{V}$.

O subsemigrupo de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ gerado por $\iota(A)$ é habitualmente denotado por $\Omega_A\mathsf{V}$.

Se V é uma pseudovariedade gerada por um semigrupo (como por exemplo Sl, que é gerada por $\mathscr{U}$), então $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ pertence a V [Alm05b, Proposição 4.3]. Por exemplo, se A é um conjunto finito então facilmente se prova que $\overline{\Omega}_A\mathsf{Sl}$ é isomorfo a $\mathcal{P}'(A)$. Como nos mostra a próxima proposição, existem muitos exemplos em que $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ não é um semigrupo finito. Para sermos mais precisos, de facto $\overline{\Omega}_A\mathsf{G}$ e $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$ têm cardinal $2^{\aleph_0}$, por exemplo [Alm95, Corolário 3.7.7].

Proposição 1.36 ([Alm05b, Bau65])**.** *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos. Consideremos o único homomorfismo $\iota^+ : A^+ \to \Omega_A\mathsf{V}$ tal que $\iota^+|_A = \iota$. Se V contém N ou G então ι^+ é um isomorfismo.*

Aplicando a Proposição 1.36, vamos identificar $\Omega_A\mathsf{V}$ com A^+, quando V contém N ou G.

Proposição 1.37. *Se* V *contém* N *então os elementos de* A^+ *são pontos isolados de* $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. *Se* V *contém* G *então nenhum elemento de* A^+ *é um ponto isolado de* $\overline{\Omega}_A\mathsf{G}$.

Exemplo 1.38. [Alm95, Secção 3.7] O semigrupo compacto $\overline{\Omega}_A\mathsf{N}$ é obtido do semigrupo A^+ acrescentado um "ponto no infinito" que é um zero. Ou seja, a topologia de $\overline{\Omega}_A\mathsf{N}$ é caracterizada pelo facto de que uma sucessão $(u_n)_n$ de elementos de A^+ é convergente em $\overline{\Omega}_A\mathsf{N}$ precisamente quando é constante a partir de certa ordem ou quando $\lim |u_n| = +\infty$, e no segundo caso $(u_n)_n$ converge para o ponto no infinito.

Exemplo 1.39. O semigrupo compacto $\overline{\Omega}_{\{x\}}\mathsf{S}$ é a união de $\Omega_{\{x\}}\mathsf{S} = \{x\}^+$ com um grupo compacto K, pelo Teorema 1.3. O grupo compacto K é isomorfo a $\overline{\Omega}_{\{x\}}\mathsf{G}$ [Alm95, Secção 3.7]. O seu elemento neutro é x^ω e é o subsemigrupo fechado de $\overline{\Omega}_{\{x\}}\mathsf{S}$ gerado pelo elemento $x^\omega x$, o qual habitualmente é denotado por $x^{\omega+1}$.

Mais geralmente, um elemento de K representa-se sob a forma x^ν, em que ν é um símbolo consistente com o significado das notações x^k e x^ω, onde $k \in \mathbb{Z}^+$ (veja-se [AV06, Secção 2] para uma abordagem formal). Assim, por exemplo, $x^{\omega+7}$ é o elemento $x^\omega x^7$, e $x^{\omega-7}$ é o inverso de $x^{\omega+7}$ em K. Se S é um semigrupo profinito e s é um elemento de S, então s^ν denota a imagem de x^ν pelo único homomorfismo contínuo $\varphi : \overline{\Omega}_{\{x\}}\mathsf{S} \to S$ tal que $\varphi(x) = s$. Por exemplo, $s^{\omega+1}$ é o elemento $s^\omega s$.

A proposição seguinte faz a ligação entre as propriedades combinatórias da variedade das linguagens V-reconhecíveis e a topologia dos semigrupos pró-V livres, quando $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{V}$. Para um resultado mais geral veja-se [Alm95, Teorema 3.6.1], ou [Alm05b, Secção 3].

Proposição 1.40. *Seja* V *uma pseudovariedade que contém* N. *Uma linguagem* L *de* A^+ *é* V*-reconhecível se e só se o fecho topológico de* L *em* $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *é aberto. A topologia de* $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *é gerada pelo fecho topológico em* $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *das linguagens* V*-reconhecíveis de* A^+.

O conhecimento contemporâneo da estrutura de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ depende bastante de V. Há muitas famílias de pseudovariedades para as quais essa estrutura está completamente determinada e é de descrição simples, como é o caso da pseudovariedade J: veja-se [Alm95, Capítulo 8]. Outras há que são de uma enorme riqueza, e cujo estudo está longe de se encontrar esgotado: é o caso de G, mesmo quando o alfabeto tem apenas uma letra [RZ00]. A família das pseudovariedades que contêm $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ merecerá nesta monografia a nossa especial atenção; a estrutura algébrico-topológica dos respectivos semigrupos profinitos relativamente livres ainda se encontra bastante inexplorada. Em [Cos01] podemos encontrar vários resultados interessantes sobre $\overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{SI}$. Embora em [RS02, AV03, AV06, Alm05a] já se faça luz sobre uma parte da estrutura de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$, muito permanece por conhecer neste caso.

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de elementos de A^+. Se $\mathsf{V} \supseteq \mathsf{N}$ e $(u_n)_n$ converge para u em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, então u pertence a A^+ se e só se a sucessão de comprimentos $(|u_n|)_n$ é limitada: este facto segue da Proposição 1.37. Por esta razão, dizemos que os elementos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V} \setminus A^+$ têm *comprimento infinito*. Dado $w \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, o conjunto dos factores finitos de w será denotado por $F(w)$.

Os elementos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$ serão referidos como sendo as *pseudopalavras sobre* A. Mais geralmente, se V for uma pseudovariedade então os elementos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ serão designados por *pseudopalavras módulo* V *sobre* A, mas não havendo perigo de confusão os elementos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ também serão designados apenas por pseudopalavras.

As pseudopalavras infinitas (isto é, de comprimento infinito) têm factores idempotentes (diferentes da palavra vazia):

Proposição 1.41 ([Alm95, Corolário 5.6.2]). *Para qualquer pseudovariedade* V*, se* $u \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \setminus \Omega_A\mathsf{V}$ *então* $u = zft$ *para alguns elementos* $z, f, t \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \setminus \Omega_A\mathsf{V}$ *em que* f *é um idempotente.*

A seguinte proposição, que ser-nos-á útil mais à frente, está na base da demonstração da Proposição 1.41.

Proposição 1.42 (Folklore; ver [Alm95, Proposição 3.7.1]). *Suponhamos que* S *é um semigrupo finito com* $n-1$ *elementos. Então, para quaisquer* $s_1, \ldots, s_n \in S$ *existem inteiros* p, q *tais que* $1 \leq p < q < n$ *e* $s_1 \cdots s_n = (s_1 \cdots s_p)(s_{p+1} \cdots s_q)^\omega (s_{q+1} \cdots s_n)$*.*

1.6.1 Uma teoria equacional

Uma *identidade sobre* A é um par (u, v) de elementos de A^+. Normalmente a identidade (u, v) é denotada através da igualdade formal $u = v$. Dizemos que o semigrupo S *satisfaz* a identidade $u = v$ se, para qualquer função $\varphi : A \to S$, o único homomorfismo $\varphi^+ : A^+ \to S$ que estende φ é tal que $\varphi^+(u) = \varphi^+(v)$. Por exemplo, se $A = \{a, b\}$ então os semi-reticulados são os semigrupos que satisfazem as identidades $ab = ba$ e $a^2 = a$.

Dada uma pseudovariedade V de semigrupos, seja Γ_V o conjunto das identidades sobre A satisfeitas por todos os elementos de V. O conjunto Γ_V é uma congruência sobre A^+. O semigrupo A^+/Γ_V é isomorfo a $\Omega_A\mathsf{V}$ (cf. [Alm95, Proposição 3.4.2] e [Alm05b, Teorema 4.2]).

Uma *pseudoidentidade* é uma igualdade formal $u = v$ entre duas pseudopalavras sobre o mesmo alfabeto. Uma pseudoidentidade $u = v$ sobre o alfabeto A é satisfeita por um semigrupo S profinito se para qualquer função $\varphi : A \to S$ tivermos $\hat\varphi(u) = \hat\varphi(v)$. Se $\Omega_A\mathsf{V} = A^+$ e se $u, v \in A^+$ então estes conceitos coincidem com os conceitos análogos sobre identidades. Dizemos que uma classe $\mathscr{C}$ de semigrupos finitos satisfaz uma pseudoidentidade $u = v$ se todos os elementos de $\mathscr{C}$ satisfazem $u = v$. Para um conjunto Σ de pseudoidentidades denotemos por $[\![\Sigma]\!]$ a classe dos semigrupos finitos que satisfazem todos as pseudoidentidades de Σ.

Teorema 1.43 (Reiterman [Rei82]). *Para qualquer conjunto* Σ *de pseudoidentidades, a classe* $[\![\Sigma]\!]$ *é uma pseudovariedade de semigrupos, e todas as pseudovariedades de semigrupos são desta forma.*

Se $\mathsf{V} = [\![\Sigma]\!]$ então dizemos que Σ é uma *base* de pseudoidentidades para V. Eis alguns exemplos de descrições de pseudovariedades por pseudoidentidades:

- $\mathsf{Sl} = [\![xy = yx, x^2 = x]\!]$;
- $\mathsf{D} = [\![yx^\omega = x^\omega]\!]$;
- $\mathsf{A} = [\![x^{\omega+1} = x^\omega]\!]$.

Enquanto que Sl é uma pseudovariedade descrita por duas identidades, as pseudovariedades D e A não admitem uma base de identidades (cf. [Alm95, Exercício 3.2.1]).

Sejam V e W pseudovariedades tais que $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{W} \neq \mathsf{I}$. Uma vez que $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é um semigrupo pró-W, existe um único homomorfismo contínuo $p_{\mathsf{W},\mathsf{V}} : \overline{\Omega}_A\mathsf{W} \to \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ cuja restrição a A é a função geradora $\iota : A \to \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Este homomorfismo é sobrejectivo. Dizemos que $p_{\mathsf{W},\mathsf{V}}(u)$ é a *projecção* de u em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Na literatura é frequente o abuso de notação que consiste na identificação de $p_{\mathsf{W},\mathsf{V}}(u)$ com u. Por simplicidade vamos denotar $p_{\mathsf{S},\mathsf{V}}$ por p_V.

Teorema 1.44 ([Alm05b, Teorema 4.2])**.** *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos. Para quaisquer* $u, v \in \overline{\Omega}_A\mathsf{S}$ *a igualdade* $p_\mathsf{V}(u) = p_\mathsf{V}(v)$ *verifica-se se e só se todos os elementos de* V *satisfazem a pseudoidentidade* $u = v$.

Consideremos no alfabeto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ com n elementos a ordem em que a_i é a i-ésima letra. Seja $u \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Dado um semigrupo S pró-V, denotamos por u_S a operação n-ária de S que faz corresponder a cada elemento $(s_1, \ldots, s_n)$ de S^n a imagem de u pelo único homomorfismo contínuo $\varphi : \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \to S$ tal que $\varphi(a_i) = s_i$. Note-se que se $\psi : S \to T$ é um homomorfismo contínuo entre semigrupos pró-V então $\psi(u_S(s_1, \ldots, s_n)) = u_T(\psi(s_1), \ldots, \psi(s_n))$. Na ausência de confusão omitimos a referência em índice do semigrupo, escrevendo $u(s_1, \ldots, s_n)$ no lugar de $u_S(s_1, \ldots, s_n)$.

1.6.2 As pseudovariedades D e K

Para cada inteiro positivo n consideremos as seguintes pseudovariedades:

$$\mathsf{D}_n = [\![yx_1 \cdots x_n = x_1 \cdots x_n]\!], \qquad \mathsf{K}_n = [\![x_1 \cdots x_n y = x_1 \cdots x_n]\!].$$

Reparemos que $\mathsf{D}_1 \subseteq \mathsf{D}_2 \subseteq \mathsf{D}_3 \subseteq \cdots$ e que $\mathsf{K}_1 \subseteq \mathsf{K}_2 \subseteq \mathsf{K}_3 \subseteq \cdots$. Não é difícil mostrar que $\mathsf{D} = \bigcup_{n\geq 1} \mathsf{D}_n$ e que $\mathsf{K} = \bigcup_{n\geq 1} \mathsf{K}_n$.

Consideremos um alfabeto finito A. Seja w uma palavra de A^+ e n um inteiro positivo. Se $|w| \geq n$ então definimos $\mathrm{t}_n(w)$ (respectivamente $\mathrm{i}_n(w)$) como sendo o único sufixo (respectivamente prefixo) de w de comprimento n; se $|w| < n$ então definimos $\mathrm{t}_n(w) = \mathrm{i}_n(w) = w$.

Lema 1.45. *Seja* $n \geq 1$. *A identidade* $u = v$ *é satisfeita por* D_n *(respectivamente* K_n*) se e só se* $\mathrm{t}_n(u) = \mathrm{t}_n(v)$ *(respectivamente* $\mathrm{i}_n(u) = \mathrm{i}_n(v)$*).*

Como consequência do Lema 1.45 e da definição de $\Omega_A\mathsf{D}_n$, o semigrupo $\Omega_A\mathsf{D}_n$ identifica-se com o semigrupo sobre o conjunto das palavras de A^+ de comprimento menor ou igual a n munido da operação $(u, v) \mapsto \mathrm{t}_n(uv)$. Em particular, t_n é um homomorfismo de A^+ em $\Omega_A\mathsf{D}_n$. Como $\Omega_A\mathsf{D}_n$ é denso em $\overline{\Omega}_A\mathsf{D}_n$ e como, por A ser finito, $\overline{\Omega}_A\mathsf{D}_n$ é um semigrupo finito, temos $\overline{\Omega}_A\mathsf{D}_n = \Omega_A\mathsf{D}_n$. Se V é uma pseudovariedade que contém D então $\Omega_A\mathsf{D}_n \in \mathsf{V}$ e $\Omega_A\mathsf{V} = A^+$. Podemos então considerar o único homomorfismo contínuo $\mathrm{t}_n^\mathsf{V} : \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \to \Omega_A\mathsf{D}_n$ que estende t_n. Então $\mathrm{t}_n^\mathsf{V} \circ p_\mathsf{V} = \mathrm{t}_n^\mathsf{S}$, pois é claro que $\mathrm{t}_n^\mathsf{V} \circ p_\mathsf{V}(a) = \mathrm{t}_n^\mathsf{S}(a)$ para qualquer $a \in A$. Se u é uma palavra de A^+ de comprimento n e $w \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ então $\mathrm{t}_n^\mathsf{V}(wu) = u$, uma vez que tal é obviamente verdade quando $w \in A^+$, e A^+ é denso em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Logo qualquer elemento infinito π de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tem $\mathrm{t}_n^\mathsf{V}(\pi)$ como único sufixo de comprimento n. Não havendo confusão, escrevemos t_n no lugar de t_n^V. Considerações duais são válidas para K_n e i_n. Estabelecemos a convenção de que $\mathrm{i}_0(w) = \mathrm{t}_0(w) = 1$.

Dados $x \in A^\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$, denotamos por $x_{[k,k+n]}$ a sequência finita $x_k x_{k+1} \ldots x_{k+n}$. A sequência infinita à direita $x_k x_{k+1} \ldots$ é denotada por $x_{[k,+\infty[}$, e a sequência infinita à esquerda $\ldots x_{k-1} x_k$ por $x_{]-\infty,k]}$. Suponhamos que A é um alfabeto finito. Se considerarmos em A a topologia discreta então, pelo Teorema de Tychonoff, $A^\mathbb{Z}$ é um espaço compacto. A topologia de $A^\mathbb{Z}$ é determinada pela métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 2^{-\min\{k\geq 0 :\, x_{[-k,k]} \neq y_{[-k,k]}\}} & \text{se } x \neq y. \end{cases} \tag{1.4}$$

A topologia de $A^{\mathbb{Z}}$ caracteriza-se pelo facto de que uma sucessão $(x^{(n)})_n$ de elementos de $A^{\mathbb{Z}}$ converge para x se e só se, para qualquer inteiro positivo k, existe p_k tal que se $n \geq p_k$ então $(x^{(n)})_{[-k,k]} = x_{[-k,k]}$.

Considerações análogas podem ser feitas a respeito de $A^{\mathbb{Z}_0^+}$ e de $A^{\mathbb{Z}^-}$.

Proposição 1.46 ([Alm95, Secção 3.7])**.** *Seja A um alfabeto finito. O semigrupo compacto $\overline{\Omega}_A\mathsf{K}$ é (isomorfo ao) o único semigrupo compacto $A^{+\infty}$ definido no conjunto $A^+ \cup A^{\mathbb{Z}_0^+}$ com as seguintes características:*

1. *o conjunto $A^{\mathbb{Z}_0^+}$ munido da topologia produto é um subespaço topológico fechado de $A^{+\infty}$;*
2. *os elementos de A^+ são pontos isolados de $A^{+\infty}$;*
3. *uma sucessão $(u_k)_{k\geq 1}$ de elementos de A^+ converge para um elemento x de $A^{\mathbb{Z}_0^+}$ se e só se para todo o n existe p tal que se $k \geq p$ então $x_{[0,n]}$ é um prefixo de u_k;*
4. *o semigrupo A^+ é um subsemigrupo de $A^{+\infty}$;*
5. *os elementos de $A^{\mathbb{Z}_0^+}$ são zeros à esquerda;*
6. *se $x = x_0x_1x_2x_3\ldots \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$ e $u = u_1 \cdots u_n \in A^+$, com $x_i, u_j \in A$, então ux é a sequência $u_1 \ldots u_n x_0x_1x_2x_3 \ldots$.*

O semigrupo compacto $\overline{\Omega}_A\mathsf{D}$ é isomorfo ao único semigrupo compacto $A^{-\infty}$ definido no conjunto $A^+ \cup A^{\mathbb{Z}^-}$ de modo dual à forma como foi definido $A^{+\infty}$.

Na verdade a condição (6) da Proposição 1.46 é redundante para definir a estrutura de semigrupo compacto de $A^{+\infty}$, tendo em conta a condição (3) e o facto de $(x_{[0,n]})_{n\geq 0}$ convergir para x em $A^+ \cup A^{\mathbb{Z}_0^+}$.

A menor pseudovariedade de semigrupos que contém D e K é $\mathscr{L}\mathsf{I}$. Uma pseudovariedade V não está contida em $\mathscr{L}\mathsf{I}$ se e só se V contém algum monóide não trivial.

Proposição 1.47 ([Alm95, Secção 3.7])**.** *Seja A um alfabeto finito. O semigrupo compacto $\overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{I}$ é (isomorfo ao) o único semigrupo compacto A^{∞} definido no conjunto $A^+ \cup A^{\mathbb{Z}^-} \times A^{\mathbb{Z}_0^+}$ com as seguintes características:*

1. *o espaço topológico $A^{\mathbb{Z}^-} \times A^{\mathbb{Z}_0^+}$ é um subespaço fechado de A^{∞};*
2. *os elementos de A^+ são pontos isolados de A^{∞};*
3. *uma sucessão $(u_k)_{k\geq 1}$ de elementos de A^+ converge para um elemento (x, y) de $A^{\mathbb{Z}^-} \times A^{\mathbb{Z}_0^+}$ se e só se $(\mathrm{i}_k(u_k))_{k\geq 1}$ converge para y em $\overline{\Omega}_A\mathsf{K}$ e $(\mathrm{t}_k(u_k))_{k\geq 1}$ converge para x em $\overline{\Omega}_A\mathsf{D}$;*
4. *o semigrupo A^+ é um subsemigrupo de A^{∞};*
5. *para quaisquer $w \in A^+$, $x, x' \in A^{\mathbb{Z}^-}$ e $y, y' \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$ temos*

$$(x, y) \cdot w = (xw, y), \quad w \cdot (x, y) = (x, wy), \quad (x, y) \cdot (x', y') = (x', y).$$

A função

$$\begin{array}{rccc} \chi: & A^{\mathbb{Z}} & \to & A^{\mathbb{Z}^-} \times A^{\mathbb{Z}_0^+} \\ & z & \mapsto & \big(z_{]-\infty,-1]}, z_{[0,+\infty[}\big) \end{array}$$

é um homeomorfismo de espaços topológicos. Dado um elemento (x,y) de $A^{\mathbb{Z}^-} \times A^{\mathbb{Z}_0^+}$, vamos denotar $\chi^{-1}(x,y)$ por $x.y$. De facto, vamos poder fazer um abuso de notação identificando z com $\chi(z)$.

Se V é uma pseudovariedade contendo $\mathscr{L}\mathsf{I}$ então a projecção de um elemento π de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ em $\overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{I}$ será denotada por $\overleftrightarrow{\pi}$; a projecção em $\overline{\Omega}_A\mathsf{K}$ será denotada por $\overrightarrow{\pi}$; e a projecção em $\overline{\Omega}_A\mathsf{K}$ será denotada por $\overleftarrow{\pi}$. Reparemos que se $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \setminus A^+$ então $\overleftrightarrow{\pi} = \overleftarrow{\pi}.\overrightarrow{\pi}$.

Dada uma palavra u de A^+, a sequência infinita à direita $uuuuu\ldots$ (que pode ser encarada como um elemento de $A^{\mathbb{Z}_0^+}$) vai ser denotada por $u^{+\infty}$. Dualmente, a sequência infinita à esquerda $\ldots uuuuu$ (encarada como um elemento de $A^{\mathbb{Z}^-}$) vai ser denotada por $u^{-\infty}$. Finalmente, u^∞ denota $u^{-\infty}.u^{+\infty}$.

1.6.3 A pseudovariedade $\mathscr{L}\mathsf{SI}$

Os próximos resultados generalizam a forma como uma palavra aparece como factor de um produto finito de palavras finitas.

Lema 1.48 (cf. [AV06, Lema 8.2])**.** *Seja V uma pseudovariedade que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$. Seja $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ um alfabeto com n elementos. Seja A também um alfabeto finito. Consideremos elementos $w \in \overline{\Omega}_X\mathsf{V}$ e $v_1,\ldots,v_n \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Suponhamos que u é um factor finito de $w_{\overline{\Omega}_A\mathsf{V}}(v_1,\ldots,v_n)$. Então u é um factor de algum dos elementos v_i ou w tem um factor $x_{i_0}x_{i_1}\cdots x_{i_k}x_{i_{k+1}}$ (com $x_{i_j} \in X$) tal que u factoriza-se como $u = u_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_k}u_{i_{k+1}}$ onde u_{i_0} é um sufixo de v_{i_0} e $u_{i_{k+1}}$ é um prefixo de $v_{i_{k+1}}$.*

Lema 1.49 (cf. [AV06, Lema 7.1])**.** *Seja V uma pseudovariedade que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$. Sejam w um elemento de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e u um factor finito de w. Se não existe $a \in A$ tal que ua é um factor de w então $w = vu$ para algum $v \in (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1$; e se não existe $a \in A$ tal que au é um factor de w então $w = uv$ para algum $v \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.*

Os dois lemas precedentes têm em [AV06] uma demonstração para o caso em que $\mathsf{V} = \mathsf{S}$, mas conforme também é observado em [AV06, Observação 8.3], essa demonstração também é válida para qualquer pseudovariedade que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$, graças ao Teorema 1.33.

Corolário 1.50. *Consideremos uma pseudovariedade V contendo $\mathscr{L}\mathsf{SI}$. Sejam $p,s,f \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ com f idempotente. Se u é um factor finito de pfs então u é um factor de pf ou de fs.*

Demonstração. Basta no Lema 1.48 tomar $B = \{x_1,x_2\}$, $w = x_1x_2$, $v_1 = pf$ e $v_2 = fs$. $\square$

Proposição 1.51 ([Cos99, Proposição 3.1] e [Alm95, Secção 10.7])**.** *Seja A um alfabeto finito e sejam $\pi,\rho \in \overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{SI}$. Então $\pi = \rho$ se e só se $F(\pi) = F(\rho)$ e $\overleftrightarrow{\pi} = \overleftrightarrow{\rho}$.*

1.7 Produtos semidirectos com D

1.7.1 Produto semidirecto de pseudovariedades

Exceptuando certos casos assinalados, os resultados mencionados nesta subsecção encontram--se presentes em [Alm95, Capítulo 10].

Sejam S e T dois semigrupos. Dado um elemento t_0 de T e um elemento f do semigrupo S^{T^1} das funções de T^1 em S, denotemos por ${}^{t_0}f$ a função de T^1 em S definida pela regra

$$ {}^{t_0}f(t) = f(tt_0), \quad t \in T^1. $$

Consideremos no conjunto $S^{T^1} \times T$ a seguinte operação binária:

$$(f_1, t_1) \cdot (f_2, t_2) = (f_1 \cdot {}^{t_1} f_2, t_1 t_2).$$

Esta operação é associativa. O semigrupo definido por esta operação designa-se *produto em coroa* entre S e T, e denota-se por $S \circ T$.

Sejam V e W pseudovariedades de semigrupos. O *produto semidirecto* de V e W (denotado por $\mathsf{V} * \mathsf{W}$) é a classe dos divisores dos semigrupos da forma $S \circ T$ com $S \in \mathsf{V}$ e $T \in \mathsf{W}$.

Proposição 1.52. *Para quaisquer pseudovariedades V e W a classe $\mathsf{V} * \mathsf{W}$ é uma pseudovariedade. O produto semidirecto de pseudovariedades de semigrupos é associativo, tem I como elemento neutro, e respeita a ordem de inclusão.*

Em geral $\mathsf{V} * \mathsf{W} \neq \mathsf{W} * \mathsf{V}$. É imediato que $\mathsf{V} \cup \mathsf{W} \subseteq \mathsf{V} * \mathsf{W}$.

Lema 1.53. *Seja W a união de uma cadeia ascendente*

$$\mathsf{W}_1 \subseteq \mathsf{W}_2 \subseteq \mathsf{W}_3 \subseteq \cdots$$

de pseudovariedades. Então W é uma pseudovariedade e para qualquer pseudovariedade V temos

$$\mathsf{V} * \mathsf{W} = \bigcup_{n \geq 1} \mathsf{V} * \mathsf{W}_n, \quad \mathsf{W} * \mathsf{V} = \bigcup_{n \geq 1} \mathsf{W}_n * \mathsf{V}.$$

Proposição 1.54. *Sejam n e m inteiros positivos e V uma pseudovariedade de semigrupos. Então:*

1. $\mathsf{D}_n * \mathsf{D}_m = \mathsf{D}_{n+m}$*;*
2. $\mathsf{D}_n * \mathsf{D} = \mathsf{D} * \mathsf{D}_n = \mathsf{D} * \mathsf{D} = \mathsf{D}$*;*
3. *se* $\mathsf{V} \nsubseteq \mathscr{L}\mathsf{I}$ *então* $\mathsf{K}_n \subseteq \mathsf{V} * \mathsf{D}_n$*;*
4. *se* $\mathsf{V} \nsubseteq \mathscr{L}\mathsf{I}$ *então* $\mathsf{V} * \mathsf{D} = \mathsf{V} * \mathscr{L}\mathsf{I}$*;*
5. $\mathscr{L}\mathsf{I} = \mathscr{L}\mathsf{I} * \mathsf{D}$.

Corolário 1.55. *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$*;*
2. $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}_n$ *para todo o inteiro positivo n;*
3. $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}_n$ *para algum inteiro positivo n.*

Como $\mathsf{D} * \mathsf{D} = \mathsf{D}$, as soluções da equação $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$ na variável V são precisamente as pseudovariedades da forma $\mathsf{V} * \mathsf{D}$. Para qualquer pseudovariedade V de semigrupos ou de monóides temos $\mathscr{L}\mathsf{V} = (\mathscr{L}\mathsf{V}) * \mathsf{D}$ e $\mathsf{V} * \mathsf{D} \subseteq \mathscr{L}\mathsf{V}$. Sabe-se que $\mathsf{Com} * \mathsf{D} \neq \mathscr{L}\mathsf{Com}$ (cf. Exemplo 7.12). A partir desse facto pode-se concluir facilmente que não existe nenhuma pseudovariedade V tal que $\mathsf{Com} * \mathsf{D} = \mathscr{L}\mathsf{V}$.

1.7.2 Morfismos de sobreposição

Dados um alfabeto finito A e um inteiro positivo k, consideremos o alfabeto A^k cujas letras são as palavras de A^+ com comprimento k. Por uma questão de clareza, vamos representar um elemento $w_1 \cdots w_n$ de $(A^k)^+$ (com $w_i \in A^k$) sob a forma $\langle w_1 \rangle \cdots \langle w_n \rangle$. Para $k \geq 0$ vamos denotar por Φ_k a função

$$\begin{array}{rcl} A^+ & \to & (A^{k+1})^* \\ a_1 \cdots a_n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq k, \\ \langle a_{[1,k+1]} \rangle \langle a_{[2,k+2]} \rangle \cdots \langle a_{[n-k-1,n-1]} \rangle \langle a_{[n-k,n]} \rangle & \text{se } n > k, \end{cases} \end{array}$$

onde $a_i \in A$ e $a_{[i,j]} = a_i a_{i+1} \cdots a_{j-1} a_j$. Em geral Φ_k não é um homomorfismo de semigrupos (embora o seja quando $k = 0$). Podemos dizer que a função Φ_k lê da esquerda para a direita os factores consecutivos sobrepostos de comprimento $k+1$ de uma palavra. Vamos de seguida proceder a uma abstracção desta propriedade no contexto dos semigrupos profinitos relativamente livres.

Seja V uma pseudovariedade que contém $\mathscr{L}\mathsf{I}$. Então $\Omega_A \mathsf{V} = A^+$ e podemos definir em $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$ as funções i_n e t_n. Sejam S um subsemigrupo de $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$, T um semigrupo, e k um inteiro não negativo. Uma função ψ de S em T^1 diz-se um *morfismo de sobreposição de janela* $k+1$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

- $\psi(w) = 1$ se e só se $|w| \leq k$;
- $\psi(uv) = \psi(u) \cdot \psi(\mathrm{t}_k(u)v) = \psi(u\, \mathrm{i}_k(v)) \cdot \psi(v)$, para quaisquer $u, v \in S$.

Em geral ψ não é um homomorfismo de semigrupos (embora o seja quando $k = 0$). Contudo, os morfismos de sobreposição partilham algumas propriedades com os homomorfismos de semigrupos:

Lema 1.56. *Seja* V *uma pseudovariedade que contém* $\mathscr{L}\mathsf{I}$. *Sejam* S *um subsemigrupo de* $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$, T *um semigrupo e* $\psi : S \to T^1$ *um morfismo de sobreposição de janela* $k+1$. *Então:*

1. *Para qualquer* $\mathcal{K} \in \{\mathcal{J}, \mathcal{R}, \mathcal{L}\}$ *e* $u, v \in S$, *se* $u \leq_{\mathcal{K}} v$ *então* $\psi(u) \leq_{\mathcal{K}} \psi(v)$.
2. *Se* w *é um elemento regular de* S *então* $\psi(w)$ *é um elemento regular de* T.
3. *Se* w *é um elemento limitado por idempotentes de* S *então* $\psi(w)$ *é um elemento limitado por idempotentes de* T.

Demonstração. Suponhamos que $u \leq_{\mathcal{J}} v$. Então $u = xvy$ para alguns $x, y \in S^1$. Logo

$$\psi(u) = \psi(xv) \cdot \psi(\mathrm{t}_{2k}(xv)y) = \psi(x\mathrm{i}_{2k}(v)) \cdot \psi(v) \cdot \psi(\mathrm{t}_{2k}(xv)y).$$

Então $\psi(u) \leq_{\mathcal{J}} \psi(v)$. A demonstração para as relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ é similar.

Se w é um elemento regular de S então $w = wxw$ para algum x. Logo

$$\psi(w) = \psi(wxw) = \psi(w) \cdot \psi(\mathrm{t}_{2k}(w)xw) = \psi(w) \cdot \psi(\mathrm{t}_{2k}(w)x\, \mathrm{i}_{2k}(w)) \cdot \psi(w),$$

o que mostra que $\psi(w)$ é regular. Como $w \notin A^+$, temos $\psi(w) \neq 1$, ou seja, $\psi(w) \in T$.

Sejam e e f idempotentes tais que $w = ewf$. Então

$$\begin{aligned} \psi(w) &= \psi(e\, \mathrm{i}_{2k}(e)) \cdot \psi(w) \cdot \psi(\mathrm{t}_{2k}(f)f); \\ \psi(e\, \mathrm{i}_{2k}(e)) &= \psi(e \cdot e\, \mathrm{i}_{2k}(e)) = \psi(e\, \mathrm{i}_{2k}(e)) \cdot \psi(e\, \mathrm{i}_{2k}(e)); \\ \psi(\mathrm{t}_{2k}(f)f) &= \psi(\mathrm{t}_{2k}(f)f \cdot f) = \psi(\mathrm{t}_{2k}(f)f) \cdot \psi(\mathrm{t}_{2k}(f)f). \end{aligned}$$

Logo $\psi(w)$ é limitada pelos idempotentes $\psi(e\, \mathrm{i}_{2k}(e))$ e $\psi(\mathrm{t}_{2k}(f)f)$, que são efectivamente elementos de T porque tanto $e\, \mathrm{i}_{2k}(e)$ como $\mathrm{t}_{2k}(f)f$ têm comprimento infinito. $\square$

A função Φ_k é um morfismo de sobreposição de janela $k+1$. Em [Alm95, Lema 10.6.11] é provado que existe uma única extensão contínua $\overline{\Omega}_A\mathsf{S} \to (\overline{\Omega}_{A^{k+1}}\mathsf{S})^1$ de Φ_k, a qual também é denotada por Φ_k. Por continuidade, esta extensão também é um morfismo de sobreposição de janela $k+1$.

A função Φ_k está estreitamente relacionada com os produtos semidirectos com D_k, como atestam os dois teoremas que se seguem.

Teorema 1.57 ([Str85]; essencialmente com este enunciado em [BP91])**.** *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos tal que $\mathsf{V} \nsubseteq \mathscr{L}\mathsf{I}$. Denotemos por $\mathcal{V}$ e por $\mathcal{W}_k$ as variedades de linguagens que correspondem a V e $\mathsf{V} * \mathsf{D}_k$, respectivamente. Uma linguagem L de A^+ pertence a $\mathcal{W}_k A^+$ se e só se pertence ao fecho Booleano do conjunto de linguagens da forma $\Phi_k^{-1}(K)$, onde $K \in \mathcal{V}(A^{k+1})^+$, e da forma $\{u\}$, pA^*, A^*s, com $u \in A^{<k}$ e $p, s \in A^k$.*

A demonstração da caracterização das linguagens localmente testáveis enunciada no Teorema 1.33 decompõe-se em duas partes. Numa parte aplica-se o Teorema 1.57 para provar que as linguagens localmente testáveis são aquelas cujo semigrupo sintáctico pertence a $\mathsf{SI} * \mathsf{D}$. Na outra parte demonstra-se que $\mathsf{SI} * \mathsf{D} = \mathscr{L}\mathsf{SI}$. É desta segunda parte que surge o algoritmo que decide se uma linguagem é localmente testável ou não, uma vez que se pode decidir se um semigrupo pertence a $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ ou não.

Teorema 1.58 ([Alm95, Teorema 10.6.12])**.** *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos tal que $\mathsf{V} \nsubseteq \mathscr{L}\mathsf{I}$ ou $\mathsf{V} = \mathscr{L}\mathsf{I}$. A pseudoidentidade $u = v$ é satisfeita por $\mathsf{V} * \mathsf{D}_k$ se e só se $\mathrm{i}_k(u) = \mathrm{i}_k(v)$, $\mathrm{t}_k(u) = \mathrm{t}_k(v)$ e V satisfaz a pseudoidentidade $\Phi_k(u) = \Phi_k(v)$.*

Em [Alm95, Teorema 10.6.12] não é considerado o caso $\mathsf{V} = \mathscr{L}\mathsf{I}$ no Teorema 1.58, mas como $\mathscr{L}\mathsf{I} = \mathscr{L}\mathsf{I} * \mathsf{D}$ o resultado é válido nesse caso: com efeito a pseudoidentidade $u = v$ é satisfeita por $\mathscr{L}\mathsf{I}$ se e só se u e v são iguais ou se u e v são pseudopalavras infinitas tais que $\overleftrightarrow{u} = \overleftrightarrow{v}$.

Convém em seguida ter presentes as observações que se fizeram no parágrafo que se segue ao Corolário 1.55 a respeito das pseudovariedades da forma $\mathsf{V} * \mathsf{D}$.

Proposição 1.59. *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos tal que $\mathscr{L}\mathsf{I} \subseteq \mathsf{V}$ e $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. A correspondência*

$$\begin{array}{rccl} \Phi_k^{\mathsf{V}}: & \overline{\Omega}_A\mathsf{V} & \to & (\overline{\Omega}_{A^{k+1}}\mathsf{V})^1 \\ \\ & p_{\mathsf{V}}(u) & \mapsto & p_{\mathsf{V}}(\Phi_k(u)), \quad u \in \overline{\Omega}_A\mathsf{S}, \end{array}$$

está bem definida e é um morfismo contínuo de sobreposição de janela $k+1$.

Demonstração. Suponhamos que $p_{\mathsf{V}}(u) = p_{\mathsf{V}}(v)$. Tal significa que a pseudovariedade V satisfaz a pseudoidentidade $u = v$, pelo Teorema 1.44. Ora

$$\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D} = \mathsf{V} * \mathsf{D} * \mathsf{D}_k = \mathsf{V} * \mathsf{D}_k,$$

logo V satisfaz $\Phi_k(u) = \Phi_k(v)$, pelo Teorema 1.58. Ou seja, $p_{\mathsf{V}}(\Phi_k(u)) = p_{\mathsf{V}}(\Phi_k(v))$. Isto mostra que Φ_k^{V} está bem definida. Uma vez que $\Phi_k^{\mathsf{V}} \circ p_{\mathsf{V}} = p_{\mathsf{V}} \circ \Phi_k$ é uma função contínua, pelo Teorema 1.6 a função Φ_k^{V} é contínua. O facto de que Φ_k^{V} é um morfismo contínuo de sobreposição de janela $k+1$ é imediatamente herdado de Φ_k, uma vez que A^+ é denso em $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$. ☐

Proposição 1.60. *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos tal que $\mathscr{L}\mathsf{I} \subseteq \mathsf{V}$ e $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. Sejam $\pi, \rho \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e $u, v \in A^+$ tais que $u\pi = v\rho$ ou $\pi u = \rho v$. Se $|u| = |v|$ então $\pi = \rho$ e $u = v$.*

Demonstração. Suponhamos que $u\pi = v\rho$ e que $|u| = |v| = k$. Então

$$u = \mathrm{i}_k(u\pi) = \mathrm{i}_k(v\rho) = v.$$

Seja ζ o único homomorfismo contínuo de $\overline{\Omega}_{A^{k+1}}\mathsf{V}$ em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ que estende a função

$$\begin{array}{rcl} A^{k+1} & \to & A \\ w & \mapsto & \mathrm{t}_1(w). \end{array}$$

Seja $x = x_1 \cdots x_n \in A^+$, com $x_i \in A$ e $n \geq k+1$. Então

$$\zeta \circ \Phi_k^{\mathsf{V}}(x) = \zeta\big(\langle x_{[1,k+1]}\rangle\langle x_{[2,k+2]}\rangle \cdots \langle x_{[n-k-1,n-1]}\rangle\langle x_{[n-k,n]}\rangle\big) = x_{[k+1,n]}.$$

Logo $\zeta \circ \Phi_k^{\mathsf{V}}(uw) = w$ para qualquer $w \in A^+$. Como A^+ é denso em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e $\zeta \circ \Phi_k^{\mathsf{V}}$ é contínua, segue que $\zeta \circ \Phi_k^{\mathsf{V}}(uw) = w$ para todo $w \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Portanto,

$$\pi = \zeta \circ \Phi_k^{\mathsf{V}}(u\pi) = \zeta \circ \Phi_k^{\mathsf{V}}(u\rho) = \rho.$$

O caso $\pi u = \rho v$ é análogo. □

Pode-se dizer que é no próximo lema que reside o âmago da atenção que os elementos limitados por idempotentes receberão ao longo de toda esta monografia, na medida em que nos assegura que cortando prefixos ou sufixos finitos de uma pseudopalavra limitada por idempotentes, o factor remanescente permanece na mesma $\mathcal{J}$-classe. Conclui-se então, tendo em conta o Lema 1.27, que esta é mesmo uma propriedade que caracteriza as pseudopalavras limitadas por idempotentes.

Lema 1.61. *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos tal que* $\mathscr{L}\mathsf{I} \subseteq \mathsf{V}$ *e* $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Seja* π *um elemento de* $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *limitado por idempotentes. Seja* ρ *um elemento de* $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *tal que* $\pi = x\rho y$ *para algumas palavras* x, y *de* A^*. *Então* π *e* ρ *são* $\mathcal{J}$*-equivalentes.*

Demonstração. Queremos mostrar que π é um factor de ρ. Sejam e e f idempotentes de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tais que $\pi = e\pi f$. Como $e\pi f = x\rho y$, temos $\mathrm{i}_{|x|}(e) = x$ e $\mathrm{t}_{|y|}(f) = y$. Logo existem elementos e_0 e f_0 de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tais que $e = xe_0$ e $f = f_0 y$, donde $xe_0\pi f_0 y = x\rho y$. Logo $e_0\pi f_0 = \rho$, pela Proposição 1.60. □

O próximo lema é uma espécie de recíproco do Lema 1.61: acrescentado certos prefixos ou sufixos não saímos da $\mathcal{J}$-classe.

Lema 1.62. *Seja* S *um semigrupo. Seja* π *um elemento de* S *tal que* $\pi = e\pi f$ *para alguns idempotentes* e *e* f *de* S. *Se* s *é um sufixo de* e *e* p *é um prefixo de* f *então* π *e* $s\pi p$ *são* $\mathcal{J}$*-equivalentes.*

Demonstração. Queremos mostrar que $s\pi p$ é um factor de π. Sejam e_0 e f_0 tais que $e = e_0 s$ e $f = pf_0$. Então $\pi = e_0(s\pi p)f_0$. □

Capítulo 2

Sistemas dinâmicos simbólicos

2.1 Conceitos básicos

Seja A um alfabeto finito. A *translação* de sequências de letras de A indexadas por elementos de $\mathbb{Z}$ é a função de $A^{\mathbb{Z}}$ em $A^{\mathbb{Z}}$ que envia $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ em $(x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$. Esta função é denotada por σ_A, ou simplesmente σ. A função σ_A é um homeomorfismo. A relação entre elementos de $A^{\mathbb{Z}}$ definida por

$$x \sim_\sigma y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x = \sigma^n(y).$$

é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de x relativamente a $\sim_\sigma$ denomina-se *órbita de* x, e é denotada por $\mathcal{O}(x)$.

Um *sistema dinâmico simbólico* (ou mais abreviadamente, um *sistema simbólico*) de $A^{\mathbb{Z}}$ é um subespaço fechado não vazio $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ tal que $\sigma(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ e $\sigma^{-1}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ (ou dito de outro modo, tal que $\mathcal{X}$ contém as órbitas dos seus elementos). O sistema é "dinâmico" porque é descrito pela dinâmica da translação, e as letras de A são os símbolos que justificam o uso da designação de sistema "simbólico".

Um sistema simbólico da forma $A^{\mathbb{Z}}$ é referido como sendo um *sistema simbólico pleno*.

De agora em diante todos os alfabetos são considerados como sendo finitos, a menos que algo seja dito em sentido contrário.

2.1.1 Sistemas simbólicos vistos como linguagens

Um subconjunto K de um semigrupo T diz-se *factorial* se K contém os factores dos seus elementos. Uma linguagem L de A^+ diz-se *prolongável* se para qualquer $u \in L$ existem $a, b \in A$ tais que $au, ub \in L$.

A linguagem de um elemento x de $A^{\mathbb{Z}}$ é o conjunto $L(x) = \{x_{[k,k+n]} : k \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$. A linguagem de um subconjunto Y de $A^{\mathbb{Z}}$ é o conjunto $L(Y) = \bigcup_{x\in Y} L(x)$. Observemos que $L(Y) = L(\overline{Y})$. Os elementos de $L(x)$ e de $L(Y)$ são os *factores* ou *blocos* de x e de Y, respectivamente. Se n é um inteiro positivo então $L(Y) \cap A^n$ é denotado por $L_n(Y)$. O conjunto $L_1(Y)$ é referido como sendo o *alfabeto* de Y.

Proposição 2.1 ([LM96, Teorema 6.1.21])**.** *Um subconjunto $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ é um sistema simbólico se e só se existe um subconjunto W de A^+ tal que $L(\mathcal{X}) = A^+ \setminus A^*WA^*$.*

A definição de sistema simbólico que introduzimos é a que se encontra em [Béa93]. A Proposição 2.1 fornece uma definição alternativa, que é aquela que é introduzida em [LM96].

Uma outra caracterização dos sistema simbólico, que será de importância capital para esta trabalho, consiste em encará-los de acordo com a seguinte proposição como linguagens factoriais prolongáveis.

Proposição 2.2 ([LM96, Proposição 1.3.4]). *Fixemos um alfabeto A. A correspondência $\mathcal{X} \to L(\mathcal{X})$ entre o conjunto dos sistemas simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ e o conjunto das linguagens factoriais prolongáveis não vazias de A^+ é uma bijecção.*

A Proposição 2.2 leva-nos a adoptar a seguinte convenção: dado um operador $\mathbf{O}$ definido na classe das linguagens, usaremos a notação $\mathbf{O}(\mathcal{X})$ no lugar de $\mathbf{O}(L(\mathcal{X}))$. Assim, por exemplo, o semigrupo sintáctico de $L(\mathcal{X})$ será denotado por $S(\mathcal{X})$, no lugar de $S(L(\mathcal{X}))$, e será referido como sendo o semigrupo sintáctico de $\mathcal{X}$; e o homomorfismo $\delta_{L(\mathcal{X})}$ será denotado mais simplesmente por $\delta_{\mathcal{X}}$.

Apresentamos de seguida um critério para a pertença de uma sequência a um sistema simbólico.

Proposição 2.3 ([LM96, Corolário 1.3.5]). *Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ então $\mathcal{X} = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : L(x) \subseteq L(\mathcal{X})\}$.*

Corolário 2.4. *Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são sistemas simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ então $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ se e só se $L(\mathcal{X}) \subseteq L(\mathcal{Y})$.*

A Proposição 2.1 serve de motivação para definir um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ como sendo de *tipo finito* se existir um subconjunto finito W de A^+ tal que $L(\mathcal{X}) = A^+ \setminus A^*WA^*$. Um sistema simbólico diz-se *sófico* se $L(\mathcal{X})$ for racional. Os sistemas simbólicos de tipo finito são portanto sóficos. A próxima proposição fornece uma outra caracterização dos sistemas simbólicos de tipo finito (veja-se [LM96, Teorema 2.1.8] para uma demonstração).

Proposição 2.5 (Teorema 2.1.8). *Um sistema simbólico $\mathcal{X}$ é de tipo finito se e só se existe um inteiro positivo n tal que se $uv, vw \in L(\mathcal{X})$ e $|v| \geq n$ então $uvw \in L(\mathcal{X})$.*

Uma linguagem L de A^+ diz-se *irredutível* se para todo $u, v \in L$ existe $w \in A^*$ tal que $uwv \in L$, e diz-se *misturada* se para quaisquer $u, v \in L$ existe um inteiro N tal que se $n \geq N$ então existe $w \in A^n$ para o qual $uwv \in L$. Um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ diz-se *irredutível* (respectivamente *misturado*) se $L(\mathcal{X})$ for uma linguagem irredutível (respectivamente *misturada*).

Um sistema simbólico $\mathcal{X}$ diz-se *minimal* se $\mathcal{X}$ for o único sistema simbólico contido em $\mathcal{X}$. Dado um sistema simbólico $\mathcal{Z}$, a intersecção de uma cadeia de sistemas simbólicos contidos em $\mathcal{Z}$ ainda é um sistema simbólico contido em $\mathcal{Z}$. Então pelo Lema de Zorn qualquer sistema simbólico contém algum sistema simbólico minimal.

Vamos de seguida expor a caracterização dos sistemas simbólicos minimais por meio das suas linguagens. Uma palavra u diz-se *uniformemente recorrente* em L se existir um inteiro N tal que u é factor de qualquer palavra v de comprimento maior do que N pertencente a L. Uma linguagem L diz-se *uniformemente recorrente* se todos os seus elementos forem uniformemente recorrentes em L.

Proposição 2.6 ([HM38, Teorema 7.2][1]). *Um sistema simbólico $\mathcal{X}$ é minimal se e só se $L(\mathcal{X})$ é uniformemente recorrente.*

Em particular, um sistema simbólico minimal é irredutível.

[1] Em [HM38, Teorema 7.2] é utilizada a expressão "recorrente" no lugar de "uniformemente recorrente "; mais tarde estas expressões adquiriram significados distintos (ver comentários em [LM96, Secção 13.7]).

2.1.2 Codificações

Uma *codificação* de um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ num sistema simbólico $\mathcal{Y}$ de $B^{\mathbb{Z}}$ é uma função contínua $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tal que $G \circ \sigma_A = \sigma_B \circ G$. Os conjuntos $G(\mathcal{X})$ e $G^{-1}(\mathcal{Y})$ são sistemas simbólicos. A codificação G diz-se uma *conjugação* se for um homeomorfismo; um *automorfismo* de $\mathcal{X}$ é uma conjugação de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$. A identidade em $\mathcal{X}$ e a restrição de σ_A a $\mathcal{X}$ são automorfismos de $\mathcal{X}$. A composta de codificações ainda é uma codificação.

É claro que a inversa de uma conjugação ainda é uma conjugação. Dois sistemas simbólicos dizem-se *conjugados* se existir alguma conjugação entre eles. As conjugações entre sistemas simbólicos são precisamente aquelas funções que preservam as suas propriedades dinâmico-topológicas, pelo que a classificação dos sistemas simbólicos consiste em descrever as suas classes de conjugação.

A classe dos sistemas simbólicos de tipo finito é fechada para a conjugação [LM96, Proposição 2.1.10]. A imagem de um sistema simbólico irredutível (respectivamente misturado) por uma codificação é um sistema simbólico irredutível (respectivamente misturado).

Vamos agora apresentar uma caracterização muito útil das codificações entre sistemas simbólicos. Sejam A e B dois alfabetos, e sejam n, m dois inteiros tais que $m + n \geq 0$. Consideremos uma função $g : A^{m+n+1} \to B$. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sistemas simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ e de $B^{\mathbb{Z}}$, respectivamente. Uma função $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é uma *codificação por janela deslizante* com *função de blocos* g, *memória* m e *antecipação* n se $G(x)_i = g(x_{[i-m,i+n]})$ para quaisquer $x \in \mathcal{X}$ e $i \in \mathbb{Z}$. Nesse caso podemos denotar G por $g^{[-m,n]} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, ou simplesmente $g^{[-m,n]}$, quando não houver necessidade que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sejam explicitados. Reparemos que para a descrição de G só é relevante o valor que g assume nos elementos de $L_{m+n+1}(\mathcal{X})$. O número $m + n + 1$ é designado por *janela* de G. A figura 2.1 ilustra a acção de uma codificação por janela deslizante numa sequência x, transformando-a numa sequência y.

$$\begin{array}{c} \ldots x_{i-3} \boxed{x_{i-2}x_{i-1}x_i x_{i+1}} x_{i+2}x_{i+3} \ldots \\ g \big\downarrow \\ \ldots y_{i-1} \boxed{y_i} y_{i+1}y_{i+2} \ldots \end{array}$$

Figura 2.1: Codificação com função de blocos g, memória 2 e antecipação 1.

Teorema 2.7 ([Hed69]). *As codificações entre sistemas simbólicos são precisamente as codificações por janela deslizante.*

Diremos que uma codificação entre dois sistemas simbólicos é *unitária* se for uma codificação por janela deslizante com memória e antecipação zero.

Vamos agora observar como os morfismos de sobreposição Φ_k nos permitem "recodificar" o domínio de uma codificação de modo a transformarmo-la numa codificação unitária. Consideremos uma codificação $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, onde $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são sistemas simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ e de $B^{\mathbb{Z}}$, respectivamente. Suponhamos que G tem uma função de blocos g com memória m e antecipação n. Denotemos por $\mathcal{X}^{[-m,n]}$ o sistema simbólico de $(A^{m+n+1})^{\mathbb{Z}}$ que é a imagem de $\mathcal{X}$ pela codificação $\Phi_{m+n}^{[-m,n]} : A^{\mathbb{Z}} \to (A^{m+n+1})^{\mathbb{Z}}$. Note-se que $\Phi_{m+n}^{[-m,n]}$ é injectiva. Como

$$G(x) = \big(g(x_{[i-m,i+n]})\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \Big(g\big(\Phi_{m+n}^{[-m,n]}(x_{[i-m,i+n]})\big)\Big)_{i\in\mathbb{Z}},$$

a função

$$\begin{array}{rrcl} G' : & \mathcal{X}^{[-m,n]} & \to & \mathcal{Y} \\ & \Phi_{m+n}^{[-m,n]}(x) & \mapsto & G(x), \quad x \in \mathcal{X}. \end{array} \tag{2.1}$$

é uma codificação unitária tendo g como função de blocos.

Proposição 2.8. *Para qualquer codificação $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ entre dois sistemas simbólicos existem codificações unitárias G_1 e G_2 tais que G_1 é uma conjugação e $G = G_2 \circ G_1^{-1}$.*

Demonstração. Seja g uma função de blocos de G, com memória m e antecipação n. Consideremos a conjugação canónica $G_0 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{[-m,n]}$ (ou seja, $G_0(x) = \Phi_{m+n}^{[-m,n]}(x)$, para qualquer $x \in \mathcal{X}$). Consideremos a codificação unitária G' definida em 2.1. Então $G = G' \circ G_0$. A inversa de G_0 é uma codificação unitária; com efeito, a função

$$\langle x_{-m} x_{-(m-1)} \dots x_{n-1} x_n \rangle \mapsto x_0, \quad \text{onde } x_i \text{ é uma letra do alfabeto de } \mathcal{X},$$

é uma função de blocos de G_0^{-1} com memória e antecipação zero. $\square$

2.1.3 Conjugação ulterior

Seja $\gamma_n : A^{\mathbb{Z}} \to (A^n)^{\mathbb{Z}}$ a função definida por $\gamma_n(x)_i = x_{[in,in+n-1]}$. A função γ_n é um homeomorfismo e satisfaz $\gamma_n \circ \sigma_A^n = \sigma_{A^n} \circ \gamma_n$. Em geral γ_n não é uma conjugação. Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ então $\gamma_n(\mathcal{X})$ é um sistema simbólico de $(A^n)^{\mathbb{Z}}$ [LM96, Proposição 1.4.6], o qual é denotado por $\mathcal{X}^n$ e designado como sendo a *n-ésima potência de $\mathcal{X}$*. Dois sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dizem-se *ulteriormente conjugados* se existir um inteiro positivo k tal que para todo $n \geq k$ os sistemas simbólicos $\mathcal{X}^n$ e $\mathcal{Y}^n$ são conjugados. Dois sistemas simbólicos conjugados são obviamente ulteriormente conjugados, mas o recíproco não é verdadeiro: Kim e Roush encontraram exemplos de sistemas simbólicos de tipo finito ulteriormente conjugados mas não conjugados [KR92, KR99]. As classes de sistemas simbólicos habitualmente estudadas (sistemas simbólicos sóficos, de tipo finito, irredutíveis, ou misturados, por exemplo) são fechadas para a conjugação ulterior.

2.1.4 Conjugação de codificações

Um morfismo entre duas codificações $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $H : \mathcal{Z} \to \mathcal{T}$ é um par (φ, ψ) de codificações $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ e $\psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{T}$ tais que $g \circ G = \psi \circ f$, ou seja, tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{Z} \arrow[d, "H"] \\ \mathcal{Y} \arrow[r, "\psi"'] & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

Se além do mais φ e ψ forem conjugações então dizemos que (φ, ψ) é um *conjugação* de codificações. Duas codificações dizem-se *conjugadas* se existir um conjugação entre elas. As codificações $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $H : \mathcal{Z} \to \mathcal{T}$ dizem-se *ulteriormente conjugadas* se existir um inteiro positivo N tal que para todo $n \geq N$ as codificações $\gamma_n \circ G \circ \gamma_n^{-1} : \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}^n$ e $\gamma_n \circ H \circ \gamma_n^{-1} : \mathcal{Z}^n \to \mathcal{T}^n$ são conjugadas. Reparemos que se duas codificações são (ulteriormente) conjugadas então os seus domínios são (ulteriormente) conjugados, bem como as suas imagens.

2.2 Sistemas simbólicos sóficos

Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico de tipo finito. Então existe um subconjunto finito W de A^+ tal que $L(\mathcal{X}) = A^+ \setminus A^*WA^*$. Existe um inteiro positivo n tal que todos os elementos de W têm comprimento menor ou igual a n. Pela Proposição 2.3 temos $\mathcal{X} = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : L_n(x) \subseteq L(\mathcal{X})\}$. Dizemos então que $\mathcal{X}$ é de tipo finito *com passo* $n-1$.

Seja G um grafo. Um *caminho bi-infinito* de G é uma sequência $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que e_i e e_{i+1} são arestas consecutivas, para qualquer $i \in \mathbb{Z}$. O conjunto dos caminhos bi-infinitos de G é denotado por X_{G}[2]. Um grafo essencial não vazio H possui caminhos bi-infinitos. O conjunto X_{H} dos seus caminhos bi-infinitos é um sistema simbólico de tipo finito com passo 1 de $E_{\mathrm{H}}^{\mathbb{Z}}$. Com efeito, se W for o conjunto $\{ef \in E_{\mathrm{H}}^+ : e, f \in E_{\mathrm{H}} \text{ e } \omega(e) \neq \alpha(f)\}$ então $L(X_{\mathrm{G}})$ é a linguagem factorial prolongável $E_{\mathrm{H}}^+ \setminus E_{\mathrm{H}}^* W E_{\mathrm{H}}^*$. Grafos essenciais isomorfos definem sistemas simbólicos isomorfos. O sistema simbólico X_{G} é o *sistema simbólico das arestas do grafo* G.

A *parte essencial* de um grafo G é o maior subgrafo H de G que contém os vértices que estão na imagem de ambas as funções de incidência; observemos que $X_{\mathrm{G}} = X_{\mathrm{H}}$.

Suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$. O *grafo de De Bruijn de ordem* n *de* $\mathcal{X}$ é o grafo $\Sigma_n(\mathcal{X}) = (L_n(\mathcal{X}), L_{n+1}(\mathcal{X}), \alpha, \omega)$ tal que

$$\alpha(a_1a_2\dots a_na_{n+1}) = a_1a_2\dots a_n \quad \text{e} \quad \omega(a_1a_2\dots a_na_{n+1}) = a_2\dots a_na_{n+1}.$$

O grafo $\Sigma_n(\mathcal{X})$ é essencial.

Proposição 2.9 (cf. [LM96, Teorema 2.3.2])**.** *Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de tipo finito com passo n então $\mathcal{X}^{[0,n]} = X_{\Sigma_n(\mathcal{X})}$.*

Demonstração. Como $\mathcal{X}$ tem passo n, temos $\mathcal{X} = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : L_{n+1}(x) \subseteq L(\mathcal{X})\}$. Por outro lado, pela definição de $X_{\Sigma_n(\mathcal{X})}$ temos $X_{\Sigma_n(\mathcal{X})} = \Phi_n^{[0,n]}\big(\{x \in A^{\mathbb{Z}} : L_{n+1}(x) \subseteq L(\mathcal{X})\}\big)$. □

Seja (G, λ) um grafo etiquetado sobre o alfabeto A. Vamos denotar por λ_* a função de X_{G} em $A^{\mathbb{Z}}$ que envia uma sequência $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ em $(\lambda(e_i))_{i\in\mathbb{Z}}$. A função λ_* é uma codificação unitária (tendo λ como função de blocos).

A próxima proposição sintetiza alguns resultados elementares sobre sistemas simbólicos sóficos, que encontrámos por exemplo dispersos pelas duas primeiras secções do terceiro capítulo de [LM96]. A sua demonstração é incluída aqui por entendermos ser útil ao bom entendimento do conteúdo desta monografia.

Proposição 2.10. *Seja $\mathcal{Y}$ um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$. As condições seguintes são equivalentes:*

1. *o sistema simbólico $\mathcal{Y}$ é sófico;*
2. *a linguagem $L(\mathcal{Y})$ é reconhecida por um grafo etiquetado essencial;*
3. *o sistema simbólico $\mathcal{Y}$ é a imagem de uma codificação com domínio num sistema simbólico de tipo finito;*
4. *o sistema simbólico $\mathcal{Y}$ é a imagem de uma codificação unitária com domínio num sistema simbólico de tipo finito.*

Demonstração. (1)⇒(2): Como $\mathcal{Y}$ é sófico, a linguagem $L(\mathcal{Y})$ é reconhecida por algum autómato $\mathfrak{A} = (V, A, \tau, I, F)$. Como $L(\mathcal{Y})$ é factorial, então também é reconhecida por

[2] Poder-se-ia esperar que fosse escolhida a notação $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ no lugar de X_{G}, mas decidimos seguir a convenção adoptada em [LM96] e explicada no parágrafo anterior ao Exemplo 1.2.2 desse livro.

$\mathfrak{B} = (V, A, \tau, V, V)$, o autómato que se obtém de $\mathfrak{A}$ passando a considerar todos os estados como finais e iniciais. Como $L(\mathcal{Y})$ é prolongável, também é reconhecido pela parte essencial de $\mathfrak{B}$, a qual encaramos como um grafo etiquetado essencial.

(2)⇒(3): Se $L(\mathcal{Y})$ é reconhecida pelo grafo etiquetado essencial (G, λ) então $L(\lambda_*(X_\mathrm{G})) = L(\mathcal{Y})$, donde $\lambda_*(X_\mathrm{G}) = \mathcal{Y}$ pela Proposição 2.2.

(3)⇒(4): Seja $\Psi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma codificação sobrejectiva tal que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de tipo finito de $B^\mathbb{Z}$. Pela Proposição 2.8, existe um sistema simbólico $\mathcal{Z}$ conjugado de $\mathcal{X}$ e uma codificação unitária sobrejectiva $\Psi' : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$. O sistema simbólico $\mathcal{Z}$ é de tipo finito, uma vez que a classe dos sistemas simbólicos de tipo finito é fechada para a conjugação.

(4)⇒(1): Suponhamos que $\Lambda : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é uma codificação unitária sobrejectiva com função de blocos λ e tal que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de tipo finito com passo n. Pela Proposição 2.9, o grafo de De Bruijn de ordem n etiquetado pela função

$$x_1 \cdots x_n x_{n+1} \mapsto \lambda(x_1), \quad \text{onde } x_i \text{ é uma letra do alfabeto de } \mathcal{X},$$

reconhece $L(\mathcal{Y})$, e é essencial. □

Uma *apresentação* de um sistema simbólico sófico $\mathcal{Y}$ é um grafo etiquetado (G, λ) essencial que reconhece $L(\mathcal{Y})$; dizemos então que (G, λ) *apresenta* $\mathcal{Y}$ e que a codificação $\lambda_* : X_\mathrm{G} \to \mathcal{Y}$ é uma *cobertura* de $\mathcal{Y}$.

2.2.1 As apresentações de Krieger e de Fischer

Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico sófico de $A^\mathbb{Z}$. Seja R o autómato minimal à direita de $L(\mathcal{X})$, conforme foi definido na Secção 1.3. Recordemos que se $u \in A^*$ então

$$R(u) = \{w \in A^* \mid uw \in L(\mathcal{X})\}.$$

Se $x \in A^{\mathbb{Z}^-}$ então

$$\cdots \subseteq R(x_{[-n-1,-1]}) \subseteq R(x_{[-n,-1]}) \subseteq \cdots \subseteq R(x_{-2}x_{-1}) \subseteq R(x_{-1}). \tag{2.2}$$

Como $\mathcal{X}$ é sófico, o autómato R é finito, pelo que a cadeia (2.2) estabiliza. Para cada $x \in A^{\mathbb{Z}^-}$ seja N_x um inteiro positivo tal que

$$n \geq N_x \Rightarrow R(x_{[-n,-1]}) = R(x_{[-N_x,-1]}).$$

Denotemos por $s(x)$ o estado $R(x_{[-N_x,-1]})$. Como $R(u) \subseteq R(v)$ implica $R(ua) \subseteq R(va)$, concluímos que $s(x) \cdot a = s(xa)$. Um K-*estado* de R é um estado da forma $s(x)$ para algum $x \in A^{\mathbb{Z}^-}$. Não sabemos se a proposição seguinte (de fácil demonstração) foi alguma vez mencionada na literatura.

Proposição 2.11. *Os K-estados de R são os estados descendentes em R dos elementos do conjunto*

$$I = \{R(1) \cdot \delta_\mathcal{X}(u) \mid u \in A^+ \text{ e } \delta_\mathcal{X}(u) \text{ é idempotente}\}.$$

Demonstração. Seja $u \in A^+$ tal que $\delta_\mathcal{X}(u)$ é idempotente. Então

$$R(1) \cdot \delta_\mathcal{X}(u) = R(1) \cdot \delta_\mathcal{X}(u)^n = R(u^n)$$

para qualquer inteiro positivo n. Portanto $s(u^{-\infty}) = R(1) \cdot \delta_\mathcal{X}(u)$. Logo os elementos de I são K-estados. Como $s(x) \cdot a = s(xa)$, os descendentes de K-estados também são K-estados.

Reciprocamente, seja $x \in A^{\mathbb{Z}^-}$. Como $S(\mathcal{X})$ é finito, existem inteiros positivos n e m tais que $m > n > N_x$ e $\delta_{\mathcal{X}}(x_{[-n,-1]}) = \delta_{\mathcal{X}}(x_{[-m,-1]})$. Como $n > N_x$, temos

$$s(x) = R(1) \cdot \delta_{\mathcal{X}}(x_{[-n,-1]}) \tag{2.3}$$

Seja $t = \delta_{\mathcal{X}}(x_{[-m,-(n+1)]})$. Então $\delta_{\mathcal{X}}(x_{[-n,-1]}) = t \cdot \delta_{\mathcal{X}}(x_{[-n,-1]})$, pelo que $\delta_{\mathcal{X}}(x_{[-n,-1]}) = t^\omega \cdot \delta_{\mathcal{X}}(x_{[-n,-1]})$. Logo, por (2.3), temos

$$s(x) = (R(1) \cdot t^\omega) \cdot \delta_{\mathcal{X}}(x_{[-n,-1]})$$

Ora $R(1) \cdot t^\omega \in I$, pelo que $s(x)$ é descendente de um estado de I. $\square$

O *futuro em* $\mathcal{X}$ de uma sequência x de $A^{\mathbb{Z}^-}$ é o conjunto

$$\mathfrak{f}(x) = \{y \in A^{\mathbb{Z}_0^+} : x.y \in \mathcal{X}\}.$$

Consideremos o grafo etiquetado resolvente e completo $\mathfrak{Fut}(\mathcal{X})$ definido do seguinte modo:

- o conjunto de estados de $\mathfrak{Fut}(\mathcal{X})$ é o conjunto $\{\mathfrak{f}(x) \,|\, x \in A^{\mathbb{Z}^-}\}$;
- $\mathfrak{f}(x) \cdot a = \mathfrak{f}(xa)$, para quaisquer $x \in A^{\mathbb{Z}^-}$, $a \in A$.

Lema 2.12. *Sejam* $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$. *A seguinte condição é verdadeira:*

$$\mathfrak{f}(x) \subseteq \mathfrak{f}(y) \Leftrightarrow s(x) \subseteq s(y).$$

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{f}(x) \subseteq \mathfrak{f}(y)$. Seja $u \in s(x)$. Então para todo o inteiro m maior do que N_x temos $u \in R(x_{[-m,-1]})$. Logo existem $p^{(m)} \in A^{\mathbb{Z}^-}$ e $q^{(m)} \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$ tais que $z^{(m)} = p^{(m)}x_{[-m,-1]}.uq^{(m)} \in \mathcal{X}$. A sucessão $(z^{(m)})_m$ tem alguma subsucessão convergente para um elemento z de $\mathcal{X}$. Ora, necessariamente $z = x.uq$ para algum $q \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$. Como $\mathfrak{f}(x) \subseteq \mathfrak{f}(y)$, temos $y.uq \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$. Em particular, $y_{[-N_y,-1]}u \in L(\mathcal{X})$, ou seja, $u \in s(y)$. Logo $s(x) \subseteq s(y)$.

Reciprocamente, suponhamos que $s(x) \subseteq s(y)$. Seja $z \in \mathfrak{f}(x)$. Então, para todo o inteiro positivo m temos $x_{[-N_x,-1]}z_{[0,m]} \in L(\mathcal{X})$, ou seja, $z_{[0,m]} \in s(x)$. Por hipótese e pela definição de N_y, temos $y_{[-n,-1]}z_{[0,m]} \in L(\mathcal{X})$ para todo o inteiro positivo n maior do que N_y. Como m é um inteiro positivo arbitrário, concluímos que $y.z \in \mathcal{X}$, pelo que $z \in \mathfrak{f}(y)$. $\square$

Consequentemente, a seguinte correspondência

$$\begin{array}{rrcl} \psi: & V_{\mathfrak{Fut}(\mathcal{X})} & \to & V_R \\ & \mathfrak{f}(x) & \mapsto & s(x),\ x \in A^{\mathbb{Z}^-}. \end{array}$$

é uma função e é injectiva. Sejam $x \in A^{\mathbb{Z}^-}$ e $a \in A$. Seja $N \geq \max\{N_{xa}, N_x + 1\}$. Então

$$\psi(\mathfrak{f}(x) \cdot a) = \psi(\mathfrak{f}(xa)) = R((xa)_{[-N,-1]}) = R(x_{[-(N-1),-1]}) \cdot a = \psi(\mathfrak{f}(x)) \cdot a.$$

Logo ψ define um homomorfismo de grafos etiquetados. Os K-estados são precisamente os elementos de $\psi(V_{\mathfrak{Fut}(\mathcal{X})})$. Seja $\mathfrak{fut}(\mathcal{X})$ o grafo etiquetado que se obtém de $\mathfrak{Fut}(\mathcal{X})$ pela eliminação do estado $\emptyset$. Seja $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$ o grafo etiquetado que se obtém de R pela eliminação do estado $\emptyset$ e de todos os estados que não são K-estados. Como $\psi(\emptyset) = \emptyset$ e ψ é um homomorfismo injectivo de grafos etiquetados, concluímos que $\mathfrak{fut}(\mathcal{X})$ e $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$ são grafos etiquetados isomorfos. O grafo etiquetado $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$ é a *apresentação direita de Krieger* de $\mathcal{X}$.

Em [Jon96c, Secção 9] é afirmado que a cobertura direita de Krieger de um sistema sófico $\mathcal{X}$ é o subgrafo etiquetado essencial maximal do autómato minimal de $L(\mathcal{X})$. Esta afirmação é falsa, e isso é atestado no exemplo no final da Secção 5 de [Nas86].

Se $\mathcal{X}$ for um sistema simbólico sófico irredutível de $A^{\mathbb{Z}}$, então a apresentação direita de Krieger de $\mathcal{X}$ possui uma única componente fortemente conexa terminal, a qual é uma apresentação de $\mathcal{X}$, designada como a *apresentação direita de Fischer* de $\mathcal{X}$ [Bea85, Fis75]. É claro que, reciprocamente, um sistema simbólico apresentado por um grafo fortemente conexo é irredutível. A apresentação direita de Fischer de $\mathcal{X}$ é o único grafo etiquetado resolvente, fortemente conexo e reduzido que apresenta $\mathcal{X}$ [Fis75]. As apresentações esquerdas de Krieger e de Fischer de $\mathcal{X}$ definem-se dualmente. Elas são respectivamente o reverso das apresentações direitas de Krieger e de Fischer daquilo que a chamamos *reverso* de $\mathcal{X}$, e que é o sistema simbólico $\mathcal{X}^T = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid (x_{-i})_{i\in\mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}\}$. Reparemos que $(X_{\mathrm{G}})^T = X_{\mathrm{G}^T}$, onde G é um grafo etiquetado. Em geral, os duais dos resultados sobre as apresentações direitas não serão explicitados.

2.2.2 Semigrupo sintáctico

Proposição 2.13. *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico sófico. Seja τ o homomorfismo de transição de $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$. Então a função*

$$\begin{array}{rrcl} \Theta: & S(\mathcal{X}) & \to & \tau(A^+) \\ & \delta_{\mathcal{X}}(u) & \mapsto & \tau(u),\ u \in A^+ \end{array}$$

está bem definida e é um isomorfismo de semigrupos.

Demonstração. Como $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$ é um subgrafo etiquetado de $R(\mathcal{X})$, é claro que $\delta_{\mathcal{X}}(u) = \delta_{\mathcal{X}}(v)$ implica $\tau(u) = \tau(v)$. Logo Θ é uma função bem definida, e é claro que é um homomorfismo sobrejectivo. Resta-nos mostrar que é injectivo. Suponhamos que $\tau(u) = \tau(v)$. Seja $w \in A^*$. Então

$$\begin{aligned} x \in R(wu) &\Leftrightarrow wux \in L(\mathcal{X}) \\ &\Leftrightarrow [\exists p \in A^{\mathbb{Z}^-}\ \exists q \in A^{\mathbb{Z}_0^+} : pwu.xq \in \mathcal{X}] \\ &\Leftrightarrow [\exists p \in A^{\mathbb{Z}^-}\ \exists q \in A^{\mathbb{Z}_0^+} : xq \in f(pwu) \in \mathcal{X}] \\ &\Leftrightarrow [\exists p \in A^{\mathbb{Z}^-}\ \exists q \in A^{\mathbb{Z}_0^+} : xq \in f(pwv) \in \mathcal{X}] \\ &\Leftrightarrow [\exists p \in A^{\mathbb{Z}^-}\ \exists q \in A^{\mathbb{Z}_0^+} : pwv.xq \in \mathcal{X}] \\ &\Leftrightarrow wvx \in L(\mathcal{X}) \\ &\Leftrightarrow x \in R(wv). \end{aligned}$$

Logo $R(w) \cdot u = R(w) \cdot v$. Como w é arbitrário, concluímos que $\delta_{\mathcal{X}}(u) = \delta_{\mathcal{X}}(v)$. $\square$

Proposição 2.14. *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico sófico irredutível de $A^{\mathbb{Z}}$. Seja ζ o homomorfismo de transição de $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$. Então a função*

$$\begin{array}{rrcl} \Psi: & S_{A^+}(\mathcal{X}) & \to & \zeta(A^+) \\ & \delta_{\mathcal{X}}(u) & \mapsto & \zeta(u),\ u \in A^+ \end{array}$$

está bem definida e é um isomorfismo de semigrupos.

Demonstração. Temos que mostrar que Ψ é uma função injectiva. Suponhamos que $\zeta(u) = \zeta(v)$. Seja $w \in A^*$. Seja $x \in R(wu)$. Consideremos um elemento f de $L(\mathcal{X})$ tal que $R(f)$ é um estado de $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$. Como $\mathcal{X}$ é irredutível, existe $u_0 \in L(\mathcal{X})$ tal que $fu_0wux \in L(\mathcal{X})$. Logo $x \in R(fu_0wu) = R(f) \cdot u_0wu$. Ora $\zeta(u) = \zeta(v)$ implica $\zeta(u_0wu) = \zeta(u_0wv)$, pelo que $R(f) \cdot u_0wu = R(f) \cdot u_0wv = R(fu_0wv)$. Logo $fu_0wvx \in L(\mathcal{X})$. Como $L(\mathcal{X})$ é factorial, temos então $wvx \in L(\mathcal{X})$, ou seja $x \in R(wv)$. Portanto $R(w) \cdot u \subseteq R(w) \cdot v$. Por simetria, concluímos que $R(w) \cdot u = R(w) \cdot v$. Logo $\delta_{\mathcal{X}}(u) = \delta_{\mathcal{X}}(v)$. □

Viremos a nossa atenção para as propriedades algébricas do semigrupo sintáctico de um sistema simbólico sófico. Vamos começar com uma propriedade que vai mais além desse caso.

Proposição 2.15. *Consideremos um semigrupo T. Se K é um subconjunto factorial de T então $S_T(K)$ é um semigrupo com zero. Se $K \neq T$ e $w \in T$ então $\delta_{K,T}(w) = 0$ se e só se $w \notin K$.*

Demonstração. É claro que se $C_{K,T}(u) = \emptyset$ então $u = 1 \cdot u \cdot 1 \notin K$. Reciprocamente, suponhamos que $u \in T \setminus K$. Como K é factorial, para qualquer $(x, y) \in T^1 \times T^1$ temos $xuy \notin K$, pelo que $(x, y) \notin C_{K,T}(u)$. Logo, para qualquer $u \in T$ temos

$$u \notin K \Leftrightarrow C_{K,T}(u) = \emptyset.$$

Se $K = T$ então $S_T(K)$ é o semigrupo trivial, e portanto é um semigrupo com zero. Vamos portanto supor que $K \neq T$. Então podemos considerar um elemento u de $T \setminus K$. Novamente por K ser factorial, para qualquer $v \in T$ temos $vu, uv \notin K$, pelo que $C_{K,T}(uv) = C_{K,T}(vu) = C_{K,T}(u) = \emptyset$. Portanto $\delta_{K,T}(u)\delta_{K,T}(v) = \delta_{K,T}(v)\delta_{K,T}(u) = \delta_{K,T}(u)$, para qualquer $v \in T$. Logo $\delta_{K,T}(u)$ é um zero de $S_T(K)$. Finalmente

$$\delta_{K,T}(w) = \delta_{K,T}(u) \Leftrightarrow C_{K,T}(w) = C_{K,T}(u) \Leftrightarrow C_{K,T}(w) = \emptyset \Leftrightarrow w \notin K. \quad \square$$

De acordo com a Observação feita na página 34, o semigrupo sintáctico $S_{A^+}(\mathcal{X})$ pode depender do alfabeto A: por exemplo, $S_{A^+}(A^{\mathbb{Z}})$ é trivial, enquanto que se $A \subsetneq B$ então $S_{B^+}(A^{\mathbb{Z}})$ é o monóide $\mathscr{U} = \{0, 1\}$. Por outro lado, se $\mathcal{X}$ não é um sistema simbólico pleno então $S_{A^+}(\mathcal{X}) = S_{B^+}(\mathcal{X})$ para quaisquer alfabetos A e B tais que $\mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{X} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$, por causa da Proposição 2.15. Logo nesse caso não há qualquer ambiguidade na notação $S(\mathcal{X})$ e a definição de semigrupo sintáctico de $\mathcal{X}$ não depende do alfabeto.

Enquanto que a Proposição 2.15 reflecte a nível sintáctico o carácter factorial da linguagem de um sistema simbólico, o próximo lema reflecte o facto de ela ser prolongável.

Lema 2.16 ([BH86, Jon96c])**.** *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$. Se $s \in S_{A^+}(\mathcal{X}) \setminus \{0\}$ então existem $r, t \in S_{A^+}(\mathcal{X})$ tais que $rst \neq 0$.*

Demonstração. Se $s \in S_{A^+}(\mathcal{X}) \setminus \{0\}$ então existe $u \in L(\mathcal{X})$ tal que $\delta_{\mathcal{X}}(u) = s$. Como $L(\mathcal{X})$ é prolongável, existem $a, b \in A$ tais que $aub \in L(\mathcal{X})$, pelo que $\delta_{\mathcal{X}}(aub) \neq 0$. Basta então tomar $r = \delta_{\mathcal{X}}(a)$ e $s = \delta_{\mathcal{X}}(b)$. □

Uma $\mathcal{J}$-classe J de um semigrupo S com zero diz-se 0-*minimal* se $J \subseteq S \setminus \{0\}$ e se os elementos de $S \setminus \{0\}$ forem $\mathcal{J}$-minimais entre os elementos de $S \setminus \{0\}$. Uma $\mathcal{J}$-classe diz-se 0-*mínima* se for a única $\mathcal{J}$-classe 0-minimal.

Proposição 2.17. *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico sófico de $A^{\mathbb{Z}}$ diferente de $A^{\mathbb{Z}}$. As $\mathcal{J}$-classes 0-minimais de $S_{A^+}(\mathcal{X})$ são limitadas por idempotentes.*

Demonstração. Suponhamos que s é um elemento de uma $\mathcal{J}$-classe 0-minimal de $S_{A^+}(\mathcal{X})$. Então existem $r, t \in S_{A^+}(\mathcal{X})$ tais que $rst \neq 0$. Logo $rst \in [s]_{\mathcal{J}}$, uma vez que $rst \leq_{\mathcal{J}} s$ e $[s]_{\mathcal{J}}$ é 0-minimal. Portanto $s \in S_{A^+}(\mathcal{X})^1\, rst\, S_{A^+}(\mathcal{X})^1 \subseteq S_{A^+}(\mathcal{X})\, s\, S_{A^+}(\mathcal{X})$. Logo $[s]_{\mathcal{J}}$ é limitada por idempotentes, pelos Lemas 1.27 e 1.28. $\square$

Proposição 2.18 ([BH86]). *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ diferente de $A^{\mathbb{Z}}$. O sistema simbólico $\mathcal{X}$ é irredutível se e só se existe em $S_{A^+}(\mathcal{X})$ uma $\mathcal{J}$-classe regular 0-miníma.*

Portanto a classe dos sistemas simbólicos irredutíveis fica caracterizada pelo semigrupo sintáctico dos seus elementos Se $\mathcal{X}$ não é irredutível, então $S(\mathcal{X})$ pode ou não ter $\mathcal{J}$-classes 0-mínimas (cf. Figura 2.2).

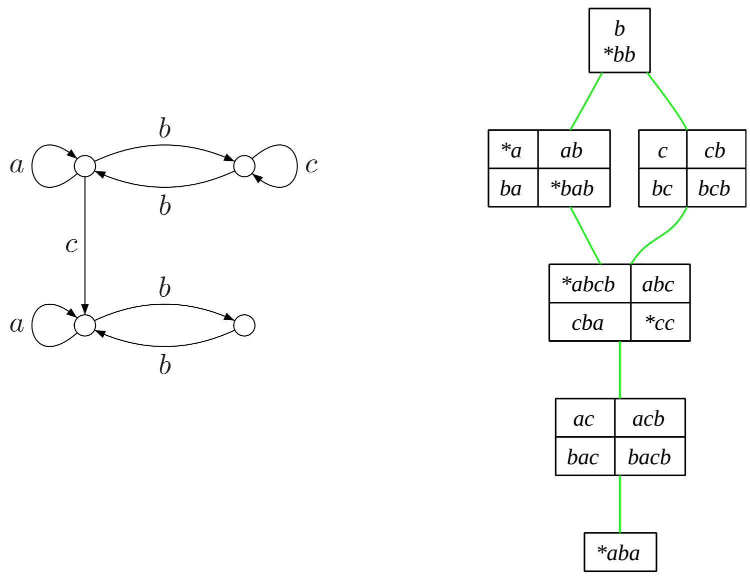


Figura 2.2: Um sistema simbólico e o diagrama de Green do seu semigrupo sintáctico.

Dada uma linguagem L de A^+, uma palavra v de A^+ é *constante para* L se

$$uv, vw \in L \Rightarrow uvw \in L \quad \text{para quaisquer } v, w \in A^*.$$

Uma palavra diz-se *sincronizante*[3] *para* L se pertencer a L e for constante para L. A relação destas noções com as propriedades do semigrupo sintáctico foram investigadas por N. Jonoska em [Jon96c, Jon96b, Jon98].

O *rank* de uma função parcial é o cardinal da sua imagem. É bem conhecido que elementos $\mathcal{J}$-equivalentes de um semigrupo de funções parciais têm o mesmo rank.

Proposição 2.19 (cf. [Jon98]). *Sejam $\mathcal{X}$ um sistema simbólico e v um elemento de $L(\mathcal{X})$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *v é sincronizante para $L(\mathcal{X})$;*
2. *o rank de v na apresentação de Krieger de $\mathcal{X}$ é 1;*
3. *o rank de v em qualquer subgrafo etiquetado da apresentação de Krieger de $\mathcal{X}$ que reconheça $L(\mathcal{X})$ é 1.*

[3] Em [LM96, Exercício 3.3.4] é usada a designação *intrinsecamente sincronizante*.

A equivalência entre as primeira e segunda condições na Proposição 2.19 surge explicitamente em [Jon98], por exemplo, e a equivalência entre as primeira e terceira condições obtém-se de forma inteiramente análoga.

Proposição 2.20 ([LM96, Proposição 3.3.16]). *Suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico sófico de $A^{\mathbb{Z}}$. Se $u \in L(\mathcal{X})$ então existe $v \in A^*$ tal que uv é sincronizante para $L(\mathcal{X})$.*

Proposição 2.21 ([LM96, Teorema 3.4.17]). *Um sistema simbólico irredutível $\mathcal{X}$ é de tipo finito se e só se existe um inteiro N tal que todas as palavras de $L(\mathcal{X})$ de comprimento maior do que N são sincronizantes para $L(\mathcal{X})$.*

Proposição 2.22 ([Jon98, Corolário 2.5]). *Dado um sistema simbólico sófico $\mathcal{X}$, seja*

$$I_c = \{\delta_{\mathcal{X}}(v) \mid v \text{ é constante para } L(\mathcal{X})\}.$$

Então:

1. *I_c é um ideal aperiódico;*
2. *as $\mathcal{J}$-classes 0-mínimas de $S(\mathcal{X})$ estão contidas em I_c;*
3. *uma $\mathcal{J}$-classe de $S(\mathcal{X})$ contida em I_c é regular se e só se é $\mathcal{J}$-maximal em I_c.*

O semigrupo sintáctico de $(ab)^+$ é denotado por B_2. O semigrupo B_2 também pode ser definido com sendo o semigrupo de transição do autómato da Figura 1.3 na página 31. Mais geralmente, dado um inteiro $n > 1$, seja B_n o grafo com n vértices em cuja matriz de adjacência as entradas da diagonal são zero, e todas as outras são iguais a um, e seja B_1 o grafo com um só vértice e lacete. O semigrupo de transição de B_n é denotado por B_n. É um facto do domínio do folklore que o semigrupo B_n pertence à pseudovariedade gerada por B_2.

Observação 2.23. Seja n um inteiro. Se G é um grafo fortemente conexo com n vértices então o semigrupo sintáctico de X_{G} é B_n.

Justificação. As relações binárias que constituem o semigrupo de transição de G são os conjuntos da forma $\{(x, y)\}$, onde x e y são vértices de G. Ora são precisamente essas relações que constituem o semigrupo de transição de B_n. □

2.2.3 Sistemas simbólicos de tipo quase finito

Um *sistema simbólico de tipo quase finito* é um sistema simbólico sófico irredutível com uma apresentação bi-fechante. Existem outras caracterizações equivalentes:

Teorema 2.24 ([Nas85, BKM85] e [Béa93, Proposição 2.16]). *Um sistema simbólico sófico irredutível é de tipo quase finito se e só se*

1. *a sua apresentação direita de Fischer é co-fechante;*
2. *a sua apresentação esquerda de Fischer é fechante;*
3. *é conjugado com um sistema simbólico sófico com uma apresentação fortemente conexa bi-resolvente.*

A classe dos sistemas simbólicos de tipo quase finito é fechada para a conjugação, o que está demonstrado em [Béa93, Proposição 4.1]. Veremos mais à frente nesta monografia uma demonstração em que tal facto surge como consequência de um resultado mais geral.

Em [BKM85] é provado que as coberturas associadas a duas quaisquer apresentações bi-fechantes de um sistema simbólico sófico são conjugadas. Em particular, as coberturas de Fischer esquerda e direita de um sistema simbólico de tipo quase finito são conjugadas. As coberturas de Krieger esquerda e direita de um sistema simbólico de tipo quase finito não têm que ser conjugadas.

2.3 Invariantes de conjugação

2.3.1 Função zeta e entropia

Um elemento x de $A^{\mathbb{Z}}$ tem período n se $\sigma^n(x) = x$. Dado um sistema simbólico $\mathcal{X}$, para cada $n \geq 1$ seja $p_n(\mathcal{X})$ o número de elementos de $\mathcal{X}$ com período n. A sucessão $(p_n(\mathcal{X}))_n$ é obviamente um invariante de conjugação. A *função zeta* de $\mathcal{X}$ é a função

$$\zeta_{\mathcal{X}}(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n(\mathcal{X})}{n}\, t^n\right).$$

A informação contida na função $\zeta_{\mathcal{X}}$ é precisamente a mesma que está contida na sucessão $(p_n(\mathcal{X}))_n$.

Dado um sistema simbólico $\mathcal{X}$, a sucessão $\left(\frac{\ln|L_n(\mathcal{X})|}{n}\right)_n$ é convergente. O seu limite é a chamada *entropia* de $\mathcal{X}$, e é denotada por $h(\mathcal{X})$. Se $\mathcal{X}$ for um sistema simbólico sófico então $h(\mathcal{X}) = \limsup \frac{1}{n} \ln p_n(\mathcal{X})$. Portanto, a função zeta determina a entropia no caso sistemas sóficos. Tal não se passa em geral: por exemplo, existem sistemas simbólicos minimais infinitos com diferente entropia, mas tais sistemas têm todos função zeta nula — isto é, não têm pontos periódicos [Fur67, HK67, DS02].

Como $|L_n(\gamma_k(\mathcal{X}))| = |L_{nk}(\mathcal{X})|$ e $p_n(\gamma_k(\mathcal{X})) = p_{nk}(\mathcal{X})$, a entropia e a função zeta são invariantes de conjugação ulterior.

O conceito de entropia foi aplicado em [AV06] a pseudopalavras, com resultados expressivos acerca da estrutura do semigrupo profinito livre. No Apêndice A exibimos uma selecção desses resultados, a título de exemplo das potencialidades da exploração de ligações entre a dinâmica simbólica e os semigrupos profinitos.

2.3.2 Forma de Jordan não nula

Uma matriz finita diz-se *essencial* se for uma matriz sem linhas ou colunas nulas. Dado um grafo finito essencial $\mathrm{G} = (V, E, \alpha, \omega)$, vamos ordenar os n elementos de V, representando-os por $v_1, \ldots, v_n$. A matriz M_{G} é a matriz quadrada $n \times n$ tal que $(M_{\mathrm{G}})_{i,j}$ é o número de arestas que começam em v_i e acabam em v_j. Trata-se de uma matriz essencial. Se H for isomorfo a G então M_{G} e M_{H} são conjugadas por uma matriz de permutação. Reciprocamente, dada uma matriz quadrada essencial M de inteiros não negativos existe um único grafo essencial G tal que $M = M_{\mathrm{G}}$, a menos de isomorfismo preservando a ordenação dos vértices de G. Denotamos por X_M o sistema simbólico X_{G_M} (esta definição está correcta na medida em que se $M_{\mathrm{G}} = M_{\mathrm{H}}$ então entre X_{G} e X_{H} existe uma conjugação definida por um isomorfismo entre G e H preservando a ordenação dos vértices).

A *forma de Jordan não nula* de uma matriz M é a matriz que se obtém da forma de Jordan de M eliminando as linhas e as colunas que correspondem ao valor próprio zero.

Teorema 2.25 ([LM96, Teorema 7.4.10])**.** *A forma de Jordan não nula de uma matriz quadrada essencial M é um invariante de conjugação ulterior de X_M.*

Uma consequência imediata do teorema seguinte é que a forma de Jordan não nula de M determina a entropia e a função zeta de X_M.

Teorema 2.26 ([LM96]: Teorema 6.4.6 e sua demonstração, Teorema 4.4.4 e Lema 4.4.3)**.** *Suponhamos que M é uma matriz $r \times r$ de inteiros não negativos. Seja I_r a matriz identidade*

$r \times r$. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ for uma lista de valores próprios não nulos de M contados com as respectivas multiplicidades então

$$\zeta_{X_M}(t) = [\det(I_r - tM)]^{-1} = \left[\prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i t)\right]^{-1}$$

e $h(X_M) = \ln\left(\max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i\right)$.

Graças à Proposição 2.9, a classificação das classes de conjugação dos sistemas simbólicos de tipo finito reduz-se ao estudo dos sistemas simbólicos da forma X_M. Desde a década de 1970 (e os Teoremas 2.25 e 2.26 são disso exemplo) esta abordagem foi explorada de forma intensiva e dominante, naturalmente com recurso à Álgebra Linear e à Álgebra Comutativa. O confronto entre as relações de conjugação e de conjugação ulterior fez-se fundamentalmente a este nível matricial. Também no caso dos sistemas simbólicos sóficos se pode de forma natural recorrer ao uso de matrizes (simbólicas), com as quais se podem calcular diversos invariantes (como a função zeta) e enquadrar devidamente diversas questões (como o confronto entre conjugação e conjugação ulterior): veja-se o Apêndice no final desta monografia.

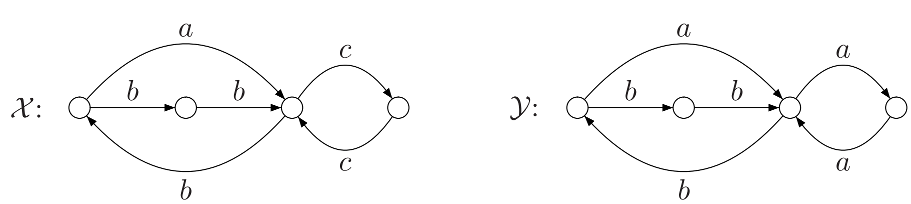
2.3.3 As coberturas de Krieger e de Fischer

Os teoremas seguintes só por si justificam o interesse das coberturas de Krieger e de Fischer de um sistema sófico.

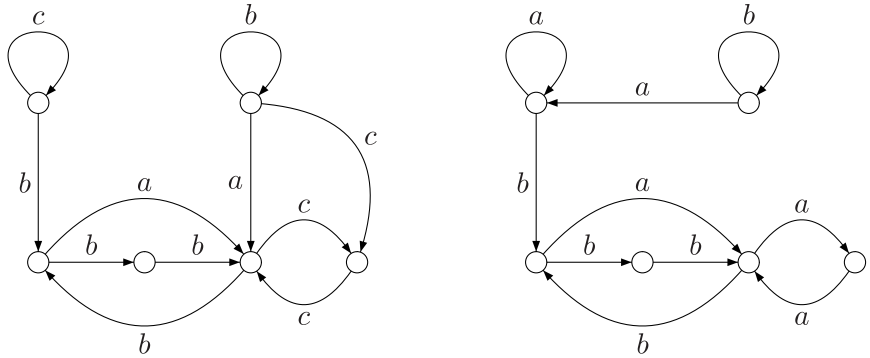
Teorema 2.27 ([Kri84, BK88])**.** *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sistemas simbólicos sóficos. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ forem (ulteriormente) conjugados então as suas coberturas direitas de Krieger são (ulteriormente) conjugadas.*

Teorema 2.28 ([Kri84, BKM85, BK88])**.** *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sistemas simbólicos sóficos irredutíveis. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ forem (ulteriormente) conjugados, então as suas coberturas direitas de Fischer são (ulteriormente) conjugadas.*

Exemplo 2.29. Consideremos os sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ com as seguintes apresentações:



Ambos os grafos etiquetados são resolventes, fortemente conexos e reduzidos, pelo que se tratam das coberturas de Fischer de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$, respectivamente. Em particular, os domínios das coberturas de Fischer de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ são iguais. A função zeta de $\mathcal{X}$ é igual à de $\mathcal{Y}$. As apresentações de Krieger de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ são, respectivamente, os seguintes grafos etiquetados:



As funções zeta dos domínios das coberturas de Krieger de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ também são iguais, mas as respectivas formas de Jordan não nulas são distintas:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\sqrt{5})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\sqrt{5})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \end{bmatrix}$$

Logo $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ não são conjugados, pelo Teorema 2.27.

2.3.4 O sistema simbólico de multiplicidade

Dada uma codificação $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{M}(G) = \{x \in \mathcal{X} : |G^{-1}G(x)| > 1\}.$$

É claro que $\sigma(\mathcal{M}(G)) \subseteq \mathcal{M}(G)$ e que $\sigma^{-1}(\mathcal{M}(G)) \subseteq \mathcal{M}(G)$. Portanto $\overline{\mathcal{M}(G)}$ é um sistema simbólico, denominado *sistema simbólico de multiplicidade de* G. A restrição de G a $\overline{\mathcal{M}(G)}$ é designada por *cobertura de multiplicidade de* G. Em geral $\mathcal{M}(G)$ não é fechado. Por outro lado se (H, λ) for um grafo etiquetado bi-fechante então $\mathcal{M}(\lambda_*)$ é fechado [BK88].

Reparemos que se (φ, ψ) é uma conjugação entre duas codificações G e H, então o par $(\varphi|_{\overline{\mathcal{M}(G)}}, \psi|_{G\left(\overline{\mathcal{M}(G)}\right)})$ é uma conjugação entre as codificações $G : \overline{\mathcal{M}(G)} \to G\left(\overline{\mathcal{M}(G)}\right)$ e $H : \overline{\mathcal{M}(H)} \to H\left(\overline{\mathcal{M}(H)}\right)$.

Teorema 2.30 ([BK88, Teorema 2.8])**.** *Suponhamos que $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ são sistemas simbólicos misturados de tipo quase finito. Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja $\pi_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}_i$ a cobertura direita de Fischer de $\mathcal{Y}_i$. Suponhamos que as coberturas de multiplicidade de π_1 e de π_2 são conjugadas, e que $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ são ulteriormente conjugados. Então $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ são ulteriormente conjugados.*

Uma vez que a conjugação ulterior é um invariante muito forte para a conjugação de sistemas simbólicos sóficos, se $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é a cobertura direita de Fischer de um sistema simbólico sófico então a classe de conjugação da cobertura de multiplicidade de π juntamente com a classe de conjugação ulterior de $\mathcal{X}$ formam um invariante de conjugação, que é particularmente forte quando $\mathcal{Y}$ é misturado e de tipo quase finito.

De seguida descrevemos um algoritmo para o cálculo da cobertura de multiplicidade da cobertura associada a um grafo etiquetado essencial. Este algoritmo tem similaridades com o algoritmo que aparece em [Béa93] para decidir se um grafo etiquetado é fechante ou não.

Num grafo G, dizemos que uma aresta e de r em s é um *descendente* (respectivamente, um *ascendente*) de um vértice p se existe em G um caminho de p a r (respectivamente, de s a p).

Supondo que (G, η) é um grafo etiquetado fiel, podemos denotar por (p, a, q) a única aresta de p em q etiquetada a, se tal aresta existe. O *η-quadrado* de G é o grafo G^η cujos vértices são os pares de vértices de G, e onde o conjunto de arestas começando em (p, r) e acabando em (q, s) é o conjunto dos triplos $((p, r), a, (q, s))$ tais que (p, a, q) e (r, a, s) são arestas de G. Um vértice *diagonal* de G^η é um vértice da forma (p, p). As projecções definidas pelas regras $((p, r), a, (q, s)) \mapsto (p, a, q)$ e $((p, r), a, (q, s)) \mapsto (r, a, s)$ são denotadas por λ e ρ, respectivamente.

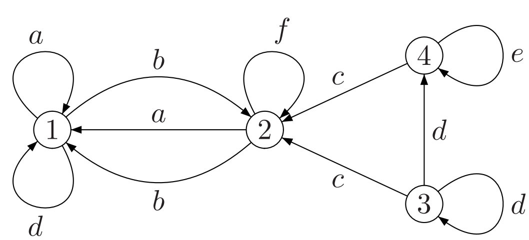
Proposição 2.31. *Consideremos o grafo etiquetado fiel* (G, η). *Seja W o subconjunto de X_{G^η} constituído pelos caminhos bi-infinitos em G^η que passam por um vértice não diagonal. Então $\mathcal{M}(\eta_*) = \lambda_*(W)$. A linguagem $L(\mathcal{M}(\eta_*))$ é reconhecida pelo grafo etiquetado obtido da parte essencial de $(\mathrm{G}^\eta, \lambda)$ pela remoção das arestas que não são ascendentes nem descendentes de vértices não diagonais.*

Demonstração. Suponhamos que $c = (p_i, a_i, p_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ é um elemento de $\mathcal{M}(\eta_*)$. Então existe em X_{G} um elemento da forma $(q_i, a_i, q_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ distinto de c. Seja $\hat{c} = ((p_i, q_i), a_i, (p_{i+1}, q_{i+1}))_{i\in\mathbb{Z}}$. Então $\hat{c} \in W$ e $\lambda_*(\hat{c}) = c$, pelo que $\mathcal{M}(\eta_*) \subseteq \lambda_*(W)$. Reciprocamente, para qualquer $c \in X_{\mathrm{G}^\eta}$ temos $\eta_*(\lambda_*(c)) = \eta_*(\rho_*(c))$, e $c \in W$ se e só se $\lambda_*(c) \neq \rho_*(c)$, donde $\lambda_*(W) \subseteq \mathcal{M}(\eta_*)$.

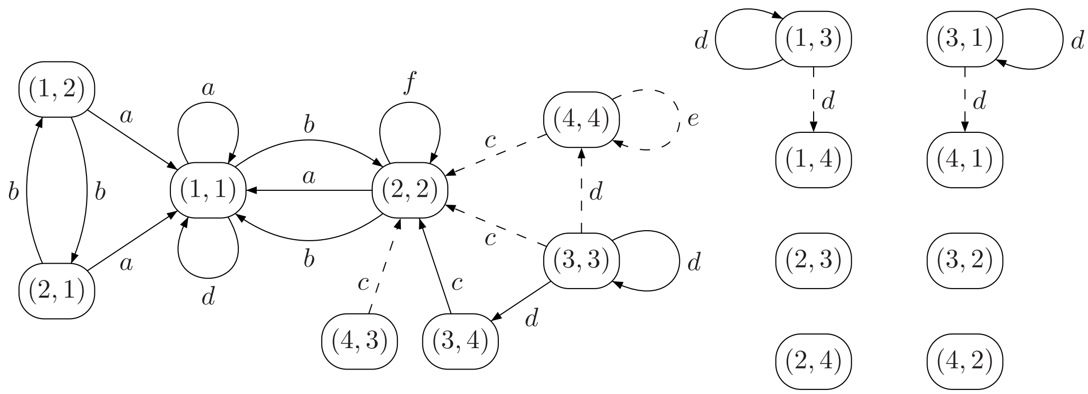
Num grafo essencial, uma aresta é ascendente ou descendente de um dado vértice se e só se pertence a um caminho bi-infinito passando em tal vértice. Portanto, pela primeira parte da demonstração, na parte essencial de $(\mathrm{G}^\eta, \lambda)$ as etiquetas dos caminhos cujas arestas são ascendentes ou descendentes de vértices não diagonais são precisamente os elementos de $L(\mathcal{M}(\eta_*))$ $\square$

Uma vez que $L(\mathcal{M}(\eta_*)) = L\left(\overline{\mathcal{M}(\eta_*)}\right)$, a Proposição 2.31 permite-nos calcular uma apresentação do sistema simbólico $\overline{\mathcal{M}(\eta_*)}$.

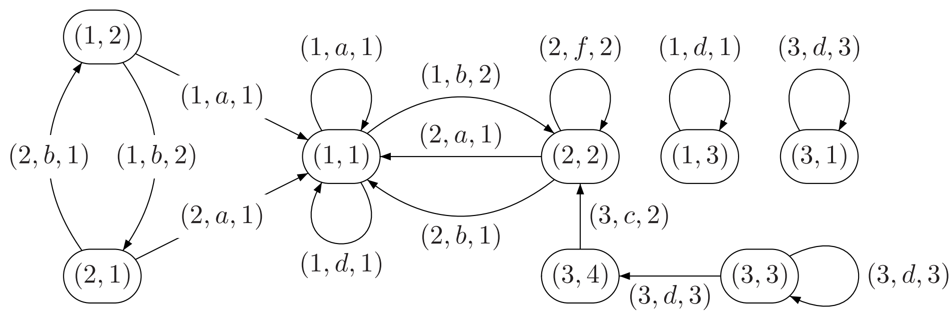
Exemplo 2.32. Consideremos o seguinte grafo etiquetado (G, η):



De seguida exibimos uma apresentação de G^η. As arestas a tracejado são aquelas que não pertencem à parte essencial ou que não são ascendentes nem descendentes de vértices não diagonais.



Eliminando as arestas a tracejado e etiquetando as restantes através da projecção λ obtemos o seguinte grafo etiquetado H reconhecendo $L(\mathcal{M}(\eta_*))$:



Note-se que $\eta(p, l, q) = l$. A cobertura de multiplicidade de η_* é a cobertura definida pelo grafo etiquetado (H, η).

Parte II

Semigrupos e semigrupóides profinitos relativamente livres

Capítulo 3

Propriedades do fecho topológico da linguagem de um sistema simbólico

Este capítulo está dividido em quatro secções. O conteúdo original das duas primeiras foi produzido em colaboração com Almeida. O material de Almeida já publicado encontra-se devidamente referenciado. A duas últimas secções baseiam-se essencialmente numa parte de um artigo do autor [Cos06].

Na primeira secção averiguamos quando é que o fecho em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ de uma linguagem factorial de A^+ é um subconjunto factorial de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Veremos que tal acontece sempre que a variedade de linguagens correspondente a V é fechada para a concatenação (o que é equivalente a termos $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$). Este resultado será aplicado várias vezes nesta monografia.

Na segunda secção são estabelecidas diversas correspondências naturais entre os sistemas simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ e certos tipos de subconjuntos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, cujas propriedades descreve--mos. A caracterização dessas correspondências no caso dos sistemas minimais, demonstrada em [Alm05a], é particularmente relevante para a compreensão da estrutura de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. É feita uma nova demonstração dessa caracterização.

Nas duas últimas secções investigamos como é que a aplicação de morfismos de sobreposição definidos por codificações afecta o fecho topológico da linguagem de um sistema simbólico, deduzindo desse modo invariantes de conjugação relacionados com a estrutura de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.

3.1 O fecho topológico de uma linguagem factorial

Recordemos que se K é um subconjunto de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ então $F(K)$ denota o conjunto dos factores finitos dos elementos de K, quando V é uma pseudovariedade que contém N.

Começamos por observar no próximo lema que o fecho topológico em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ de uma qualquer linguagem de A^+ não altera o conjunto dos factores finitos, quando V contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$.

Lema 3.1. *Consideremos uma qualquer pseudovariedade de semigrupos V que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$. Então $F(\overline{K}) = F(K)$ para qualquer subconjunto K de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.*

Demonstração. Seja $u \in F(\overline{K})$. Então existe $\pi \in \overline{K}$ tal que $\pi \in (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 u (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1$. Seja $(\pi_n)_n$ uma sucessão de elementos de K convergente para π. Temos $(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1\, u\, (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 = \overline{A^*uA^*}$. A linguagem A^*uA^* é V-reconhecível, pois é localmente testável e $\mathscr{L}\mathsf{SI} \subseteq \mathsf{V}$. Logo $\overline{A^*uA^*}$

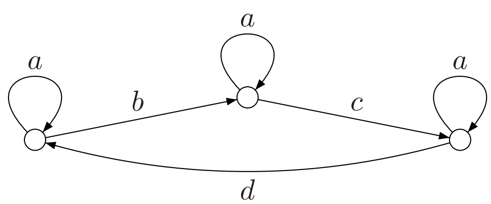
é uma vizinhança aberta de π, pela Proposição 1.40. Assim, para n suficientemente grande temos $\pi_n \in \overline{A^*uA^*}$, e portanto $u \in F(\pi_n) \subseteq F(K)$. $\square$

Proposição 3.2. *Suponhamos que* V *é uma pseudovariedade de semigrupos que contém* N. *Se* L *é uma linguagem* V*-reconhecível factorial de* A^+ *então* $\overline{L}$ *é um subconjunto factorial de* $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.

Demonstração. Sejam $u, v \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tais que $uv \in \overline{L}$. Sejam $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ sequências de elementos de A^+ convergindo para u e v, respectivamente. O conjunto $\overline{L}$ é uma vizinhança aberta de uv pela Proposição 1.40. Como $(u_nv_n)_n$ converge para uv, existe k tal que se $n \geq k$ então $u_nv_n \in \overline{L} \cap A^+$. Os elementos de A^+ são pontos isolados de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, pelo que $\overline{L} \cap A^+ = L$. Como L é factorial, se $n \geq k$ então $u_n, v_n \in L$, donde $u, v \in \overline{L}$. $\square$

Proposição 3.3. *Existe uma linguagem racional factorial prolongável* L *de* A^+ *cujo fecho* $\overline{L}$ *em* $\overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{SI}$ *não é a união das* $\mathcal{J}$*-classes dos seus elementos. Em particular,* $\overline{L}$ *não é factorial.*

Demonstração. Consideremos o alfabeto de quatro letras $A = \{a, b, c, d\}$. Seja L a linguagem reconhecida pelo seguinte grafo etiquetado:



A linguagem L é factorial e prolongável. Em $\overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{SL}$, a pseudopalavra $v = a^\omega ba^\omega ca^\omega$ pertence a $\overline{L}$. Como $a^\omega cv$ e v têm os mesmos factores finitos, os mesmos prefixos finitos e os mesmos sufixos finitos, resulta da Proposição 1.51 que $a^\omega cv = v$. Logo v e cv são $\mathcal{J}$-equivalentes. Suponhamos que $cv \in \overline{L}$. Então existe uma sucessão $(u_n)_n$ de elementos de L convergindo para cv. Seja $K = cA^* \cap A^*bA^* \cap A^+ \setminus A^*dA^*$. Então $cv \in \overline{K}$. Uma vez que K é $\mathscr{L}\mathsf{SI}$-reconhecível, o conjunto $\overline{K}$ é aberto em $\overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{SL}$. Logo, para n suficientemente grande temos $u_n \in K$. Mas $K \cap L = \emptyset$. Portanto $[v]_\mathcal{J} \cap \overline{L} \neq \emptyset$ mas $[v]_\mathcal{J} \nsubseteq \overline{L}$. Em particular $\overline{L}$ não é factorial. $\square$

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de linguagens. Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma *variedade fechada para a concatenação* se para qualquer alfabeto finito A e para quaisquer $L, K \in \mathcal{V}A^+$ tivermos $LK \in \mathcal{V}A^+$. Para descrevermos as pseudovariedades correspondentes no sentido do Teorema de Eilenberg às variedades de linguagens fechadas para a concatenação, é necessário introduzir mais algumas noções, em relação às quais indicamos [Pin97] como referência bibliográfica.

Um *morfismo relacional* $S \multimap T$ entre dois semigrupos S e T é uma função $\tau : S \to \mathcal{P}(T) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\tau(s_1)\tau(s_2) \subseteq \tau(s_1s_2)$, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$. Reparemos que se e é um idempotente de T tal que $\tau^{-1}(e) \neq \emptyset$ então $\tau^{-1}(e)$ é um subsemigrupo de S. Dada uma pseudovariedade de semigrupos W, um morfismo relacional $S \multimap T$ diz-se W-*relacional* se $\tau^{-1}(e) \in \mathsf{W}$ para qualquer idempotente e de T tal que $\tau^{-1}(e) \neq \emptyset$. O *produto de Mal'cev* de duas pseudovariedades de semigrupos W e V, denotado por $\mathsf{W} ⓜ \mathsf{V}$, é a classe dos semigrupos finitos S para os quais existe um morfismo W-relacional $S \multimap T$ tal que $T \in \mathsf{V}$. A classe $\mathsf{W} ⓜ \mathsf{V}$ é uma pseudovariedade de semigrupos. Facilmente se constata que $\mathsf{W} ⓜ \mathsf{V}$ contém W e V. Tem-se $\mathsf{W} ⓜ \mathsf{V} = \mathsf{W} ⓜ (\mathsf{W} ⓜ \mathsf{V})$ [Pin86, Exercício 5.10].

As pseudovariedades correspondentes às variedades de linguagens fechadas para a concatenação são precisamente as pseudovariedades da forma $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledcirc \mathsf{V}$. Este resultado é uma instância particular de um resultado de [CPS06], o qual por sua vez generaliza um resultado semelhante de [Str79] obtido para pseudovariedades de monóides. As pseudovariedades da forma $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledcirc \mathsf{V}$ são precisamente as pseudovariedades da forma $\mathsf{A} \circledcirc \mathsf{V}$.

Lema 3.4. *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos que contém N. A multiplicação em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é uma função aberta se e só se $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledcirc \mathsf{V}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ a variedade das linguagens reconhecidas por semigrupos de V. Então $\{\overline{L} \mid L \in \mathcal{V}A^+\}$ é uma base de abertos da topologia de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, pela Proposição 1.40. Logo o conjunto $\{\overline{L} \times \overline{K} \mid L, K \in \mathcal{V}A^+\}$ é uma base de abertos da topologia de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V} \times \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Para quaisquer subconjuntos P e Q de A^+ temos $\overline{P}\cdot\overline{Q} = \overline{PQ}$. Logo a multiplicação em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é uma função aberta se e só se $\overline{LK}$ é um aberto para quaisquer $L, K \in \mathcal{V}A^+$. Pela Proposição 1.40 o conjunto $\overline{LK}$ é aberto se e só se $LK \in \mathcal{V}A^+$. Logo a multiplicação em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é uma função aberta se e só se o conjunto $\mathcal{V}A^+$ é fechado para a concatenação. $\square$

Se $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ for finito então a multiplicação é obviamente uma função aberta. Ora $\overline{\Omega}_A\mathsf{D}_n$ é finito, para qualquer alfabeto finito A e para qualquer inteiro positivo n, e no entanto a variedade de linguagens correspondente a D_n não é fechada para a concatenação. Logo a condição $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{V}$ no Lema 3.4 não pode ser omitida.

Lema 3.5. *Seja S um semigrupo topológico cuja topologia é gerada por uma métrica. Suponhamos que a multiplicação é uma função aberta. Sejam $u, v \in S$. Suponhamos que $(w_n)_n$ é uma sucessão de elementos de S convergente para uv. Então existe uma subsucessão $(w_{n_k})_k$ e sucessões $(u_k)_k$, $(v_k)_k$ tais que $w_{n_k} = u_k v_k$ para todo o k, e $\lim u_k = u$ e $\lim v_k = v$.*

Demonstração. Vamos denotar por $B(t, \varepsilon)$ a bola aberta em S de centro t e raio ε. Seja $k \in \mathbb{Z}^+$. Como a multiplicação é uma função aberta, o conjunto $B\big(u, \frac{1}{k}\big)B\big(v, \frac{1}{k}\big)$ é uma vizinhança aberta de uv. Logo existe p_k tal que

$$n \geq p_k \Rightarrow w_n \in B\Big(u, \frac{1}{k}\Big)B\Big(v, \frac{1}{k}\Big).$$

Seja n_k a sucessão de inteiros definida recursivamente do seguinte modo:

- $n_1 = p_1$;
- $n_k = \max\{n_{k-1} + 1, p_k\}$ se $k > 1$.

A sucessão $(n_k)_k$ é estritamente crescente. Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existem $u_k \in B\big(u, \frac{1}{k}\big)$ e $v_k \in B\big(v, \frac{1}{k}\big)$ tais que $w_{n_k} = u_k v_k$. Temos $\lim d(u_k, u) = \lim d(v_k, v) = 0$, ou seja $\lim u_k = u$ e $\lim v_k = v$. $\square$

Proposição 3.6. *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos. Suponhamos que $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledcirc \mathsf{V}$. Se L é uma linguagem factorial de A^+ então $\overline{L}$ é um subconjunto factorial de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.*

Demonstração. Suponhamos que $uv \in \overline{L}$. Seja $(w_n)_n$ uma sucessão de elementos de L tal que $\lim w_n = uv$. Pelo Lema 3.5, existe uma subsucessão $(w_{n_k})_k$ e sucessões $(u_k)_k$, $(v_k)_k$ tais que $w_{n_k} = u_k v_k$ para todo k e $\lim u_k = u$ e $\lim v_k = v$. Como $w_{n_k} \in A^+$, necessariamente $u_k, v_k \in A^+$. E como $w_{n_k} \in L$ e L é factorial em A^+, temos $u_k, v_k \in L$. Logo $u, v \in \overline{L}$. $\square$

Uma pseudovariedade V diz-se *fracamente cancelável* se sempre que V satisfaz uma pseudoidentidade da forma $u_1\#u_2 = v_1\#v_2$ em que $\#$ é uma letra que não é factor de nenhuma das pseudopalavras u_1, u_2, v_1, v_2, então V também satisfaz as pseudoidentidades $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2$. Em [ACZ06] dão-se vários exemplos de pseudovariedades fracamente canceláveis, tais como R, J, A e G.

A pseudovariedade R contém N e está estritamente contida em A. Logo $\mathsf{R} \neq \mathsf{A} \circledcirc \mathsf{R}$. Assim sendo, a próxima proposição assegura-nos que existem situações que estão numa posição intermédia entre as Proposições 3.2 e 3.6. A caracterização completa de tais situações permanece por fazer.

Proposição 3.7. *Consideremos o alfabeto de quatro letras $X = \{a, b, c, d\}$. Sejam S e T os semigrupos sintácticos das linguagens $\{ab\}$ e $\{aa\}$, respectivamente. Se V é uma pseudovariedade fracamente cancelável que contém N e os semigrupos S^1 e T^1, então existe uma linguagem factorial prolongável de X^+ que não é racional e cujo fecho em $\overline{\Omega}_X\mathsf{V}$ é factorial.*

Demonstração. Seja $Y = \{c, d\}$. Consideremos os conjuntos $M_0 = Y^+$, $M_1 = Y^*aY^*$, $M_2 = Y^*bY^*$, $M_3 = Y^*aY^*bY^*$. Então o semigrupo sintáctico de M_3 é S^1, e o semigrupo sintáctico de M_i é um subsemigrupo de S^1. Logo M_i é V-reconhecível. Consideremos o conjunto

$$W = \{w \in X^+ : (avb \text{ é um factor de } w) \Rightarrow (v = c^k d^k \text{ para algum } k \geq 0)\}.$$

Seja $L = (M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3) \cap W$. Então L é uma linguagem factorial e prolongável, mas pelo Lema do Bombeamento [Lal79, Proposição 1.7] não é racional.

Sejam $\pi \in \overline{\Omega}_X\mathsf{V}$ e $\alpha, \beta \in (\overline{\Omega}_X\mathsf{V})^1$ tais que $\alpha\pi\beta \in \overline{L}$. Vamos mostrar que $\pi \in \overline{L}$. Existe i tal que $\alpha\pi\beta \in \overline{M_i}$. Como o conjunto M_i é V-reconhecível, pela Proposição 3.2 temos $\pi \in \overline{M_i}$. Uma vez que $M_0 \cup M_1 \cup M_2 \subseteq L$, ficamos reduzidos ao caso em que $\alpha\pi\beta, \pi \in \overline{M_3}$. Então existem $p, q, r \in (\overline{\Omega}_Y\mathsf{V})^1$ tais que $\pi = paqbr$. Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de elementos de L convergindo para $\alpha\pi\beta$. Como o conjunto $\overline{M_3}$ é aberto, tomando subsucessões se necessário, podemos supor que para qualquer n existem $x_n, y_n, z_n \in Y^*$ tais que $u_n = x_n a y_n b z_n$ e $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ e $(z_n)_n$ convergem para pseudopalavras x, y e z de $\overline{\Omega}_Y\mathsf{V}$, respectivamente.

Suponhamos que alguma das letras a ou b é um factor de α ou de β. Seja $K = X^*aX^*aX^* \cup X^*bX^*bX^*$. Então $\alpha\pi\beta \in \overline{K}$. O semigrupo sintáctico de $X^*aX^*aX^*$ e de $X^*bX^*bX^*$ é T^1. Logo a linguagem K é V-reconhecível, pelo que o fecho $\overline{K}$ é um aberto de $\overline{\Omega}_X\mathsf{V}$. Então para n suficientemente grande temos $u_n \in (\overline{K} \cap X^+) \cap L$. Logo $u_n \in K \cap L$, porque os elementos de X^+ são isolados em $\overline{\Omega}_X\mathsf{V}$, uma vez que $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{V}$. Ora

$$K \cap L \subseteq K \cap (M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3) = \emptyset,$$

o que é contraditório. Logo $\alpha, \beta \in \overline{\Omega}_Y\mathsf{V}$.

Temos $\alpha\pi\beta = \alpha paqbr\beta = xaybz$. Como V é fracamente cancelável, temos $\alpha p = x$, $q = y$ e $r\beta = z$. Sejam $(p_n)_n$ e $(r_n)_n$ sucessões de palavras de Y^* convergindo para p e r, respectivamente. Então $(p_n a y_n b r_n)_n$ converge para $paybr = \pi$. Portanto $\pi \in \overline{Y^*aybY^*}$. Como $u_n = x_n a y_n b z_n \in L$, a palavra y_n é igual a $c^k d^k$ para algum inteiro k. Logo $Y^*ay_nbY^* \subseteq L$, donde se conclui que $\pi \in \overline{L}$. $\square$

A pseudovariedade $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ é a menor pseudovariedade V em que os conjuntos dos factores, prefixos e sufixos finitos de uma pseudopalavra são V-reconhecíveis (Teorema 1.33). Este facto é essencial para que posteriormente possamos ir mais longe no relacionamento dos sistemas dinâmicos simbólicos com os semigrupos profinitos relativamente livres. Por essa razão, e tendo em conta as Proposições 3.2, 3.6 e 3.7, seria desde já interessante dar exemplos de pseudovariedades fracamente canceláveis que contêm $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ e que estão estritamente contidas em A. Tais exemplos podem ser fornecidos com a ajuda da próxima proposição. Como para ela não encontrámos qualquer referência bibliográfica, incluímos aqui a sua demonstração, que é essencialmente uma mera aplicação do Teorema 1.58.

Proposição 3.8. *Se* V *é uma pseudovariedade fracamente cancelável que contém* SI *então* $\mathsf{V} * \mathsf{D}$ *também é fracamente cancelável.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathsf{V} * \mathsf{D}$ satisfaz a pseudoidentidade

$$\pi_1 \# \pi_2 = \rho_1 \# \rho_2, \tag{3.1}$$

onde # é uma letra que não é factor de nenhuma das pseudopalavras π_i e ρ_i. Comecemos por supor que π_2 é uma palavra finita de comprimento n. Como $\mathsf{SI} \subseteq \mathsf{V}$, temos $\mathscr{L}\mathsf{SI} = \mathsf{SI} * \mathsf{D} \subseteq \mathsf{V} * \mathsf{D}$. Em particular, as pseudopalavras módulo $\mathsf{V} * \mathsf{D}$ têm prefixos e sufixos finitos únicos. Logo, se ρ_2 é uma pseudopalavra infinita ou uma palavra finita de comprimento maior do que n então o seu sufixo de comprimento $n+1$ coincide com o sufixo de comprimento $n+1$ de $\pi_1 \# \pi_2$, que é $\# \pi_2$. Mas tal contradiz a hipótese de que # não é um factor de ρ_2. Portanto ρ_2 é uma palavra finita de comprimento menor ou igual ao de π_2. Por simetria concluímos que π_2 e ρ_2, têm o mesmo comprimento, donde $\pi_2 = \rho_2$. Então pela Proposição 1.60 concluímos que $\mathsf{V} * \mathsf{D}$ satisfaz as pseudoidentidades $\pi_i = \rho_i$, como queríamos mostrar.

Como os casos em que π_1, ρ_1 ou ρ_2 é uma palavra finita são inteiramente análogos, resta-nos supor que π_1, π_2, ρ_1 e ρ_2 são pseudopalavras infinitas. Seja k um qualquer inteiro positivo. Então $\mathsf{V} * \mathsf{D}_k$ satisfaz a pseudoidentidade (3.1), uma vez que $\mathsf{V} * \mathsf{D}_k \subseteq \mathsf{V} * \mathsf{D}$. Pelo Teorema 1.58 a pseudovariedade V satisfaz a pseudoidentidade

$$\Phi_k(\pi_1 \# \pi_2) = \Phi_k(\rho_1 \# \rho_2)$$

e

$$\mathrm{i}_k(\pi_1 \# \pi_2) = \mathrm{i}_k(\rho_1 \# \rho_2), \qquad \mathrm{t}_k(\pi_1 \# \pi_2) = \mathrm{t}_k(\rho_1 \# \rho_2). \tag{3.2}$$

Temos as seguintes factorizações

$$\begin{aligned} \Phi_k(\pi_1 \# \pi_2) &= \Phi_k(\pi_1) \cdot \Phi_k(\mathrm{t}_k(\pi_1)\,\#) \cdot \Phi_k(\mathrm{t}_{k-1}(\pi_1)\,\#\pi_2), \\ \Phi_k(\rho_1 \# \rho_2) &= \Phi_k(\rho_1) \cdot \Phi_k(\mathrm{t}_k(\rho_1)\,\#) \cdot \Phi_k(\mathrm{t}_{k-1}(\rho_1)\,\#\rho_2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ satisfaz a pseudoidentidade (3.1), a palavra $\mathrm{t}_k(\pi_1)\,\#$ é o único factor de comprimento $k+1$ de $\pi_1 \# \pi_2$ que tem # como sufixo (cf. Lema 1.48). Do mesmo modo, $\mathrm{t}_k(\rho_1)\,\#$ é o único factor de comprimento $k+1$ de $\rho_1 \# \rho_2$ que tem # como sufixo. Logo $\mathrm{t}_k(\pi_1)\,\# = \mathrm{t}_k(\rho_1)\,\#$. Então, como V é fracamente cancelável, de (3.3) resulta que V satisfaz a pseudoidentidade $\Phi_k(\pi_1) = \Phi_k(\rho_1)$. Como π_1 e ρ_1 são pseudopalavras infinitas, de (3.2) deduzimos que $\mathrm{i}_k(\pi_1) = \mathrm{i}_k(\rho_1)$, Por outro lado, acabámos de verificar que $\mathrm{t}_k(\pi_1)\,\# = \mathrm{t}_k(\rho_1)\,\#$, ou seja, que $\mathrm{t}_k(\pi_1) = \mathrm{t}_k(\rho_1)$. Então pelo Teorema 1.58 concluímos que $\mathsf{V} * \mathsf{D}_k$ satisfaz as pseudoidentidade $\pi_1 = \rho_1$. Como k é arbitrário e $\mathsf{V} * \mathsf{D} = \bigcup_{k \geq 1} \mathsf{V} * \mathsf{D}_k$, concluímos que $\mathsf{V} * \mathsf{D}$ satisfaz a pseudoidentidade $\pi_1 = \rho_1$.

Dualmente, considerando as factorizações

$$\begin{aligned} \Phi_k(\pi_1 \# \pi_2) &= \Phi_k(\pi_1\,\#\,\mathrm{i}_{k-1}(\pi_2)) \cdot \Phi_k(\#\,\mathrm{i}_k(\pi_2)) \cdot \Phi_k(\pi_2), \\ \Phi_k(\rho_1 \# \rho_2) &= \Phi_k(\rho_1\,\#\,\mathrm{i}_{k-1}(\rho_2)) \cdot \Phi_k(\#\,\mathrm{i}_k(\rho_2)) \cdot \Phi_k(\rho_2), \end{aligned}$$

concluímos que $\mathsf{V} * \mathsf{D}$ satisfaz a pseudoidentidade $\pi_2 = \rho_2$. ☐

Por exemplo, como R é fracamente cancelável e contém Sl, a pseudovariedade $\mathsf{R} * \mathsf{D}$ é uma pseudovariedade fracamente cancelável que contém $\mathscr{L}\mathsf{Sl}$ e que está estritamente contida em A. Uma forma de verificar que $\mathsf{R}*\mathsf{D}$ está estritamente contida em A é utilizar a igualdade $\mathscr{L}\mathsf{R} = \mathsf{R}*\mathsf{D}$, provada em [Eil76, Capítulo V] e a conhecida e fácil de provar igualdade $\mathsf{A} = \mathscr{L}\mathsf{A}$ (donde $\mathsf{A} = \mathsf{A} * \mathsf{D}$).

3.2 Algumas correspondências naturais

Ao longo desta secção V é uma pseudovariedade de semigrupos que contém $\mathscr{L}\mathsf{Sl}$.

Na secção 3.1 investigámos em que circunstâncias a propriedade factorial de uma linguagem de A^+ é herdada pelo seu fecho topológico em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Como a linguagem de um sistema simbólico é factorial e prolongável, naturalmente impõe-se fazer uma averiguação análoga para as linguagens prolongáveis. Comparando com a secção 3.1, desta feita a situação é muito mais simples, como veremos de seguida.

Um subconjunto K de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é *prolongável* se para qualquer $u \in K$ existem $a, b \in A$ tais que $au, ub \in K$.

Lema 3.9. *Se K é um subconjunto prolongável de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ então $\overline{K}$ é prolongável. Além disso, para qualquer $u \in \overline{K}$ existem pseudopalavras infinitas $w, v \in \overline{K}$ tais que $wu, uv \in \overline{K}$.*

Demonstração. Seja $u \in \overline{K}$ e seja $(u_n)_n$ uma sucessão de elementos de K convergindo para u. Como K é prolongável, para cada n existem letras a_n e b_n tais que $a_n u_n, u_n b_n \in K$. Uma vez que existe um número finito de letras a sucessão $(a_n, b_n)_n$ tem uma subsucessão constante igual a (a, b). Então $au, ub \in \overline{K}$.

Por indução imediatamente se conclui que para qualquer inteiro positivo m existem palavras w_m e v_m sobre A de comprimento m tais que $w_m u, uv_m \in \overline{K}$. Se (w, v) for um ponto de acumulação da sucessão $(w_m, v_m)_m$ então $wu, uv \in \overline{K}$. □

Em particular, se L é uma linguagem prolongável de A^+ então o fecho de L em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é prolongável.

A próxima observação, feita por Almeida, constitui uma importante motivação para o estudo do fecho topológico em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ da linguagem de um sistema simbólico.

Observação 3.10. Se L é uma linguagem factorial prolongável de A^+ então $F\big(\overline{L} \setminus A^+\big) = L$.

Justificação. Seja $u \in L$. Pelo Lema 3.9 existe v tal que $uv \in \overline{L} \setminus A^+$. Portanto $L \subseteq F\big(\overline{L} \setminus A^+\big)$. A outra inclusão resulta do Lema 3.1. □

Assim, um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ fica completamente determinado pelo conjunto $\overline{L(\mathcal{X})} \setminus A^+$, pois se $\mathcal{Y}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ tal que $\overline{L(\mathcal{X})} \setminus A^+ = \overline{L(\mathcal{Y})} \setminus A^+$ então $L(\mathcal{X}) = L(\mathcal{Y})$, pela Observação 3.10.

3.2.1 Elementos $\mathcal{J}$-minimais

O interesse nos elementos $\mathcal{J}$-minimais de $\overline{L(\mathcal{X})}$, onde $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico, é que eles contêm toda a informação sobre $\mathcal{X}$ (como veremos no Lema 3.13, mais à frente). Começamos por verificar que tais elementos $\mathcal{J}$-minimais existem de facto.

Lema 3.11. *Seja S um semigrupo compacto. Se K é um subconjunto fechado não vazio de S então K tem elementos $\leq_{\mathcal{J}}$-minimais.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma $\leq_{\mathcal{J}}$-cadeia de elementos de K para a ordem parcial $\leq_{\mathcal{J}}$. A identidade no conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{C}, \geq_{\mathcal{J}})$ define uma rede τ de elementos de K. Como K é compacto, existe uma sub-rede $(\tau_{\lambda_i})_{i\in\mathcal{I}}$ de τ convergente para um elemento w de K. Fixemos $u \in \mathcal{C}$. Para cada $i \in \mathcal{I}$ tal que $u \geq_{\mathcal{J}} \lambda_i$, sejam $x_i, y_i \in S^1$ tais que $\lambda_i = x_i u y_i$. Seja i_0 tal que $u \geq_{\mathcal{J}} \lambda_{i_0}$. Como $S^1 \times S^1 \times S^1$ é compacto, a rede $(x_i, \lambda_i, y_i)_{i_0 \leq i}$ admite alguma sub-rede convergente para um elemento de $S^1 \times S^1 \times S^1$ da forma (x, w, y). Por continuidade, $w = xuy$. Logo $w \leq_{\mathcal{J}} u$ para qualquer $u \in \mathcal{C}$. Portanto qualquer $\leq_{\mathcal{J}}$-cadeia de elementos de K é minorada por um elemento de K. Logo K tem elementos $\mathcal{J}$-minimais, pelo Lema de Zorn. □

Corolário 3.12. *Sejam S um semigrupo compacto e K um subconjunto fechado não vazio de S. Se $u \in K$ então existe em K um elemento $\mathcal{J}$-minimal π tal que $\pi \leq_{\mathcal{J}} u$.*

Demonstração. O conjunto $K_u = \{v \in K \mid v \leq_{\mathcal{J}} u\}$ é fechado e não vazio. Logo contém algum elemento $\mathcal{J}$-minimal π. Suponhamos que ρ é um elemento de K tal que $\rho \leq_{\mathcal{J}} \pi$. Então $\rho \in K_u$. Pela minimalidade de π temos $\rho \mathrel{\mathcal{J}} \pi$. Logo π é um elemento $\mathcal{J}$-minimal de K. □

Dada uma linguagem não vazia L de A^+, vamos denotar por $\mathfrak{j}(L)$ o conjunto dos elementos $\mathcal{J}$-minimais de $\overline{L}$.

Lema 3.13. *Se L é uma linguagem factorial não vazia de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ então $F(\mathfrak{j}(L)) = L$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1 temos $F(\mathfrak{j}(L)) \subseteq L$. Seja $u \in L$. Aplicando o Corolário 3.12 ao conjunto $\overline{L}$, concluímos que existe $\pi \in \mathfrak{j}(L)$ tal que $u \in F(\pi)$. □

Lema 3.14. *Se w é um elemento de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ limitado por idempotentes então $F(w)$ é uma linguagem factorial prolongável de A^+.*

Demonstração. Apenas temos que mostrar que $F(w)$ é prolongável. Seja u um elemento de $F(w)$. Se não existe $a \in A$ tal que $ua \in F(w)$ então $w = vu$ para algum $v \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, pelo Lema 1.49. Por hipótese, existe algum idempotente $f \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tal que $w = wf$. Seja $b = \mathrm{i}_1(f)$. Então $ub \in F(w)$, o que é contraditório. Logo existe $a \in A$ tal que $ua \in F(w)$, e dualmente existe $a \in A$ tal que $au \in F(w)$. □

Exemplo 3.15. Consideremos o alfabeto de três letras $A = \{a, b, c\}$. Para cada inteiro positivo n, consideremos as pseudopalavras $u_n = a^\omega b^{(2n-1)!} a^\omega$ e $v_n = a^\omega b^{(2n)!} a^{n!} c a^\omega$. A linguagem $L = \bigcup_{n\geq 1}(F(u_n) \cup F(v_n))$ é factorial e prolongável, de acordo com o Lema 3.14. Observemos que $u_n, v_n \in \overline{L}$. Seja w um elemento de $\overline{L}$ tal que $w \leq_{\mathcal{J}} u_n$. Seja $(w_k)_k$ uma sucessão de elementos de L convergente para w. Então a partir de certa ordem temos $w_k \in A^* a b^{(2n-1)!} a A^*$. Ora $A^* a b^{(2n-1)!} a A^* \cap L = a^+ b^{(2n-1)!} a^+$. Logo $w \in \overline{a^+} b^{(2n-1)!} \overline{a^+}$, pelo que $w \mathrel{\mathcal{J}} u_n$. Portanto $u_n \in \mathfrak{j}(L)$. Se $n \neq m$ então $u_n \not\leq_{\mathcal{J}} u_m$ uma vez que $ab^{(2m-1)!}a$ não é factor de u_n. Logo $\mathfrak{j}(L)$ intersecta uma infinidade de $\mathcal{J}$-classes.

As sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ convergem para $u = a^\omega b^\omega a^\omega$ e $v = a^\omega b^\omega a^\omega c a^\omega$, respectivamente. As pseudopalavras u e v pertencem a $\overline{L}$, u é factor de v, mas v não é factor de u. Logo $u \notin [\mathfrak{j}(L)]_{\mathcal{J}}$. Daqui se conclui que $\mathfrak{j}(L)$ e $[\mathfrak{j}(L)]_{\mathcal{J}}$ não são conjuntos fechados.

Definição 3.16. Consideremos o conjunto $\mathbb{J}(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})$ dos subconjuntos K de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ que satisfazem as seguintes condições:

1. os elementos de K são limitados por idempotentes;

2. $K \subseteq \overline{F(K)}$;
3. para quaisquer $u \in \overline{K}$ e $v \in K$, se $u \leq_{\mathcal{J}} v$ então $u \mathrel{\mathcal{J}} v$.

Lema 3.17. *Se L é uma linguagem prolongável não vazia de A^+ então $\mathfrak{j}(L) \in \mathbb{J}(\overline{\Omega}_A \mathsf{V})$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1 temos $F(\overline{L}) = L$, pelo que é imediato que a Condição 2 da Definição 3.16 é satisfeita.

Seja L uma linguagem prolongável de A^+. Suponhamos que $u \in \mathfrak{j}(L)$. Pelo Lema 3.9, existem $a, b \in A$ tais que $aub \in \overline{L}$. Como $aub \leq_{\mathcal{J}} u$, da $\mathcal{J}$-minimalidade de u resulta que $aub \mathrel{\mathcal{J}} u$. Logo $u \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{V})^1 aub (\overline{\Omega}_A \mathsf{V})^1 \subseteq (\overline{\Omega}_A \mathsf{V}) u (\overline{\Omega}_A \mathsf{V})$. Pelo Lema 1.27, u é limitado por idempotentes.

Sejam $u \in \overline{\mathfrak{j}(L)}$ e $v \in \mathfrak{j}(L)$ tais que $u \leq_{\mathcal{J}} v$. Como $u \in \overline{L}$, pelo Corolário 3.12 existe um elemento w de $\mathfrak{j}(L)$ tal que $w \leq_{\mathcal{J}} u \leq_{\mathcal{J}} v$. Como w e v são elementos $\mathcal{J}$-minimais de $\overline{L}$ necessariamente $w \mathrel{\mathcal{J}} u \mathrel{\mathcal{J}} v$. □

Repare-se na analogia entre as demonstrações do Lema 3.17 e da Proposição 2.17.

Proposição 3.18. *Seja $\mathbb{FP}(A^+)$ o conjunto das linguagens factoriais prolongáveis não vazias de A^+. Então a função*

$$\begin{aligned} \Theta: \quad \mathbb{FP}(A^+) &\rightarrow \{[\,\overline{K}\,]_{\mathcal{J}} \mid K \in \mathbb{J}(\overline{\Omega}_A \mathsf{V})\} \\ L &\mapsto [\overline{\mathfrak{j}(L)}]_{\mathcal{J}} \end{aligned}$$

é uma bijecção, cuja inversa é a função

$$\begin{aligned} \Psi: \quad \{[\,\overline{K}\,]_{\mathcal{J}} \mid K \in \mathbb{J}(\overline{\Omega}_A \mathsf{V})\} &\rightarrow \mathbb{FP}(A^+) \\ [\,\overline{K}\,]_{\mathcal{J}} &\mapsto F(K). \end{aligned}$$

Demonstração. Reparemos primeiro que a função Ψ está bem definida, pelo Lema 3.1, pelo facto de que elementos $\mathcal{J}$-equivalentes têm os mesmos factores, e porque $F(K)$ é efectivamente factorial e prolongável de acordo com o Lema 3.14. Além disso, pelo Lema 3.13, temos $\Psi \circ \Theta(L) = L$.

Seja $K \in \mathbb{J}(\overline{\Omega}_A \mathsf{V})$. Seja $w \in \mathfrak{j}(F(K))$. Então existe uma sucessão $(w_n)_n$ de elementos de $F(K)$ convergente para w. Para cada n existe $v_n \in K$ tal que $v_n \leq_{\mathcal{J}} w_n$. A sucessão $(v_n)_n$ tem algum ponto aderente v em $\overline{K}$. Como a relação $\leq_{\mathcal{J}}$ é topologicamente fechada, temos $v \leq_{\mathcal{J}} w$. Pela Condição 2 da Definição 3.16, temos $v \in \overline{F(K)}$. Logo $v \mathrel{\mathcal{J}} w$, pois w é um elemento $\mathcal{J}$-minimal de $\overline{F(K)}$. Portanto

$$w \in \mathfrak{j}(F(K)) \Rightarrow [w]_{\mathcal{J}} \cap \overline{K} \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

Suponhamos agora que $u \in \overline{\mathfrak{j}(F(K))}$. Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de elementos de $\mathfrak{j}(F(K))$ convergente para u. Por (3.4), para cada n existe $v_n \in [u_n]_{\mathcal{J}} \cap \overline{K}$. Seja v um ponto aderente da sucessão $(v_n)_n$. Por $\mathcal{J}$ ser uma relação topologicamente fechada, temos $v \in [u]_{\mathcal{J}} \cap \overline{K}$, pelo que $u \in [\overline{K}]_{\mathcal{J}}$. Portanto

$$\overline{\mathfrak{j}(F(K))} \subseteq [\,\overline{K}\,]_{\mathcal{J}}. \tag{3.5}$$

Reciprocamente, seja $u \in K$. Pela Condição 2 da Definição 3.16 e pelo Corolário 3.12, existe $\pi \in \mathfrak{j}(F(K))$ tal que $\pi \leq_{\mathcal{J}} u$. De acordo com (3.4), existe $\pi' \in \overline{K}$ tal que $\pi' \mathrel{\mathcal{J}} \pi$, donde $\pi' \leq_{\mathcal{J}} u$. Então pela Condição 3 da Definição 3.16 concluímos que $\pi \mathrel{\mathcal{J}} u$. Logo $u \in [\mathfrak{j}(F(K))]_{\mathcal{J}}$. Portanto $K \subseteq [\mathfrak{j}(F(K))]_{\mathcal{J}}$. Então, novamente por $\leq_{\mathcal{J}}$ ser uma relação topologicamente fechada, temos $\overline{K} \subseteq [\,\overline{\mathfrak{j}(F(K))}\,]_{\mathcal{J}}$. Tendo em consideração (3.5), concluímos que $[\,\overline{K}\,]_{\mathcal{J}} = [\,\overline{\mathfrak{j}(F(K))}\,]_{\mathcal{J}}$. Ou seja, $\Theta \circ \Psi([\,\overline{K}\,]_{\mathcal{J}}) = [\,\overline{K}\,]_{\mathcal{J}}$. □

3.2.2 O caso das linguagens irredutíveis

Nesta subsecção vamos investigar a natureza da correspondência estabelecida na Proposição 3.18 quando restrita ao universo das linguagens dos sistemas simbólicos irredutíveis, em especial os minimais.

Lema 3.19. *Suponhamos que L é uma linguagem irredutível de A^+. Se $u, v \in \overline{L}$ então existe $w \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$ tal que $uwv \in \overline{L}$.*

Demonstração. Consideremos sucessões (u_n) e (v_n) de elementos de L convergentes para u e v respectivamente. Como L é irredutível, para cada n existe uma palavra w_n de L tal que $u_n w_n v_n \in L$. Seja w um ponto aderente da sucessão $(w_n)_n$. Então uwv é um ponto aderente da sucessão $(u_n w_n v_n)_n$, pelo que $uwv \in \overline{L}$. $\square$

Lema 3.20. *Seja L uma linguagem não vazia de A^+. Se L é irredutível então o conjunto $\mathsf{j}(L)$ está contido numa $\mathcal{J}$-classe regular.*

Demonstração. Suponhamos que L é irredutível. Sejam $u, v \in \mathsf{j}(L)$. Então pelo Lema 3.19 existe $w \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$ tal que $uwv \in \overline{L}$. Como $uwv \leq_{\mathcal{J}} u$ e $uwv \leq_{\mathcal{J}} v$, e u e v são elementos $\mathcal{J}$-minimais de $\overline{L}$, concluímos que uwv, u e v são $\mathcal{J}$-equivalentes. Logo o conjunto $\mathsf{j}(L)$ está contido numa $\mathcal{J}$-classe.

Se $u \in \mathsf{j}(L)$ então, conforme já observámos, existe $w \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$ tal que $uwu \; \mathcal{J} \; u$. Logo existem $x, y \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{V})^1$ tais que $u = xuwuy$. Então $u = (xuw)^n u y^n$ para todo o inteiro positivo n, e portanto $u = (xuw)^\omega u y^\omega$. Assim $(xuy)^\omega$ é um idempotente $\mathcal{J}$-equivalente a u. $\square$

No caso da pseudovariedade $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ podemos exibir uma linguagem factorial prolongável não vazia para a qual não se verifica a condição recíproca do Lema 3.20. Consideremos o alfabeto de três elementos $A = \{a, b, c\}$ e o elemento $e = a^\omega bcba^\omega$ de $\overline{\Omega}_A \mathscr{L}\mathsf{SI}$. Como os monóides locais de $\overline{\Omega}_A \mathscr{L}\mathsf{SI}$ são semi-reticulados e e pertence ao monóide local de $\overline{\Omega}_A \mathscr{L}\mathsf{SI}$ em a^ω, sabemos que e é um idempotente. Consideremos a linguagem factorial prolongável $L = F(e)$. Temos

$$L = a^*bcba^* \cup a^*bc \cup a^*b \cup a^* \cup ba^* \cup cba^* \cup \{c\}.$$

É claro que $e \in \overline{L}$ e que

$$\overline{L} = \overline{a^*}bcb\overline{a^*} \cup \overline{a^*}bc \cup \overline{a^*}b \cup \overline{a^*} \cup b\overline{a^*} \cup cb\overline{a^*} \cup \{c\},$$

Conclui-se facilmente que todos os elementos de $\overline{L}$ são factores de e. Logo o conjunto $\mathsf{j}(L)$ está contido na $\mathcal{J}$-classe de e, a qual é regular. Contudo L não é uma linguagem irredutível, uma vez que $A^*bcA^*cbA^* \cap L = \emptyset$.

Proposição 3.21. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos V tal que $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$. Seja L uma linguagem factorial não vazia de A^+. Então L é irredutível se e só se $\mathsf{j}(L)$ é uma $\mathcal{J}$-classe regular.*

Demonstração. O conjunto $\mathsf{j}(L)$ é uma união de $\mathcal{J}$-classes pela Proposição 3.6.

Se L é irredutível então $\mathsf{j}(L)$ é uma $\mathcal{J}$-classe regular pelo Lema 3.20.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathsf{j}(L)$ é uma $\mathcal{J}$-classe regular. Seja e um idempotente de $\mathsf{j}(L)$. Consideremos uma sucessão $(e_n)_n$ de elementos de L convergente para e. Como $e = e{\cdot}e$, pelo Lema 3.5 existe uma subsucessão $(e_{n_k})_k$ e sucessões $(f_k)_k$, $(g_k)_k$ tais que $e_{n_k} = f_k g_k$

para todo o k, $\lim f_k = e$ e $\lim g_k = e$. Sejam $u, v \in L$. Pelo Corolário 3.12, u e v são factores de elementos de $\mathsf{j}(L)$. Como $\mathsf{j}(L)$ é uma $\mathcal{J}$-classe, concluímos que $e \in (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 u(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 \cap (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 v(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1$. E como $(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 u(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 \cap (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 v(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1$ é um aberto de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, a partir de certa ordem temos $f_k, g_k \in A^*uA^* \cap A^*vA^*$; em particular, $e_{n_k} = f_k g_k \in A^*uA^*vA^*$. Portanto existe $w \in A^*$ tal que uwv é um factor de e_{n_k}. Ora $e_{n_k} \in L$, pelo que $uwv \in L$, uma vez que L é factorial. Logo L é irredutível. $\square$

Dada uma linguagem irredutível L, vamos denotar por $\mathfrak{J}(L)$ a $\mathcal{J}$-classe que contém o conjunto $\mathsf{j}(L)$. Note-se que $\mathfrak{J}(L) = \mathsf{j}(L)$ se $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledm \mathsf{V}$, pela Proposição 3.6.

Proposição 3.22. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledm \mathsf{V}$. *Seja* $\mathbb{FPI}(A^+)$ *o conjunto das linguagens factoriais prolongáveis irredutíveis não vazias de* A^+. *Seja* $\mathbb{JI}(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})$ *o conjunto cujos elementos são as* $\mathcal{J}$*-classes regulares* K *de* $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *tais que* $K \subseteq \overline{F(K)}$. *Então a função*

$$\begin{aligned} \Theta : \quad \mathbb{FPI}(A^+) &\rightarrow \mathbb{JI}(\overline{\Omega}_A\mathsf{V}) \\ L &\mapsto \mathfrak{J}(L) \end{aligned}$$

é uma bijecção, cuja inversa é a função

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{JI}(\overline{\Omega}_A\mathsf{V}) &\rightarrow \mathbb{FPI}(A^+) \\ K &\mapsto F(K). \end{aligned}$$

Demonstração. Decorre imediatamente da Proposição 3.18. $\square$

Dadas duas $\mathcal{J}$-classes K_1 e K_2 de um semigrupo S, escrevemos $K_1 \leq_{\mathcal{J}} K_2$ sempre que existem elementos $u_1 \in K_1$ e $u_2 \in K_2$ tais que $u_1 \leq_{\mathcal{J}} u_2$. Deste modo fica definida uma ordem parcial $\leq_{\mathcal{J}}$ no conjunto das $\mathcal{J}$-classes de S.

Proposição 3.23. *Sejam* $\mathcal{Z}$ *e* $\mathcal{Y}$ *sistemas simbólicos irredutíveis de* $A^{\mathbb{Z}}$. *Então* $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$ *se e só se* $\mathfrak{J}(\mathcal{Y}) \leq_{\mathcal{J}} \mathfrak{J}(\mathcal{Z})$.

Demonstração. Temos $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$ se e só se $L(\mathcal{Z}) \subseteq L(\mathcal{Y})$. Pela Proposição 3.18 para qualquer sistema simbólico $\mathcal{Z}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ tem-se $L(\mathcal{Z}) = F(\mathfrak{J}(\mathcal{Z}))$. Logo se $\mathfrak{J}(\mathcal{Y}) \leq_{\mathcal{J}} \mathfrak{J}(\mathcal{Z})$ então $L(\mathcal{Z}) \subseteq L(\mathcal{Y})$. Reciprocamente, se $L(\mathcal{Z}) \subseteq L(\mathcal{Y})$ então $\overline{L(\mathcal{Z})} \subseteq \overline{L(\mathcal{Y})}$. Logo $\mathfrak{J}(\mathcal{Z}) \subseteq \overline{L(\mathcal{Y})}$. Pelo Corolário 3.12, a $\mathcal{J}$-classe $\mathfrak{J}(\mathcal{Y})$ está $\mathcal{J}$-abaixo de $\mathfrak{J}(\mathcal{Z})$. $\square$

Seja u um elemento de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ que é $\mathcal{J}$-maximal entre as pseudopalavras infinitas de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Então, pela Proposição 1.41 u é $\mathcal{J}$-equivalente a algum idempotente. As $\mathcal{J}$-classes que contenham elementos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ que são $\mathcal{J}$-maximais entre as pseudopalavras infinitas de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ serão referidas como sendo *$\mathcal{J}$-classes maximais de pseudopalavras infinitas*. Estas $\mathcal{J}$-classes foram estudadas pela primeira vez de forma aprofundada por Almeida em [Alm05a], onde são designadas *$\mathcal{J}$-classes maximais regulares*.

O próximo teorema é o principal resultado desta secção. Está demonstrado em [Alm05a, Teorema 2.6], usando ideias substancialmente diferentes; aí opta-se pela utilização da caracterização enunciada na Proposição 2.6, ao contrário da demonstração que aqui é feita. Optamos por fazer uma demonstração que surgisse como uma aplicação dos resultados que a precedem nesta secção.

Teorema 3.24. *Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico minimal de $A^{\mathbb{Z}}$ então $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ é uma $\mathcal{J}$-classe maximal de pseudopalavras infinitas de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Reciprocamente, se J é uma $\mathcal{J}$-classe maximal de pseudopalavras infinitas de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ então existe um único sistema simbólico minimal $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ tal que $J = \mathfrak{J}(\mathcal{X})$.*

Demonstração. Consideremos um sistema simbólico minimal $\mathcal{X}$. Seja u uma pseudopalavra infinita de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ que está $\mathcal{J}$-acima dos elementos de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Então $u = zet$ para algumas pseudopalavras z, e, t tais que e é um idempotente, pela Proposição 1.41. É claro que $F(e) \subseteq F(\mathfrak{J}(\mathcal{X}))$. Pelo Lema 3.14, existe um sistema simbólico $\mathcal{Y}$ tal que $L(\mathcal{Y}) = F(e)$. Pelo Lema 3.13 temos $F(\mathfrak{J}(\mathcal{X})) = L(\mathcal{X})$. Portanto $L(\mathcal{Y}) \subseteq L(\mathcal{X})$, ou seja, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$. Logo $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, pois $\mathcal{X}$ é minimal. Seja v um elemento de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Então existe uma sucessão $(v_n)_n$ de elementos de $L(\mathcal{X})$ convergente para v. Ora $L(\mathcal{X}) = L(\mathcal{Y}) = F(e)$, pelo que v é um factor de e, e portanto também de u. Logo $u \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, o que mostra que $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ é uma $\mathcal{J}$-classe maximal de pseudopalavras infinitas.

Reciprocamente, suponhamos que J é uma $\mathcal{J}$-classe maximal de pseudopalavras infinitas. Como J é regular, de acordo com o Lema 3.14 existe um sistema simbólico $\mathcal{Y}$ tal que $L(\mathcal{Y}) = F(J)$. O sistema simbólico $\mathcal{Y}$ contém algum sistema simbólico minimal $\mathcal{X}$. Então $\overline{L(\mathcal{X})} \subseteq \overline{F(J)}$. Logo, se $u \in \overline{L(\mathcal{X})}$ então existe uma sucessão de factores dos elementos de J que converge para u. Como a relação $\mathcal{J}$ é fechada, conclui-se que u é um factor dos elementos de J. Pela maximalidade de J, todas as pseudopalavras infinitas de $\overline{L(\mathcal{X})}$ pertencem a J. Logo $\mathfrak{J}(\mathcal{X}) = J$. A unicidade do sistema simbólico $\mathcal{X}$ resulta do Lema 3.13. $\square$

Foi provado em [Cos01] que se $|A| > 1$ então em $\overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{SI}$ existem $2^{\aleph_0}$ $\mathcal{J}$-classes que não são $\mathcal{J}$-comparáveis entre si. Este facto é agora um corolário imediato do Teorema 3.24 e da existência de $2^{\aleph_0}$ sistemas simbólicos minimais de $A^{\mathbb{Z}}$ [Lot02, Proposição 2.1.18].

Ainda em [Cos01] mostra-se que se $|A| > 1$ então $\overline{\Omega}_A\mathscr{L}\mathsf{SI}$ contém uma cadeia ascendente para a relação $<_{\mathcal{J}}$ com $2^{\aleph_0}$ elementos. Vamos apresentar uma nova demonstração desta propriedade, que consistirá na aplicação da Proposição 3.23 e na observação de que existe uma cadeia para a inclusão com $2^{\aleph_0}$ sistemas simbólicos irredutíveis de $A^{\mathbb{Z}}$ (cf. [Wal82, Secção 7.3, pág. 178 e 179]). Recordemos que quando nada dizemos em contrário, V é uma pseudovariedade que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$.

Teorema 3.25. *Se $|A| > 1$ então $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ contém uma cadeia ascendente para a relação $<_{\mathcal{J}}$ com $2^{\aleph_0}$ elementos regulares.*

Demonstração. É claro que basta-nos supor que A tem apenas duas letras, que supomos serem os inteiros 0 e 1. Denotemos por σ_+ a translação de sequências de letras de A indexadas por elementos de $\mathbb{Z}^+$, isto é, σ_+ denota a função de $A^{\mathbb{Z}^+}$ em $A^{\mathbb{Z}^+}$ que envia $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ em $(x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}^+}$.

Ordenemos os elementos de $A^{\mathbb{Z}^+}$ com a ordem lexicográfica: ou seja, dados dois elementos distintos $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ e $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ de $A^{\mathbb{Z}^+}$, temos $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+} < (y_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ se e só se o menor inteiro positivo j tal que $x_j \neq y_j$ é tal que $x_j = 0$.

Dado $\beta \in]1, 2[$, consideremos a expansão de 1 em potências de β^{-1}, isto é, $1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\beta,n}\beta^{-n}$ onde $a_{\beta,1} = [\beta] = 1$ e $a_{\beta,n} = [\beta^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{\beta,i}\beta^{n-i}]$ quando $n > 1$. Temos sempre $a_{\beta,n} \in \{0, 1\}$. Seja $a_\beta = (a_{\beta,i})_{i\in\mathbb{Z}^+}$. Usando argumentos indutivos rotineiros, prova-se que $(\sigma_+)^n(a_\beta) \leq a_\beta$ para qualquer inteiro não negativo n. Logo o seguinte conjunto é não vazio:

$$X_\beta = \{x \in A^{\mathbb{Z}^+} : (\sigma_+)^n(x) \leq a_\beta, \text{ para qualquer inteiro não negativo } n\}.$$

Seja $\mathcal{T}$ o conjunto dos números transcendentes pertencentes ao intervalo $]1,2[$. Vamos supor que $\beta \in \mathcal{T}$. Como $1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\beta,n}\beta^{-n}$, o conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : a_{\beta,n} = 1\}$ é infinito, caso constrário β seria um número algébrico. Consideremos a seguinte linguagem:

$$L_\beta = \{u \in A^+ : u = x_{[i,i+k]},\text{ para alguns } x \in X_\beta,\ i \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{Z}_0^+\}.$$

Sejam $u, v \in L_\beta$. Então existem $u', v' \in X_\beta$ tais que

$$u' = ux_1x_2x_3\ldots \in X_\beta, \quad v' = vy_1y_2y_3\ldots \in X_\beta,$$

para alguns $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+} \in A^{\mathbb{Z}^+}$ e $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}^+} \in A^{\mathbb{Z}^+}$. Como β é transcendente, existe $k > |u|$ tal que $a_{\beta,k} = 1$. Seja

$$w = u0^kvy_1y_2y_3\ldots$$

Suponhamos que $0 \leq n < |u|$. Então o prefixo p_n de comprimento $|u| - n$ de $(\sigma_+)^n(w)$ é o prefixo de comprimento $|u|-n$ de $(\sigma_+)^n(u')$. Como $(\sigma_+)^n(u') \leq a_\beta$ e $a_{\beta,k} = 1$, para qualquer $(z_i)_{i\in\mathbb{Z}^+} \in A^{\mathbb{Z}^+}$ temos

$$p_n0^kz_1z_2z_3\ldots < a_\beta.$$

Em particular, $(\sigma_+)^n(w) < a_\beta$. Se $|u| \leq n < |u| + k$ então

$$(\sigma_+)^n(w) = 0^{k-(n-|u|)}vy_1y_2y_3\ldots < a_\beta,$$

pois $a_{\beta,1} = 1$. Finalmente, se $n \geq |u| + k$ então

$$(\sigma_+)^n(w) = (\sigma_+)^{n-(|u|+k)}(v') \leq a_\beta.$$

Portanto $w \in X_\beta$. Logo $u0^kv \in L_\beta$, o que mostra que L_β é uma linguagem irredutível. É claro que L_β é factorial. Uma linguagem irredutível factorial também é prolongável. Logo existe um único sistema simbólico irredutível $\mathcal{X}_\beta$ de $A^{\mathbb{Z}}$ tal que $L(\mathcal{X}_\beta) = L_\beta$.

Em [Wal82, Secção 7.3, pág. 178 e 179] mostra-se que a entropia de $\mathcal{X}_\beta$ é igual a $\ln(\beta)$ (note-se que em [Wal82] não se mostra que $\mathcal{X}_\beta$ é irredutível). Logo a família $(\mathcal{X}_\beta)_{\beta\in\mathcal{T}}$ tem $2^{\aleph_0}$ elementos. Ora a família $(\mathcal{X}_\beta)_{\beta\in\mathcal{T}}$ está totalmente ordenada pela ordem de inclusão, uma vez que a ordem lexicográfica em $A^{\mathbb{Z}^+}$ é uma ordem total, e $a_\beta \leq a_\gamma$ implica $X_\beta \subseteq X_\gamma$. Logo, pela Proposição 3.25 a família $(\mathfrak{J}(\mathcal{X}_\beta))_{\beta\in\mathcal{T}}$ é uma cadeia para a relação $\leq_{\mathcal{J}}$ com $2^{\aleph_0}$ elementos. □

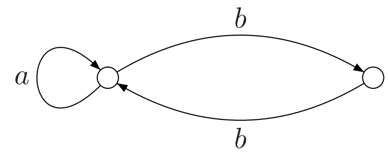
3.3 Codificação de pseudopalavras infinitas

Até ao fim deste capítulo, V é uma pseudovariedade de semigrupos que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ e tal que $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. Várias definições e notações que introduziremos são relativas a V. Esta dependência em geral não será explicitada, de modo a evitarmos uma notação excessivamente pesada.

3.3.1 A miragem

Dado um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$, seja $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ o conjunto dos elementos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ cujos factores finitos pertencem a $L(\mathcal{X})$. Designamos $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ por *miragem* de $\mathcal{X}$ em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$. Note-se que $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ é uma união de $\mathcal{J}$-classes. Não é surpreendente que para compreendermos as mudanças em $\overline{L(\mathcal{X})} \setminus A^+$ quando uma conjugação é aplicada a $\mathcal{X}$ sejamos levados a considerar o conjunto $\mathscr{M}(\mathcal{X})$: as funções de bloco operam "localmente" nos elementos de $A^{\mathbb{Z}}$, e a definição de miragem reflecte essa "localidade". Em geral os conjuntos $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ e $\overline{L(\mathcal{X})}$ não coincidem.

Exemplo 3.26. Consideremos o sistema simbólico sófico $\mathcal{Z}$ com a seguinte apresentação:



Consideremos uma pseudovariedade V que além de conter $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ também contém o semigrupo de transição desta apresentação. Consideremos também o elemento $ab^{\omega+1}a$ de $\overline{\Omega}_{\{a,b\}}\mathsf{V}$. Os seus factores finitos são a, ab^n, b^n e $b^n a$, com $n \geq 1$ (cf. Lema 1.48). Logo $ab^{\omega+1}a \in \mathscr{M}(\mathcal{Z})$. Se $n \geq 2$ então $ab^{n!+1}a \notin L(\mathcal{Z})$ pois $n!+1$ é ímpar. Logo $ab^{\omega+1}a \notin \overline{L(\mathcal{Z})}$ porque $\lim ab^{n!+1}a = ab^{\omega+1}a$ e porque o conjunto $\overline{L(\mathcal{Z})}$ é aberto, pela Proposição 1.40,

A *sombra* de $\mathcal{X}$ em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é o conjunto $\mathscr{S}(\mathcal{X}) = \bigcup_{u\in\overline{L(\mathcal{X})}}[u]_{\mathcal{J}}$. Se $L(\mathcal{X})$ é V-reconhecível ou se $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledcirc \mathsf{V}$ então $\overline{L(\mathcal{X})} = \mathscr{S}(\mathcal{X})$, pelas Proposições 3.2 e 3.6. Em contrapartida, se $\mathsf{V} = \mathscr{L}\mathsf{SI}$ então a Proposição 3.3 mostra-nos que é possível termos $\overline{L(\mathcal{X})} \neq \mathscr{S}(\mathcal{X})$.

Seja $\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$ o conjunto das pseudopalavras cujos factores finitos de comprimento n pertencem a $L(\mathcal{X})$. Reparemos que $\mathscr{M}(\mathcal{X}) = \bigcap_{n\geq 1}\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$. Temos a seguinte igualdade:

$$\mathscr{M}_n(\mathcal{X}) = \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \setminus \Bigg(\bigcup_{w\in A^n\setminus L(\mathcal{X})} (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 w (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 \Bigg).$$

O conjunto $(\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1 w (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1$ é um aberto de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, uma vez que é o fecho em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ do conjunto $\mathscr{L}\mathsf{SI}$-reconhecível A^*wA^*. Logo $\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$ é aberto-fechado e $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ é fechado. É claro que $L(\mathcal{X}) \subseteq \mathscr{M}(\mathcal{X})$, pelo que $\overline{L(\mathcal{X})} \subseteq \mathscr{M}(\mathcal{X})$, e $\overline{L(\mathcal{X})} \subseteq \mathscr{S}(\mathcal{X}) \subseteq \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de tipo finito então para n suficientemente grande temos $L(\mathcal{X}) = \mathscr{M}_n(\mathcal{X}) \cap A^+$; uma vez que A^+ é denso em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e $\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$ é aberto-fechado, isto implica que $\overline{L(\mathcal{X})} = \mathscr{M}_n(\mathcal{X}) = \mathscr{M}(\mathcal{X})$ para n suficientemente grande.

Proposição 3.27. *O conjunto $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ é factorial e prolongável.*

Demonstração. Por definição, uma pseudopalavra módulo V pertence a $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ se e só se todos os seus factores finitos pertencem a $L(\mathcal{X})$. Daqui decorre imediatamente que $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ é factorial.

Seja $u \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$ e seja $(u_k)_{k\geq 1}$ uma sucessão de elementos de A^+ convergente para u. Consideremos um inteiro positivo $n \geq 1$. Uma vez que $\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$ é uma vizinhança aberta de u, existe um inteiro p_n tal que se $k \geq p_n$ então u_k pertence a $\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$. Como $L(\mathcal{X})$ é prolongável, para todo $k \geq p_n$ existem letras $a_{n,k}$ e $b_{n,k}$ tais que $a_{n,k}u_k, u_k b_{n,k} \in \mathscr{M}_n(\mathcal{X})$. Uma vez que existe um número finito de letras e $\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$ é fechado, existem letras a_n e b_n tais que $a_n u, u b_n \in \mathscr{M}_n(\mathcal{X})$. Aplicando o mesmo raciocínio, existem letras a, b e uma subsucessão estritamente crescente de inteiros positivos $(n_m)_{m\geq 1}$ tal que $au, ub \in \mathscr{M}_{n_m}(\mathcal{X})$ para qualquer $m \geq 1$. O resultado segue agora da igualdade $\mathscr{M}(\mathcal{X}) = \bigcap_{m\geq 1}\mathscr{M}_{n_m}(\mathcal{X})$. □

3.3.2 Morfismos de sobreposição definidos por funções de blocos

Consideremos uma função $g : A^k \to B$. Seja $\hat{g}$ o único homomorfismo de monóides de $(\overline{\Omega}_{A^k}\mathsf{V})^1$ em $(\overline{\Omega}_B\mathsf{V})^1$ que estende g, e consideremos a função contínua $\bar{g} = \hat{g} \circ \Phi_{k-1}$. A função $\bar{g}$ herda de Φ_{k-1} a propriedade de ser um morfismo de sobreposição de janela k. A função $\bar{g}$ mimetiza no contexto das pseudopalavras o processo subjacente à codificação de sistemas simbólicos. As seguintes propriedades também são herdadas de Φ_{k-1}: temos $\bar{g}(u) = 1$ se e só se $|u| < k$; se $u \in A^+$ e $|u| \geq k$ então $|\bar{g}(u)| = |u| - k + 1$; e $u \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V} \setminus A^+$ se e só se $\bar{g}(u) \in \overline{\Omega}_B \mathsf{V} \setminus B^+$.

Consideremos uma codificação $G = g^{[-k,l]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ entre dois sistemas simbólicos. Dados $n \geq l$ e $m \geq k$, consideremos a função $h : A^{m+n+1} \to B$ definida por

$$h(a_{-m}a_{-m+1} \cdots a_{n-1}a_n) = g(a_{-k}a_{-k+1} \cdots a_{l-1}a_l), \text{ com } a_i \in A.$$

Então h é uma função de blocos de G com memória m e antecipação n. Em particular, para qualquer codificação entre sistemas simbólicos, podemos sempre escolher uma função de blocos com memória e antecipação iguais. De agora em diante vamos quase sempre usar este facto, pois a redução dos parâmetros memória e antecipação num só parâmetro é uma simplificação vantajosa para várias demonstrações. Compreende-se assim o interesse da observação seguinte.

Observação 3.28. Sejam S um subsemigrupo de $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$, T um semigrupo e $\psi : \overline{\Omega}_A \mathsf{V} \to T^1$ um morfismo de sobreposição de janela $2k+1$. Vamos adoptar a convenção de que ψ envia a palavra vazia no elemento neutro de T^1. Então

$$\psi(uv) = \psi(u\mathrm{i}_k(v)) \cdot \psi(\mathrm{t}_k(u)v), \text{ para quaisquer } u, v \in S^1.$$

Justificação. Com efeito, se $|u| < k$ então $|u\mathrm{i}_k(v)| < 2k$, pelo que $\psi(u\mathrm{i}_k(v)) = 1$ e $\psi(uv) = \psi(\mathrm{t}_k(u)v) = \psi(u\mathrm{i}_k(v)) \cdot \psi(\mathrm{t}_k(u)v)$. O caso $|v| < k$ é análogo. Finalmente, se $u = u_1u_2$ e $v = v_1v_2$ com $u_i, v_i \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{V})^1$ e $|u_2| = |v_1| = k$ então

$$\begin{aligned}
\psi(uv) &= \psi(u_1 \cdot u_2v_1v_2) \\
&= \psi(u_1\mathrm{i}_{2k}(u_2v_1v_2)) \cdot \psi(u_2v_1v_2) \\
&= \psi(u_1u_2v_1) \cdot \psi(\mathrm{t}_k(u)v) \\
&= \psi(u\mathrm{i}_k(v)) \cdot \psi(\mathrm{t}_k(u)v),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Lema 3.29. *Seja $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma codificação entre dois sistemas simbólicos. Temos:*

1. $\bar{g}(L_n(\mathcal{X})) \subseteq L_{n-2k}(\mathcal{Y})$ *para qualquer* $n > 2k$;
2. $\bar{g}(\overline{L(\mathcal{X})}) \subseteq \overline{L(\mathcal{Y})} \cup \{1\}$;
3. $\bar{g}(\mathscr{S}(\mathcal{X})) \subseteq \mathscr{S}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$;
4. $\bar{g}(\mathscr{M}_n(\mathcal{X})) \subseteq \mathscr{M}_{n-2k}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$ *para qualquer* $n > 2k$;
5. $\bar{g}(\mathscr{M}(\mathcal{X})) \subseteq \mathscr{M}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$.

Demonstração. Se $u \in L_n(\mathcal{X})$ então $u = x_{[1,n]}$ para algum $x \in \mathcal{X}$. Se $n < 2k+1$ então $\bar{g}(u) = 1$. Seja $y = G(x)$. Se $n \geq 2k+1$ então $y_{[k+1,n-k]} = \bar{g}(u)$, logo $\bar{g}(u) \in L_{n-2k}(\mathcal{Y})$. Isto mostra o item (1), do qual se deduz o seguinte:

$$\bar{g}(L(\mathcal{X})) = \bigcup_{n \geq 1} \bar{g}(L_n(\mathcal{X})) \subseteq \bigcup_{n \geq 2k+1} L_{n-2k}(\mathcal{Y}) \cup \{1\} = L(\mathcal{Y}) \cup \{1\}.$$

Então (2) segue da continuidade de $\bar{g}$, e (3) segue de (2) e do Lema 1.56 (1).

Seja $x = x_1 \cdots x_m \in \mathscr{M}_n(\mathcal{X}) \cap A^+$, com $x_i \in A$. Se $m < n$ então $\bar{g}(x)$ é uma palavra de comprimento menor do que $n-2k$. As palavras de tal comprimento pertencem ao conjunto $\mathscr{M}_{n-2k}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$. Suponhamos que $m \geq n$. Seja w um factor de comprimento $n-2k$ de $\bar{g}(x)$. Então $\bar{g}(x) = pwq$ para alguns $p, q \in B^*$. Sejam r e s os comprimentos de p e q, respectivamente. Então:

$$pwq = \bar{g}(x) = \bar{g}(x_{[1,2k+r]}) \cdot \bar{g}(x_{[r+1,m-s]}) \cdot \bar{g}(x_{[m-s+1-2k,m]}).$$

Uma vez que $|\bar{g}(x_{[1,2k+r]})| = r$ e $|\bar{g}(x_{[m-s+1-2k,m]})| = s$, temos $p = \bar{g}(x_{[1,2k+r]})$, $q = \bar{g}(x_{[m-s-1-2k,m]})$ e $w = \bar{g}(x_{[r+1,m-s]})$. Logo $|x_{[r+1,m-s]}| = |w| + 2k = n$ e portanto $x_{[r+1,m-s]} \in L_n(\mathcal{X})$. Do item (1) segue que $w \in L_{n-2k}(\mathcal{Y})$. Logo $\bar{g}(x) \in \mathscr{M}_{n-2k}(\mathcal{Y})$. Isto mostra que $\bar{g}(\mathscr{M}_n(\mathcal{X}) \cap A^+) \subseteq \mathscr{M}_{n-2k}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$. Portanto $\bar{g}(\mathscr{M}_n(\mathcal{X})) \subseteq \mathscr{M}_{n-2k}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$ pois A^+ é denso no espaço compacto $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, e $\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$ e $\mathscr{M}_{n-2k}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$ são aberto-fechados.

Do item (4) deduzimos o seguinte:

$$\bar{g}(\mathscr{M}(\mathcal{X})) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \bar{g}(\mathscr{M}_n(\mathcal{X})) \subseteq \bigcap_{n \geq 2k+1} \mathscr{M}_{n-2k}(\mathcal{Y}) \cup \{1\} = \mathscr{M}(\mathcal{Y}) \cup \{1\},$$

Isto mostra (5). □

O lema seguinte e os seus dois corolários são cruciais uma vez que constituem ferramentas básicas a serem usadas nesta monografia.

Lema 3.30. *Seja $G : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma codificação entre dois sistemas simbólicos. Suponhamos que $G = g_1^{[-k,k]} = g_2^{[-l,l]}$ e que $k \geq l$. Seja u um elemento de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ de comprimento maior ou igual a $2k+1$. Sejam $r = \mathrm{i}_{k-l}(\bar{g}_2(u))$ e $s = \mathrm{t}_{k-l}(\bar{g}_2(u))$. Se $u \in \mathscr{M}_{2k+1}(\mathcal{X})$ então $\bar{g}_2(u) = r\bar{g}_1(u)s$.*

Demonstração. Se $x \in \mathcal{X}$ então $g_1(x_{[-k,k]}) = g_2(x_{[-l,l]})$. Cada elemento de $L_{2k+1}(\mathcal{X})$ é da forma $x_{[-k,k]}$ para algum $x \in \mathcal{X}$. Logo,

$$\text{se } pwq \in L_{2k+1}(\mathcal{X}) \text{ e } |p| = |q| = k-l \text{ então } g_1(pwq) = g_2(w). \tag{3.6}$$

Uma vez que u pertence ao conjunto aberto $\mathscr{M}_{2k+1}(\mathcal{X})$ e $|u| \geq 2k+1$, existe uma sucessão $(u_n)_n$ de elementos de $A^+ \cap \mathscr{M}_{2k+1}(\mathcal{X})$ convergente para u e tal que todos os seus elementos têm comprimento maior do que $2k$. Seja $u_n = z_1 \ldots z_t$, com $z_i \in A$. Então,

$$\begin{aligned}
\bar{g}_2(u_n) &= \underbrace{\prod_{i=1}^{k-l} g_2(z_{[i,i+2l]})}_{r_n} \prod_{i=k-l+1}^{t-k-l} g_2(z_{[i,i+2l]}) \underbrace{\prod_{i=t-k-l+1}^{t-2l} g_2(z_{[i,i+2l]})}_{s_n} \\
&= r_n \prod_{i=1}^{t-2k} g_2(z_{[i+k-l,i+k+l]}) s_n \\
&= r_n \prod_{i=1}^{t-2k} g_1(z_{[i,i+2k]}) s_n \quad (\text{por } (3.6)) \\
&= r_n \bar{g}_1(u_n) s_n.
\end{aligned}$$

Temos $r_n = \mathrm{i}_{k-l}(\bar{g}_2(u_n))$ e $s_n = \mathrm{t}_{k-l}(\bar{g}_2(u_n))$. Logo $\bar{g}_2(u) = r\bar{g}_1(u)s$, pois i_{k-l}, t_{k-l} e $\bar{g}_i$ são funções contínuas. □

Corolário 3.31. *Seja* $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ *uma conjugação, e seja* $H = h^{[-l,l]} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ *a sua inversa. Consideremos um elemento* u *de* $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$ *com comprimento maior ou igual a* $2k+2l+1$. *Se* $u \in \mathscr{M}_{2k+2l+1}(\mathcal{X})$ *então* $u = \mathrm{i}_{k+l}(u)\bar{h}\bar{g}(u)\mathrm{t}_{k+l}(u)$.

Demonstração. Seja f a função que associa a cada elemento de $A^{2k+2l+1}$ a letra $h\bar{g}(u)$. Então $H \circ G = f^{[-(k+l),k+l]} = \mathrm{Id}^{[0,0]}$ e $\bar{f} = \bar{h}\bar{g}$. O resultado segue da aplicação do Lema 3.30 com $g_1 = f^{[-(k+l),k+l]}$ e $g_2 = \mathrm{Id}^{[0,0]}$. $\square$

Corolário 3.32. *Seja* $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ *uma conjugação e seja* $H = h^{[-l,l]} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ *a sua inversa. Consideremos um elemento* v *de* $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$. *Se* r *e* s *são palavras de comprimento* $k+l$ *tais que* $rvs \in \mathscr{M}_{2k+2l+1}(\mathcal{X})$ *então* $v = \bar{h}\bar{g}(rvs)$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.31 temos $rvs = r\bar{h}\bar{g}(rvs)s$, donde $v = \bar{h}\bar{g}(rvs)$ pelo Proposição 1.60. $\square$

O lema seguinte fornece uma ferramenta para lidarmos com os elementos da miragem que são limitados por idempotentes.

Lema 3.33. *Seja* $G = g^{[0,0]} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *uma conjugação unitária. Seja* $k \geq 0$ *tal que* G^{-1} *tem uma função de blocos com memória e antecipação* k. *Consideremos idempotentes* e *e* f *de* $\mathscr{M}(\mathcal{X})$. *Sejam* $\varepsilon = \bar{g}(e)$ *e* $\phi = \bar{g}(f)$. *Suponhamos que* v *é um elemento de* $\mathscr{M}(\mathcal{Y})$ *tal que* $v = \varepsilon v \phi$. *Seja* $w = \bar{h}\big[\mathrm{t}_k(\varepsilon) v\, \mathrm{i}_k(\phi)\big]$. *Então* w *é um elemento de* $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ *tal que* $\bar{g}(w) = v$ *e* $w = ewf$.

Demonstração. A função $\bar{g}$ é um homomorfismo, logo ε e ϕ são idempotentes. Pelo Lema 1.62, $\mathrm{t}_k(\varepsilon) v\, \mathrm{i}_k(\phi)$ é $\mathcal{J}$-equivalente a v, e portanto também pertence a $\mathscr{M}(\mathcal{Y})$. Logo $w \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$ pelo Lema 3.29. Então $\bar{g}(w) = v$ pelo Corolário 3.32. Temos a seguinte cadeia de igualdades:

$$\begin{aligned} w &= \bar{h}\big[\mathrm{t}_k(\varepsilon)\, \varepsilon \cdot \varepsilon v \phi \cdot \phi\, \mathrm{i}_k(\phi)\big] \\ &= \bar{h}\big[\mathrm{t}_k(\varepsilon)\, \varepsilon\, \mathrm{i}_k(\varepsilon)\big] \cdot \bar{h}\big[\mathrm{t}_k(\varepsilon)\, \varepsilon v \phi\, \mathrm{i}_k(\phi)\big] \cdot \bar{h}\big[\mathrm{t}_k(\phi)\, \phi\, \mathrm{i}_k(\phi)\big] \\ &= \bar{h}\big[\mathrm{t}_k(\varepsilon)\, \varepsilon\, \mathrm{i}_k(\varepsilon)\big] \cdot w \cdot \bar{h}\big[\mathrm{t}_k(\phi)\, \phi\, \mathrm{i}_k(\phi)\big]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\bar{g}$ é um homomorfismo, temos

$$w = \bar{h}\bar{g}\big[\mathrm{t}_k(e) e\, \mathrm{i}_k(e)\big] \cdot w \cdot \bar{h}\bar{g}\big[\mathrm{t}_k(f) f\, \mathrm{i}_k(f)\big]. \tag{3.7}$$

Novamente pelo Lema 1.62, as pseudopalavras e e $\mathrm{t}_k(e) e\, \mathrm{i}_k(e)$ são $\mathcal{J}$-equivalentes, e portanto elas estão ambas em $\mathscr{M}(\mathcal{X})$. Pela mesma razão $\mathrm{t}_k(f) f\, \mathrm{i}_k(f)$ pertence a $\mathscr{M}(\mathcal{X})$. Temos $\bar{h}\bar{g}\big[\mathrm{t}_k(e) e\, \mathrm{i}_k(e)\big] = e$ e $\bar{h}\bar{g}\big[\mathrm{t}_k(f) f\, \mathrm{i}_k(f)\big] = f$ pelo Corolário 3.32. Logo por (3.7) concluímos que $w = ewf$. $\square$

3.4 Um conjunto parcialmente ordenado definido pela miragem

A expressão *conjunto parcialmente ordenado* será abreviada pela sigla *CPO*. Seja S um semigrupo. Se T é uma união de $\mathcal{J}$-classes de S então denotamos por $T^{\dagger}$ o CPO definido do seguinte modo: os elementos de $T^{\dagger}$ são as $\mathcal{J}$-classes de S que contêm elementos limitados por idempotentes e que estão contidas em T; a ordem parcial de $T^{\dagger}$ é a ordem induzida pela quasi-ordem $\leq_{\mathcal{J}}$. Convém recordar que uma $\mathcal{J}$-classe que contém elementos limitados por idempotentes pode também ter elementos que não são limitados por idempotentes

(Exemplo 1.29). Por outro lado, num semigrupo compacto uma $\mathcal{J}$-classe contém elementos limitados por idempotentes se e só se todos os seus elementos são limitados por idempotentes (Lema 1.28). Recordemos também que uma $\mathcal{J}$-classe de um semigrupo compacto que contém elementos limitados por idempotentes diz-se uma *$\mathcal{J}$-classe limitada por idempotentes.*

Seja G uma codificação de um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ num sistema simbólico $\mathcal{Y}$ de $B^{\mathbb{Z}}$. Seja g uma função de blocos de G. Se J é uma $\mathcal{J}$-classe de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ então todos os elementos de $\bar{g}(J)$ pertencem à mesma $\mathcal{J}$-classe de $(\overline{\Omega}_B\mathsf{V})^1$, pelo Lema 1.56. Além disso, se J está contida em $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ e é limitada por idempotentes, então $[\bar{g}(J)]_{\mathcal{J}}$ também está contida em $\mathscr{M}(\mathcal{Y})$ e é limitada por idempotentes, pelos Lemas 3.29 e 1.56. Podemos portanto definir a função $G^\dagger$ de $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ em $\mathscr{M}(\mathcal{Y})^\dagger$ que envia J em $[\bar{g}(J)]_{\mathcal{J}}$. A função $G^\dagger$ preserva a ordem, pelo Lema 1.56.

Lema 3.34. *A função $G^\dagger$ não depende da escolha da função de blocos de G.*

Demonstração. Suponhamos que $G = g_1^{[-k,k]} = g_2^{[-l,l]}$ e que $k \geq l$. Dado um elemento J de $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$, seja u um elemento de J. Então u é limitado por idempotentes, pela definição de $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$. Logo $\bar{g}_2(u)$ é limitado por idempotentes, pelo Lema 1.56. Pelo Lema 3.30, existem palavras r e s de comprimento $k-l$ tais que $\bar{g}_2(u) = r\bar{g}_1(u)s$. Pelo Lema 1.61, as pseudopalavras $\bar{g}_1(u)$ e $\bar{g}_2(u)$ são $\mathcal{J}$-equivalentes. □

Proposição 3.35. *Sejam $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $H : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ codificações entre sistemas simbólicos. Então $H^\dagger \circ G^\dagger = (H \circ G)^\dagger$. Além disso, $(\mathrm{Id}_{\mathcal{X}})^\dagger = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger}$.*

Demonstração. É claro que $(\mathrm{Id}_{\mathcal{X}})^\dagger = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger}$.

Sejam $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $H = g^{[-l,l]} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ codificações em que $\mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{Z} \subseteq C^{\mathbb{Z}}$. Seja f a função que a cada elemento u de $A^{2k+2l+1}$ associa a letra $h\bar{g}(u)$. Então $f^{[-(k+l),k+l]}$ é uma função de blocos de $H \circ G$ com memória e antecipação $k+l$, e $\bar{f} = \bar{h} \circ \bar{g}$. Portanto se J é uma $\mathcal{J}$-classe limitada por idempotentes que está contida em $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ então

$$H^\dagger(G^\dagger(J)) = H^\dagger([\bar{g}(J)]_{\mathcal{J}}) = [\bar{h}(\bar{g}(J))]_{\mathcal{J}} = [\bar{f}(J)]_{\mathcal{J}} = (H \circ G)^\dagger(J).$$

Logo $H^\dagger \circ G^\dagger = (H \circ G)^\dagger$. □

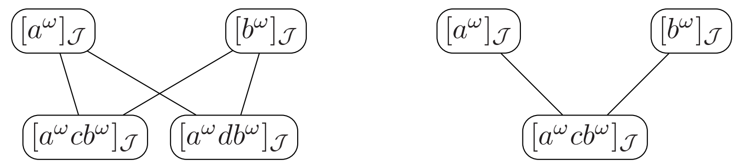
Corolário 3.36. *Os CPO $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ e $\mathscr{S}(\mathcal{X})^\dagger$ são invariantes de conjugação.*

Demonstração. Para qualquer codificação $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ temos $G^\dagger(\mathscr{S}(\mathcal{X})^\dagger) \subseteq \mathscr{S}(\mathcal{Y})^\dagger$, pelo Lema 3.29. Pela Proposição 3.35 se G é uma conjugação então $G^\dagger$ é um isomorfismo de CPO (com $(G^\dagger)^{-1} = (G^{-1})^\dagger$). □

Reparemos que $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger = (\mathscr{M}(\mathcal{X}) \setminus A^+)^\dagger$, uma vez que as pseudopalavras módulo V que são limitadas por idempotentes de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ são infinitas. Reparemos também que se $\mathcal{X}$ é minimal então $\mathscr{S}(\mathcal{X})^\dagger$ tem um único elemento, pelo Teorema 3.24. Veremos mais tarde que $\mathscr{S}(\mathcal{X})^\dagger = \mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ quando $\mathcal{X}$ é minimal (Teorema 5.31, na página 134).

Exemplo 3.37. Consideremos os seguintes sistemas simbólicos:

Como em cada um dos grafos cada etiqueta aparece uma única vez, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são sistemas simbólicos de arestas, logo de tipo finito. Portanto $\mathscr{M}(\mathcal{X}) = \overline{L(\mathcal{X})}$ e $\mathscr{M}(\mathcal{Y}) = \overline{L(\mathcal{Y})}$. Os CPO $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ e $\mathscr{M}(\mathcal{Y})^\dagger$ têm a seguinte representação:



Logo $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ não são conjugados, uma vez que $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ e $\mathscr{M}(\mathcal{Y})^\dagger$ não são isomorfos. Reparemos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ têm o mesmo conjunto de pontos periódicos, que são os pontos fixos. Em [LM96, Secção 7.4] encontra-se definido um invariante de conjugação ulterior de sistemas simbólicos de tipo quase finito designado *grupo de Bowen-Franks*. Por cálculo directo, podemos verificar que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ não têm grupos de Bowen-Franks distintos.

O Exemplo 3.37 é atípico. De acordo com a Proposição 3.23, o CPO $\mathscr{S}(\mathcal{X})^\dagger$ é pelo menos tão intrincado como o CPO dos sistemas simbólicos irredutíveis nele contidos. Por exemplo, os sistemas sóficos de entropia positiva contêm uma infinidade de sistemas simbólicos minimais finitos (cf. [LM96, Exercícios 4.4.3 e 6.3.1]).

Um *CPO compacto* é um CPO munido de uma topologia compacta para a qual a relação de ordem é topologicamente fechada. Um *CPO profinito* é um CPO compacto C tal que para qualquer par de elementos distintos u e v de C, existe um homomorfismo de CPO contínuo φ de C num CPO finito F tal que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Proposição 3.38. *O CPO $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J}$ é profinito.*

Demonstração. Como a relação $\mathcal{J}$ é fechada em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, o espaço quociente $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J}$ é compacto, pela Proposição 1.4.

Suponhamos que $J^{(1)}$ e $J^{(2)}$ são duas $\mathcal{J}$-classes distintas de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J}$. De acordo com [Alm95, Corolário 5.6.2], dois elementos u e v de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ são $\mathcal{J}$-equivalentes se e só se, para todo o homomorfismo contínuo sobrejectivo ψ entre $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e um semigrupo de V, as imagens $\psi(u)$ e $\psi(v)$ são $\mathcal{J}$-equivalentes. Então, dados $u_1 \in J^{(1)}$ e $u_2 \in J^{(2)}$, existe um homomorfismo contínuo sobrejectivo φ entre $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e um semigrupo finito S tal que $\varphi(u_1)$ e $\varphi(u_2)$ não são $\mathcal{J}$-equivalentes. Como os homomorfismos de semigrupos preservam a $\mathcal{J}$-ordem, a função

$$\begin{array}{rrcl} \varphi' : & \overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J} & \to & S/\mathcal{J} \\ & J & \mapsto & [\varphi(J)]_\mathcal{J}. \end{array}$$

é um homomorfismo bem definido de CPO tal que $\varphi'(J^{(1)}) \neq \varphi'(J^{(2)})$. Resta-nos verificar que φ' é uma função continua. O Diagrama (3.8) é comutativo, onde $[\cdot]_\mathcal{J}$ denota as correspondentes funções quocientes.

$$\begin{tikzcd} \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\cdot]_\mathcal{J}}"'] & S \arrow[d, "{[\cdot]_\mathcal{J}}"] \\ \overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J} \arrow[r, "\varphi'"] & S/\mathcal{J} \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Como as referidas funções quocientes e φ são contínuas, conclui-se pelo Teorema 1.6 que φ' é contínua. $\square$

Corolário 3.39. *O CPO $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ é profinito.*

Demonstração. O CPO $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ é um subconjunto de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J}$ munido da restrição da ordem parcial de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J}$. Como $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J}$ é um CPO profinito, apenas temos que verificar que $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ é compacto. Ora $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$ é a imagem do conjunto

$$F = \mathscr{M}(\mathcal{X}) \cap \{u \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \mid u \text{ é limitado por idempotentes}\}$$

pela função quociente $\overline{\Omega}_A\mathsf{V} \to \overline{\Omega}_A\mathsf{V}/\mathcal{J}$, a qual é contínua. Ora F é fechado. □

Os grupos de Schützenberger na miragem

Proposição 3.40. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sistemas simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ e $B^{\mathbb{Z}}$, respectivamente. Seja $G = g^{[0,0]} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma codificação unitária. Seja U uma $\mathcal{H}$-classe limitada por idempotentes de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e contida em $\mathscr{M}(\mathcal{X})$. Consideremos a $\mathcal{H}$-classe V de $\overline{\Omega}_B\mathsf{V}$ que contém $\bar{g}(U)$. Então os grupos de Schützenberger de U e de V são grupos compactos isomorfos.*

Demonstração. O leitor deve ter presente ao longo da demonstração que $\bar{g}$ é um homomorfismo. Seja $\eta : U \to V$ a restrição de $\bar{g}$ a U. Vamos mostrar que η é um isomorfismo.

Fixemos um elemento u de U, e sejam e e f idempotentes de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tais que $u = euf$. Seja h uma função de blocos tal que $G^{-1} = h^{[-k,k]}$. Se w é um elemento de U então $w = ewf$ e portanto $w = \mathrm{i}_k(e)\bar{h}\bar{g}(w)\mathrm{t}_k(f)$, pelo Corolário 3.31. Logo η é injectiva.

Seja $v \in V$. Então existe $y \in \overline{\Omega}_B\mathsf{V}$ tal que $v = \bar{g}(u)y$ e $y = \bar{g}(f)\, y\, \bar{g}(f)$. Como $u \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$, temos $\bar{g}(u) \in \mathscr{M}(\mathcal{Y})$ pelo Lema 3.29. Logo $v, y \in \mathscr{M}(\mathcal{Y})$, uma vez que v e y são factores de $\bar{g}(u)$. Pelo Lema 3.33 existe $x \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$ tal que $\bar{g}(x) = y$ e $x = fxf$. Logo $\bar{g}(ux) = v$, e $ux \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$ pelo Corolário 1.50. Dualmente, existe x' tal que $x' = ex'e$, $x'u \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$ e $\bar{g}(x'u) = v$. Como ux e $x'u$ são limitados pelos idempotentes e e f, pelo Corolário 3.31 temos

$$ux = \mathrm{i}_k(e)\bar{h}\bar{g}(ux)\mathrm{t}_k(f) = \mathrm{i}_k(e)\bar{h}(v)\mathrm{t}_k(f) = \mathrm{i}_k(e)\bar{h}\bar{g}(x'u)\mathrm{t}_k(f) = x'u.$$

Temos $G^\dagger[ux]_{\mathcal{J}} = [v]_{\mathcal{J}} = G^\dagger[u]_{\mathcal{J}}$. Portanto ux e u são $\mathcal{J}$-equivalentes, uma vez que $G^\dagger$ é uma função bijectiva. Além disso, ux e u são $\mathcal{H}$-equivalentes porque $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é estável e $ux = x'u$. Logo $ux \in U$. Isto mostra que $\eta(U) = V$, pelo que η é um isomorfismo entre U e V.

Nos termos da notação introduzida na Secção 1.4, a correspondência

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma(U) &\to \Gamma(V) \\ \xi_U(x) &\mapsto \xi_V[\bar{g}(x)],\ x \in T(U). \end{aligned}$$

é uma função bem definida. Seja y um qualquer elemento de $T(V)$. Uma vez que η é sobrejectiva existe $z \in T(U)$ tal que $\bar{g}(u)y = \bar{g}(uz)$. Portanto $\xi_V(y) = \xi_V[\bar{g}(z)]$, pelo que ψ é sobrejectiva. A injectividade de ψ também segue facilmente da injectividade de η. □

Um *CPO etiquetado* é um CPO em que cada elemento é etiquetado por um elemento de uma certa classe. Um morfismo entre dois CPO etiquetados $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ é uma função $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ que preserva a ordem e deixa as etiquetas inalteradas.

Para uma $\mathcal{J}$-classe J de um semigrupo compacto S definimos o par ordenado $(\epsilon_J, \mathscr{G}_J)$ do modo que segue: o símbolo ϵ_J é igual a 1 se J é regular, e é igual a 0 caso contrário; em ambos os casos $\mathscr{G}_J$ é a classe de isomorfismo (no sentido algébrico-topológico) do grupo de Schützenberger de J. Se T é uma união de $\mathcal{J}$-classes de S então denotamos por $T^\dagger_\times$ o CPO etiquetado que resulta de $T^\dagger$ pela atribuição da etiqueta $(\epsilon_J, \mathscr{G}_J)$ a cada $\mathcal{J}$-classe J que seja elemento de $T^\dagger$.

Teorema 3.41. *Os CPO etiquetados $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger_\times$ e $\mathscr{S}(\mathcal{X})^\dagger_\times$ são invariantes de conjugação.*

Demonstração. Seja $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma conjugação entre sistemas simbólicos. Pela Proposição 3.35, a função $G^\dagger : \mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger \to \mathscr{M}(\mathcal{Y})^\dagger$ é um isomorfismo de CPO. Além disso, $G^\dagger(\mathscr{S}(\mathcal{X})) = \mathscr{S}(\mathcal{Y})$. Falta mostrar que $G^\dagger$ preserva as etiquetas.

Pelo Lema 1.56 as funções $G^\dagger$ e $(G^{-1})^\dagger$ enviam $\mathcal{J}$-classes regulares em $\mathcal{J}$-classes regulares. Além disso, $(G^{-1})^\dagger = (G^\dagger)^{-1}$, pela Proposição 3.35. Portanto $G^\dagger$ envia $\mathcal{J}$-classes não regulares em $\mathcal{J}$-classes não regulares. Logo $G^\dagger$ preserva as etiquetas ϵ_J.

Pela Proposição 2.8 existem conjugações unitárias G_1 e G_2 tais que $G = G_2 \circ G_1^{-1}$. Seja K um elemento de $\mathscr{M}(\mathcal{X})^\dagger$. Pela Proposição 3.40 o grupo de Schützenberger de $(G_1^{-1})^\dagger(K)$ é isomorfo aos grupos de Schützenberger de $G_1^\dagger \circ (G_1^{-1})^\dagger(K)$ e de $G_2^\dagger \circ (G_1^{-1})^\dagger(K)$. Pela Proposição 3.35, temos $G_1^\dagger \circ (G_1^{-1})^\dagger(K) = K$ e $G_2^\dagger \circ (G_1^{-1})^\dagger(K) = G^\dagger(K)$. □

Corolário 3.42. *Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico irredutível então o grupo de Schützenberger de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ é um invariante de conjugação algébrico-topológico.*

Em [Alm05a] o grupo de Schützenberger de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ foi calculado para diversas classes de sistemas minimais. A título exemplificativo, vamos mencionar alguns desses resultados. Mas antes vamos considerar o caso mais simples dos sistemas minimais com um número finito de elementos. Um sistema simbólico é minimal e com um número finito de elementos se e só se é a órbita de uma sequência da forma u^∞ com u uma palavra primitiva de A^+ (uma palavra v é *primitiva* se $v = w^n \Rightarrow n = 1$). Nesse caso, $\mathfrak{J}(\mathcal{O}(u^\infty))$ é a $\mathcal{J}$-classe de u^ω. O grupo de Schützenberger de u^ω é gerado por $u^{\omega+1}$ e é isomorfo ao ideal mínimo de $\overline{\Omega}_1\mathsf{V}$ ([AV06, Teorema 7.5] e sua demonstração).

Passemos aos sistemas simbólicos minimais com um número infinito de elementos; note-se que tais sistemas não contêm órbitas periódicas. Para um enquadramento sobre sistemas minimais, e em especial sobre aqueles que vamos mencionar, remetemos para a síntese [LM96, Secção 13.7] e para [Lot02, BFMS01]. Dado um sistema simbólico $\mathcal{X}$, um elemento u de $L(\mathcal{X})$ diz-se um *factor especial à direita (com grau k)* se $uA \cap L(\mathcal{X})$ tiver mais do que um elemento (tiver k elementos). Define-se dualmente a noção de *factor especial à direita (com grau k)*. Um *sistema de Arnoux-Rauzy de grau k* é um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^\mathbb{Z}$, com $|A| = k$, tal que $L_n(\mathcal{X})$, para qualquer n, tem exactamente um factor especial à direita, e um factor especial à esquerda, ambos de grau $|A|$. Um sistema de Arnoux-Rauzy de grau dois diz-se *Sturmiano*. A classe dos sistemas Sturmianos tem merecido uma especial atenção.

Teorema 3.43 ([Alm05a])**.** *Consideremos a pseudovariedade* S *dos semigrupos finitos. Se $\mathcal{X}$ é um sistema de Arnoux-Rauzy de grau n então o grupo de Schützenberger de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ é isomorfo a $\overline{\Omega}_n\mathsf{G}$.*

Um endomorfismo de A^+ fica completamente determinado pelo sua restrição a A. Se $a_1, \dots, a_n$ forem as letras de A, então $\varphi = [u_1, \dots, u_n]$ significa que $\varphi(a_i) = u_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Em geral usa-se a ordem alfabética. Por exemplo, $\psi = [ab, a]$ significa que $\psi(a) = ab$ e $\psi(b) = a$. Na literatura sobre sistemas simbólicos, os endomorfismos de A^+ denominam-se habitualmente *substituições em A*. Por exemplo, $[ab, a]$ é conhecida como *substituição de Fibonacci.* Uma substituição φ em A diz-se *primitiva* se $\varphi(A) \nsubseteq A$ e se existir algum inteiro positivo n tal que $L_1(\varphi^n(a)) = A$ para qualquer $a \in A$. Por exemplo, $\psi = [ab, a]$ é uma substituição primitiva, pois $L_1(\psi^2(a)) = L_1(\psi^2(b)) = \{a, b\}$. Se φ é uma substituição primitiva, então o conjunto $\bigcup_{n \geq 1} L(\varphi^n(a))$ não depende da letra a e é uniformemente recorrente, definindo-se deste modo um sistema simbólico minimal $\mathcal{X}_\varphi$. O sistema $\mathcal{X}_\varphi$ tem entropia nula. O sistema $\mathcal{X}_\varphi$ é Sturmiano se e só se $\varphi(A)$ for um conjunto gerador do grupo $\Omega_A \mathsf{G}$. Por exemplo, $\mathcal{X}_{[ab,a^2b]}$ é Sturmiano, porque $a = (a^2b)(ab)^{-1}$ e $b = a^{-1}(ab)$. Logo o grupo de Schützenberger de $\mathfrak{J}(\mathcal{X}_{[ab,a^2b]})$ é isomorfo a $\overline{\Omega}_A \mathsf{G}$, pelo Teorema 3.43.

Proposição 3.44 ([Alm05a])**.** *Consideremos a pseudovariedade* S *dos semigrupos finitos. O grupo de Schützenberger de* $\mathfrak{J}(\mathcal{X}_{[ab,a^3b]})$ *é algébrica-topologicamente gerado por dois elementos, mas não é isomorfo a* $\overline{\Omega}_n \mathsf{G}$*, para qualquer inteiro positivo* n*.*

Capítulo 4

Semigrupóides profinitos relativamente livres

Num artigo de importância capital [Til87], Tilson defendeu de forma absolutamente convincente que se deveriam encarar as categorias (pequenas) de um ponto de vista algébrico, como generalizações de monóides, e utilizar este ponto de vista para resolver questões do âmbito da teoria dos semigrupos finitos. Paralelamente propôs a noção de semigrupóide (*grosso modo* uma categoria sem identidades) como a generalização correspondente para os semigrupos. Nesse artigo, Tilson desenvolveu as bases de uma teoria consistente e várias ferramentas úteis. De entre estas, a que talvez mereça mais destaque seja a noção de categoria derivada, que se constatou ser fundamental para o estudo do produto semi-directo de pseudovariedades de semigrupos ou de monóides. A noção de categoria derivada em tal contexto remete para a noção de divisão de categorias e de pseudovariedade de categorias, que fazem parte da teoria desenvolvida em [Til87]. No entanto em [Til87] ainda não é feita qualquer referência a categorias profinitas relativamente livres, nem sequer a qualquer tipo de categorias topológicas.

Cerca de uma década mais tarde, de forma independente, Jones por um lado [Jon96a], Almeida e Weil por outro [AW98], haveriam de generalizar os fundamentos da teoria dos monóides/semigrupos profinitos para categorias/semigrupóides profinitos, com destaque para os relativamente livres. Em [AW98] esta teoria encontrou uma aplicação importante, o chamado "Teorema da Base". Na verdade, constatou-se mais tarde que a sua demonstração continha um erro. Expurgando a demonstração desse erro, ainda assim obtém-se um resultado de grande alcance. A versão que inicialmente se julgava demonstrada permanece como um problema em aberto; se for verdadeira poderá ser essencial para a resolução do problema da complexidade de Krohn-Rhodes, um dos mais famosos da área dos semigrupos finitos (ver Apêndice C). Veja-se [Wei02] ou [Alm05b] para uma exposição sobre a complexidade de Krohn-Rhodes e a sua ligação com o "Teorema da Base".

Em [Jon96a], Jones concentrou a sua atenção em categorias e semigrupóides com um número finito de vértices. Em [AW98], Almeida e Weil procuraram evitar qualquer restrição sobre o número de vértices, tendo introduzido uma noção de semigrupóide relativamente livre gerado por um grafo profinito com um número de vértices eventualmente infinito. Contudo o autor deste trabalho detectou deficiências nessa noção (que são irrelevantes para os casos em que o número de vértices é finito), especialmente quando dela deriva a assumpção de que o semigrupóide livre gerado por um grafo profinito é denso no respectivo semigrupóide profinito livre. Com efeito, o autor descobriu um exemplo de um grafo profinito que gera um semigrupóide livre que não é denso em qualquer semigrupóide compacto que o contenha. Esse grafo é o grafo das órbitas de um sistema simbólico bastante simples. Reside aqui a diferença crucial com o caso em que o número de vértices é finito: enquanto que num semigrupóide com um número finito de vértices o fecho topológico de um subsemigrupóide gerado por um grafo é ele próprio um subsemigrupóide, tal não tem que acontecer quando o número de vértices é infinito. Outra dificuldade importante que escapou em [AW98] à atenção dos seus autores consiste em que a imagem homomorfa de um subsemigrupóide não tem que ser um subsemigrupóide, e que portanto por essa via não é possível garantir que um semigrupóide profinito com um número infinito de vértices seja um limite projectivo de semigrupóides finitos (ver Subsecção 4.4.2).

Neste capítulo recapitulamos a definição de semigrupóide profinito relativamente livre gerado por um grafo com um número finito de vértices; em seguida, motivados pelo exemplo de um grafo das órbitas de um sistema simbólico, construímos uma boa definição de semigrupóide profinito relativamente livre gerado por um grafo profinito com um número de vértices não necessariamente finito. Uma tarefa que esta monografia deixa como herança consistirá em avaliar o impacto desta nova definição, e dos problemas da definição anterior, nos artigos onde se obtêm resultados sobre semigrupos profinitos e pseudovariedades de semigrupos utilizando semigrupóides profinitos relativamente livres gerados por grafos profinitos com um número infinito de vértices; como exemplos de tais artigos, temos [AW98, AT01, RS02].

As referências principais sobre semigrupóides e categorias que sustentam as afirmações e resultados não originais deste capítulo são [Jon96a, AW98]. Em [Jon96a] a ênfase é posta nas categorias, mas conforme é aí assinalado, *mutatis mutandis* a quase totalidade dos resultados podem ser traduzidos para o universo dos semigrupóides. Os resultados originais foram obtidos em colaboração com Almeida.

4.1 Semigrupóides

Seja S um grafo não vazio. Consideremos o conjunto $D_S = \{(s,t) \in E_S \times E_S \mid \omega(s) = \alpha(t)\}$ dos pares de arestas consecutivas de S. Dizemos que S é um *semigrupóide* se o conjunto de arestas de S estiver munido de uma operação binária parcial (frequentemente denominada *composição*) com as seguintes propriedades:

1. para quaisquer arestas s e t, o produto $s \cdot t$ está definido se e só se $(s,t) \in D_S$;
2. se $(s,t) \in D_S$ então $\alpha(s \cdot t) = \alpha(s)$ e $\omega(s \cdot t) = \omega(t)$;
3. se $(s,t) \in D_S$ e $(t,r) \in D_S$ então $(s \cdot t) \cdot r = s \cdot (t \cdot r)$.

Um subgrafo T de um semigrupóide S é um *subsemigrupóide* de S se T for um semigrupóide cuja composição é a restrição da operação de S. Dado um subgrafo não vazio X do semigrupóide S, a intersecção de todos os subsemigrupóides de S que contêm X é um semigrupóide, denominado *subsemigrupóide de S gerado por X*, e denotado por $\langle X \rangle$. Reparemos que $V_{\langle X \rangle} = V_X$ e que

$$E_{\langle X \rangle} = \bigcup_{n \geq 1} \{s_1 \cdot s_2 \cdots s_{n-1} \cdot s_n \mid s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n \text{ são arestas consecutivas de } X\}. \quad (4.1)$$

Dados dois semigrupóides S e T, um *homomorfismo de semigrupóides* de S em T é um homomorfismo de grafos $\varphi : S \to T$ tal que $\varphi(s \cdot t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$ para qualquer $(s,t) \in D_S$. Se a restrição φ ao conjunto dos vértices de S for injectiva então para qualquer subsemigrupóide R de S o conjunto $\varphi(R)$ é um subsemigrupóide de T. No entanto, em geral $\varphi(S)$ não é um subsemigrupóide de T.

Exemplo 4.1. Consideremos os grafos S e T com as seguintes representações gráficas:

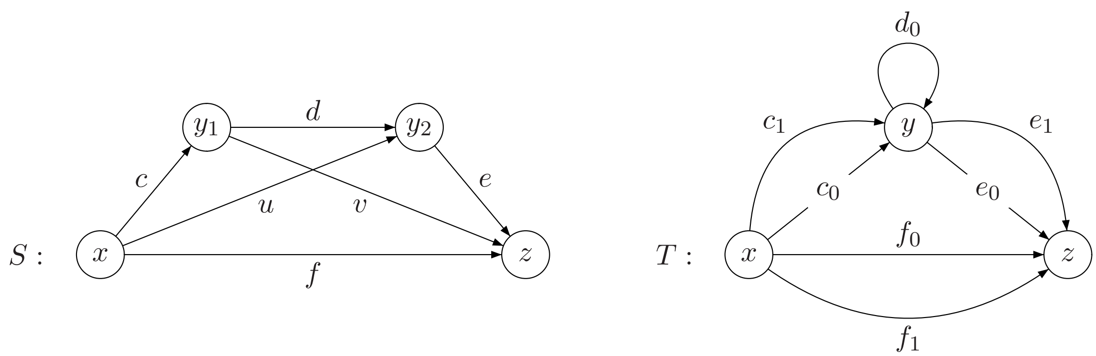
O conjunto D_S é vazio, logo S é um semigrupóide para a operação binária vazia. Por outro lado, $D_T = \{(d_1, d_2)\}$ e T é um semigrupóide para a operação $(d_1, d_2) \mapsto d_3$. Como $D_S = \emptyset$, qualquer homomorfismo de grafos entre S e T é um homomorfismo de semigrupóides. Por exemplo, a função $\varphi : S \to T$ definida pela tabela

s	x	y_1	y_2	z	c_1	c_2
$\varphi(s)$	x	y	y	z	d_1	d_2

é um homomorfismo de semigrupóides. O grafo $\varphi(S)$ não é um subsemigrupóide de T, pois $\varphi(c_1) \cdot \varphi(c_2) = d_1 \cdot d_2 = d_3 \notin \varphi(S)$.

Segue-se um exemplo mais interessante, em que em ambos os semigrupóides existem arestas consecutivas.

Exemplo 4.2. Consideremos os grafos S e T com as seguintes representações gráficas:



Consideremos em S a função $(s, t) \in D_S \mapsto s \cdot t \in E_S$ descrita pela seguinte tabela:

(s,t)	(c,d)	(c,v)	(d,e)	(u,e)
$s \cdot t$	u	f	v	f

O único caminho de comprimento três de S é cde. Ora $(c \cdot d) \cdot e = f = c \cdot (d \cdot e)$, pelo que a operação $\cdot$ confere a S uma estrutura de semigrupóide. Dados $i, j \in \{0, 1\}$, seja

$$\epsilon(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (1,1) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (1,1) \end{cases}$$

Consideremos em T a função $(s, t) \in D_T \mapsto s \cdot t \in E_T$ descrita pela seguinte tabela (onde $i, j \in \{0, 1\}$):

(s,t)	(c_i,d_0)	(d_0,d_0)	(d_0,e_i)	(c_i,e_j)
$s \cdot t$	c_0	d_0	e_0	$f_{\epsilon(i,j)}$

Analisando os caminhos de comprimento três de T, verificamos que a operação $\cdot$ confere a T uma estrutura de semigrupóide. Consideremos a função $\varphi : S \to T$ definida pela seguinte tabela:

s	x	y_1	y_2	z	c	d	e	u	v	f
$\varphi(s)$	x	y	y	z	c_1	d_0	e_1	c_0	e_0	f_0

Facilmente podemos verificar que φ é um homomorfismo de semigrupóides. O grafo $\varphi(S)$ não é um subsemigrupóide de T, pois $\varphi(c) \cdot \varphi(e) = c_1 \cdot e_1 = f_1 \notin \varphi(S)$.

Adoptaremos algumas simplificações. Assim, por exemplo, o produto $s \cdot t$ entre duas arestas consecutivas de um semigrupóide será denotado por st, sempre que ficar claro que não nos estamos a referir ao caminho constituído por s e t. Não havendo confusão, um homomorfismo de semigrupóides poderá ser designado simplesmente por *homomorfismo*.

Dado um conjunto C, ser-nos-á conveniente identificar C com o grafo $\mathrm{G}(C)$ que tem um único vértice x, o qual não pertence a C, e para o qual se tem $E_{\mathrm{G}(C)}(x,x) = C$. Desta forma, se H for um grafo, um homomorfismo de grafos de H em C será entendido como uma função de E_{H} em C. Do mesmo modo, um semigrupo S será identificado com o semigrupóide tendo $\mathrm{G}(S)$ como grafo subjacente e cuja composição coincide com a multiplicação de S. Reciprocamente, se T é um semigrupóide e se $E_T(x,x) \neq \emptyset$, então $E_T(x,x)$ é um semigrupo para a operação de composição, denominado *semigrupóide local de T em x*.

Seja Γ um grafo. O grafo Γ^+ é o grafo que tem os mesmos vértices que Γ e onde as arestas que começam num vértice x e acabam num vértice y são os caminhos de Γ que começam em x e acabam em y. Reparemos que Γ é um subgrafo de Γ^+. O grafo Γ^+ é um semigrupóide para a operação de concatenação de caminhos consecutivos. Dado um homomorfismo φ de grafos entre Γ e um semigrupóide S, denotamos por φ^+ a função entre Γ^+ e S definida do seguinte modo: a restrição de φ^+ a V_{Γ^+} coincide com a restrição de φ a V_Γ; um caminho $e_1 e_2 \ldots e_{n-1} e_n$ sobre Γ, em que $e_1, \ldots, e_n$ são arestas consecutivas, é enviado em $\varphi(e_1)\varphi(e_2)\cdots\varphi(e_{n-1})\varphi(e_n)$. A função φ^+ é um homomorfismo de semigrupóides, e é o único homomorfismo de semigrupóides entre Γ^+ e S que estende φ. O semigrupóide Γ^+ denomina-se *semigrupóide livre gerado por* Γ. Se Γ é um conjunto então Γ^+ é o semigrupo livre gerado por Γ, pelo que estas definições não são ambíguas.

Uma *congruência* sobre um semigrupóide S é uma relação de equivalência θ em S tal que,

1. se x é um vértice de S então $[x]_\theta = \{x\}$.
2. para quaisquer arestas s e t de S, se $s\ \theta\ t$ então s e t são arestas co-terminais;
3. para quaisquer arestas s, t e r de S, se $s\ \theta\ t$ e $\omega(r) = \alpha(s)$ então $rt\ \theta\ rt$;
4. para quaisquer arestas s, t e r de S, se $s\ \theta\ t$ e $\omega(s) = \alpha(r)$ então $sr\ \theta\ tr$.

Apenas as arestas interessam para a descrição de uma congruência. A relação que identifica entre si duas arestas precisamente quando elas são co-terminais define uma congruência, denominada *congruência de co-terminalidade*.

Se θ é uma congruência sobre o semigrupóide S então o quociente S/θ fica naturalmente munido de uma estrutura de semigrupóide para a qual a função

$$\begin{array}{rccc} q_\theta : & S & \to & S/\theta \\ & s & \mapsto & [s]_\theta \end{array}$$

é um homomorfismo quociente de semigrupóides. O núcleo de q_θ é θ. Se $\varphi : S \to T$ é um homomorfismo quociente de semigrupóides então $\operatorname{Ker}\varphi$ é uma congruência sobre S e a função

$$\begin{array}{rcl} S/\operatorname{Ker}\varphi & \to & T \\ [s]_{\operatorname{Ker}\varphi} & \mapsto & \varphi(s) \end{array}$$

está bem definida e é um isomorfismo de semigrupóides. Se θ e ρ são congruências sobre o semigrupóide S tais que $\theta \subseteq \rho$ então a função

$$\begin{array}{rrcl} q_{\theta,\rho}: & S/\theta & \to & S/\rho \\ & [s]_\theta & \mapsto & [s]_\rho \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo sobrejectivo.

Um *grafo topológico (compacto)* é um grafo G munido de uma topologia Hausdorff (compacta) para a qual α_{G} e ω_{G} são funções contínuas, e V_{G} e E_{G} são fechados. Note-se que então V_{G} e E_{G} também são abertos, pois G é a união disjunta de V_{G} e E_{G}.

Observação 4.3. Suponhamos que G é um grafo topológico. Então, para quaisquer $x, y \in V_{\mathrm{G}}$, o conjunto $E_{\mathrm{G}}(x, y)$ é fechado; o conjunto D_{G} também é fechado. Se a topologia de V_{G} é a topologia discreta então $E_{\mathrm{G}}(x, y)$ e D_{G} são abertos.

Como habitualmente, se algum dos conjuntos V_{G}, E_{G} ou G for finito então considerámo-lo munido da topologia discreta.

Um *semigrupóide topológico (compacto)* é um semigrupóide S cujo grafo subjacente é um grafo topológico (compacto) tal que a operação de semigrupóide de S é contínua: isto é, se $(s_i, t_i)_{i\in I}$ é uma rede de elementos de D_S convergente para (s, t), então $(s_i t_i)_{i\in I}$ converge para st (note-se que (s, t) pertence a D_S porque D_S é fechado).

Suponhamos que $(S_i)_{i\in I}$ é uma família de grafos topológicos. Então $\prod_{i\in I} S_i$ é um grafo topológico, considerando a topologia produto.

Se $(S_i)_{i\in I}$ é uma família de grafos semigrupóides topológicos então $\prod_{i\in I} S_i$ é um semigrupóide topológico, considerando a topologia produto e a composição de arestas feita componente a componente.

O limite projectivo de uma família de homomorfismos de grafos (semigrupóides) topológicos é um subgrafo (subsemigrupóide) fechado de $\prod_{i\in I} S_i$ (se não for o conjunto vazio).

4.1.1 O subsemigrupóide fechado gerado por um conjunto

Sejam R um semigrupóide topológico e X um subgrafo não vazio de R. Consideremos o seguinte conjunto:

$$\mathscr{Q} = \{Q \,|\, Q \text{ é um subsemigrupóide fechado de } R \text{ que contém } X\}.$$

O conjunto $\mathscr{Q}$ é não vazio, pois é claro que $R \in \mathscr{Q}$. Denotemos por $\lceil X \rceil$ a intersecção dos elementos de $\mathscr{Q}$. Então $\lceil X \rceil \in \mathscr{Q}$. Dizemos que $\lceil X \rceil$ é o *subsemigrupóide fechado de R gerado por X*.

Observação 4.4. Se D_R for aberto então $\lceil X \rceil = \overline{\langle X \rangle}$.

Justificação. Consideremos duas arestas consecutivas s e t pertencentes a $\overline{\langle X \rangle}$. Então existe uma rede $(s_i, t_i)_{i\in I}$ de elementos de $\langle X \rangle \times \langle X \rangle$ convergente para (s, t). Como $(s, t) \in D_S$ e D_S é aberto, a rede $(s_i, t_i)_{i\in I}$ tem alguma sub-rede $(s_{\lambda(j)}, t_{\lambda(j)})_{j\in J}$ de elementos de D_S. Então $(s_{\lambda(j)} \cdot t_{\lambda(j)})_{j\in J}$ é uma rede de elementos de $\langle X \rangle$ convergente para st. $\square$

Em particular, se R tiver um número finito de vértices então $\lceil X \rceil = \overline{\langle X \rangle}$. Para vermos um exemplo em que não se verifica a igualdade $\lceil X \rceil = \overline{\langle X \rangle}$, vamos regressar aos sistemas dinâmicos simbólicos.

Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$. Vamos designar por *grafo das órbitas de um sistema simbólico* o grafo $\Sigma(\mathcal{X})$ que tem $\mathcal{X}$ como conjunto de vértices e $\{(x, \sigma(x)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid x \in \mathcal{X}\}$ como conjunto de arestas, e onde a aresta $(x, \sigma(x))$ começa em x e acaba em $\sigma(x)$. Considerando em $E_{\Sigma(\mathcal{X})}$ a topologia induzida da topologia produto de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, as funções α e ω são contínuas, pelo que $\Sigma(\mathcal{X})$ fica com uma estrutura de grafo topológico determinada pela topologia de $\mathcal{X}$. Dois sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são conjugados se e só se $\Sigma(\mathcal{X})$ e $\Sigma(\mathcal{Y})$ são grafos topológicos isomorfos.

Proposição 4.5. *Consideremos o alfabeto com duas letras $\{a, b\}$ e o sistema simbólico sófico $\mathcal{Z}$ de $\{a, b\}^{\mathbb{Z}}$ com a seguinte apresentação:*

Suponhamos que $\Sigma(\mathcal{Z})^+$ é um subsemigrupóide de um semigrupóide compacto S tal que $\mathcal{Z}$ é um subespaço topológico de V_S. Então $\overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+}$ não é um subsemigrupóide de S.

Demonstração. Para cada inteiro positivo n, seja s_n a única aresta de $\Sigma(\mathcal{Z})^+$ que começa em $a^{-\infty}.b^{+\infty}$ e acaba em $\sigma^n(a^{-\infty}.b^{+\infty})$, e seja t_n a única aresta de $\Sigma(\mathcal{Z})^+$ que começa em $\sigma^{-n}(b^{-\infty}.a^{+\infty})$ e acaba em $b^{-\infty}.a^{+\infty}$. Como S é um semigrupóide compacto, as sucessões $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ têm pontos de acumulação s e t em S, respectivamente. Pela continuidade das funções α e ω, temos

$$\alpha(s) = a^{-\infty}.b^{+\infty}, \quad \omega(s) = b^{\infty} = \alpha(t), \quad \omega(t) = b^{-\infty}.a^{+\infty}.$$

Como s e t são arestas consecutivas, existe o produto $s \cdot t$.

Suponhamos que $\overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+}$ é um subsemigrupóide de S. Então, como $s, t \in \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+}$, temos $s \cdot t \in \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+}$. Logo, existe uma rede $(e_i)_{i \in I}$ de arestas de $\Sigma(\mathcal{Z})^+$ convergente para $s \cdot t$. Pela continuidade de α e de ω, as redes $(\alpha(e_i))_{i \in I}$ e $(\omega(e_i))_{i \in I}$ convergem para $a^{-\infty}.b^{+\infty}$ e $b^{-\infty}.a^{+\infty}$, respectivamente. Ora $a^{-\infty}.b^{+\infty}$ e $b^{-\infty}.a^{+\infty}$ são elementos isolados de $\mathcal{Z}$, pelo que existe $i \in I$ tal que $\alpha(e_i) = a^{-\infty}.b^{+\infty}$ e $\omega(e_i) = b^{-\infty}.a^{+\infty}$. Mas em $\Sigma(\mathcal{Z})^+$ não existem arestas entre $a^{-\infty}.b^{+\infty}$ e $b^{-\infty}.a^{+\infty}$. Chegamos a uma contradição. $\square$

A Proposição 4.5 dá-nos o nosso almejado exemplo, uma vez que se o semigrupóide $\Sigma(\mathcal{Z})^+$ mergulha num semigrupóide S, então $\lceil\Sigma(\mathcal{Z})^+\rceil$ é o subsemigrupóide de S gerado por $\Sigma(\mathcal{Z})^+$. Há ainda um detalhe a considerar: é preciso mostrar que existe de facto um semigrupóide compacto S que satisfaça as condições da Proposição 4.5. Essa demonstração fica adiada para uma secção posterior (cf. Corolário (4.30)).

Voltando a uma situação totalmente abstracta, consideremos então um subgrafo não vazio X de um semigrupóide topológico R. Façamos a seguinte definição recursiva de conjuntos denotados por $\lceil X \rceil_\beta$, onde β é um ordinal[1]:

- $\lceil X \rceil_0 = X$;
- para qualquer ordinal β, o conjunto $\lceil X \rceil_{\beta+}$ é o fecho em R do subsemigrupóide gerado por $\lceil X \rceil_\beta$.

[1]Para uma consulta sobre ordinais e tópicos relacionados, veja-se por exemplo [Kun80, Capítulo 1] e [Hal74].

- se β é um ordinal limite então $\lceil X \rceil_\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \lceil X \rceil_\gamma$.

Note-se desde logo que $X \subseteq \lceil X \rceil_\beta \subseteq \lceil X \rceil$ para todo o ordinal β, o que facilmente se prova por indução transfinita.

Por comodidade, no que segue o conjunto $\lceil X \rceil_\beta$ é abreviadamente denotado por y_β.

Lema 4.6. *Seja β_0 um ordinal tal que $y_{\beta_0^+} = y_{\beta_0}$. Então $\lceil X \rceil = y_{\beta_0}$*

Demonstração. Temos $\langle y_{\beta_0} \rangle \subseteq \overline{\langle y_{\beta_0} \rangle} = y_{\beta_0}$, pelo que $y_{\beta_0} \in \mathscr{Q}$. Por outro lado $y_{\beta_0} \subseteq \lceil X \rceil$. Logo $\lceil X \rceil = y_{\beta_0}$. □

Lema 4.7. *Se $\mathfrak{d}$ é um cardinal maior do que o cardinal de $\lceil X \rceil$ então existe um ordinal β_0 pertencente a $\mathfrak{d}$ tal que $y_{\beta_0^+} = y_{\beta_0}$.*

Demonstração. Sejam β e γ ordinais distintos. Então $\beta \in \gamma$ ou $\gamma \in \beta$. Suponhamos que $\beta \in \gamma$. Então $\beta^+ \subseteq \gamma$. Facilmente se mostra por indução transfinita que o operador y preserva a ordem, pelo que $y_{\beta^+} \subseteq y_\gamma$. Do mesmo modo, se $\gamma \in \beta$ então $y_{\gamma^+} \subseteq y_\beta$. Em qualquer dos casos, temos $(y_{\beta^+} \setminus y_\beta) \cap (y_{\gamma^+} \setminus y_\gamma) = \emptyset$. Portanto a seguinte correspondência é uma função bem definida:

$$\begin{array}{rccl} f: & \lceil X \rceil & \to & \mathfrak{d} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \beta & \text{se } \beta \in \mathfrak{d} \text{ e } x \in y_{\beta^+} \setminus y_\beta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

Temos $y_\beta \subseteq y_{\beta^+}$, para todo o $\beta \in \mathfrak{d}$. Suponhamos que o lema é falso; então, pelo Lema 4.6, para todo o ordinal β pertencente a $\mathfrak{d}$, existe algum elemento x_β de $y_{\beta^+} \setminus y_\beta$. Ora $x_\beta \in \lceil X \rceil$, pois $y_\gamma \subseteq \lceil X \rceil$ para qualquer ordinal γ. Portanto $\beta = f(x_\beta)$, para qualquer ordinal β pertencente a $\mathfrak{d}$. Logo a função f é sobrejectiva, pelo que $\mathfrak{d} \leq |\lceil X \rceil|$. Por outro lado $|\lceil X \rceil| < \mathfrak{d}$, por hipótese. Isto é uma contradição. □

Pelos Lemas 4.6 e 4.7 o conjunto de ordinais

$$\{\beta : \beta \text{ é um ordinal}, |\beta| \leq |\lceil X \rceil|, \lceil X \rceil_\beta = \lceil X \rceil\}.$$

é não vazio. O seu infímo é denotado por $\mathfrak{o}(X)$.

Lema 4.8. *Sejam R e S semigrupóides topológicos. Consideremos um subgrafo não vazio X de R tal que $R = \lceil X \rceil$. Sejam ψ e η homomorfismos contínuos de semigrupóides de R em S. Se $\psi|_X = \eta|_X$ então $\psi = \eta$.*

Demonstração. Pelos Lemas 4.7 e 4.6, basta-nos mostrar por indução transfinita que $\psi|_{y_\beta} = \eta|_{y_\beta}$ para qualquer ordinal β. O passo inicial é trivial, pois $y_0 = X$.

Vejamos o caso sucessor do passo indutivo. Seja β um ordinal tal que $\psi|_{y_\beta} = \eta|_{y_\beta}$. Então $\psi|_{\langle y_\beta \rangle} = \eta|_{\langle y_\beta \rangle}$, porque ψ e η são homomorfismos de semigrupóides. E $\psi|_{\overline{\langle y_\beta \rangle}} = \eta|_{\overline{\langle y_\beta \rangle}}$, porque ψ e η são funções contínuas. Ora $y_{\beta^+} = \overline{\langle y_\beta \rangle}$.

Vejamos o caso limite do passo indutivo. Seja β um ordinal limite tal que $\psi|_{y_\gamma} = \eta|_{y_\gamma}$ para todo o $\gamma \in \beta$. Como $y_\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} y_\gamma$, segue imediatamente que $\psi|_{y_\beta} = \eta|_{y_\beta}$. □

4.2 Pseudovariedades de semigrupóides

Dizemos que um semigrupóide S é um *divisor* de um semigrupóide T se existir um semigrupóide R para o qual existe um homomorfismo fiel $\varphi : R \to T$ e um homomorfismo quociente $\varphi : R \to S$. No caso dos semigrupos esta noção coincide com a noção de divisor introduzida na Secção 1.5.

Um semigrupóide diz-se *trivial* se não possuir pares de arestas que sejam simultaneamente co-terminais e distintas. Entre um semigrupóide trivial e o semigrupo trivial existe um único homomorfismo de semigrupóides; esse homomorfismo é fiel, pelo que os semigrupóides triviais são divisores do semigrupo trivial.

Uma *pseudovariedade de semigrupóides* é uma classe de semigrupóides finitos que contém o semigrupo trivial e que contém os divisores e os produtos directos finitos dos seus elementos [2].

A intersecção de pseudovariedades de semigrupóides também é uma pseudovariedade de semigrupóides. A *pseudovariedade de semigrupóides gerada* por uma classe $\mathscr{C}$ de semigrupóides finitos é a intersecção das pseudovariedades de semigrupóides que contêm $\mathscr{C}$.

Teorema 4.9 (cf. [AW98, Secção 2]). *A pseudovariedade de semigrupóides gerada por $\mathscr{C}$ é a classe dos divisores de produtos directos finitos de elementos de $\mathscr{C}$.*

A pseudovariedade de semigrupóides gerada por uma pseudovariedade V de semigrupos designa-se *global* de V, e é denotada por gV. A classe dos semigrupóides finitos triviais é uma pseudovariedade de semigrupóides; e como os semigrupóides triviais são divisores do semigrupo trivial, essa pseudovariedade é precisamente gI. Note-se que a pseudovariedade gI está contida em todas as pseudovariedades de semigrupóides.

A noção de semigrupóide profinito, e mais particularmente de semigrupóide pró-V, é inteiramente análoga à correspondente noção para semigrupos.

Lema 4.10 (cf. [Jon96a, pág. 66]). *Seja S um semigrupóide compacto com um número finito de vértices. Suponhamos que φ é um homomorfismo contínuo de S num semigrupóide finito F. Então existem homomorfismos contínuos de semigrupóides $\varphi_1 : S \to F'$ e $\varphi_2 : F' \to F$ tais que φ_1 é quociente, F' é finito, φ_2 é fiel e $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$.*

Note-se que no enunciado do Lema 4.10 o semigrupóide F' é um divisor de F, pelo que se V é uma pseudovariedade de semigrupóides então $F' \in \mathsf{V}$ sempre que $F \in \mathsf{V}$. Portanto, no universo dos semigrupóides com um número finito de vértices, os homomorfismos quocientes são suficientes para a caracterização dos semigrupóides pró-V.

Vamos designar por *sistema dirigido quociente* um sistema dirigido de homomorfismos quocientes de semigrupóides.

[2] Na definição original de Tilson [Til87], que nunca até agora vimos alterada, uma pseudovariedade de semigrupóides também tem que ser fechada para a união disjunta (ou mais formalmente, para o co-produto). Isto tem a ver com a forma como se desenvolve uma teoria equacional para pseudovariedades de semigrupóides. Numa tal teoria, o papel que é desempenhado pelos alfabetos finitos na teoria equacional das pseudovariedades de semigrupos, passa a ser desempenhado por grafos finitos. Na teoria equacional de Tilson [Til87] opta-se preferencialmente por grafos finitos conexos, o que leva a que a definição de pseudovariedade de semigrupóides deva incluir a mencionada condição sobre uniões disjuntas. Já em [AW98] não é imposta qualquer restrição sobre quais os grafos finitos a considerar. No entanto no mesmo artigo a definição de pseudovariedade de semigrupóides que é dada é a de Tilson. Parece-nos que a definição foi mantida por um fenómeno de inércia, pois a hipótese adicional de Tilson nunca é relevante nesse artigo. Esse efeito de inércia das opções de Tilson reflecte-se também na demonstração do Teorema 2.7 de [AW98]: por exemplo, onde está "let A be a subgraph of C generating C" devia estar "let $A_1, \ldots, A_n$ be subgraphs of C generating the connected components $C_1, \ldots, C_n$ of C, respectively", uma vez que não se assume que C seja conexo. Seja como for, optar ou não pela definição de Tilson de pseudovariedade de semigrupóides é irrelevante para a nossa exposição.

Teorema 4.11 (cf. [Jon96a, Teorema 4.1]). *Consideremos uma pseudovariedade* V *de semigrupóides. Seja* S *um semigrupóide topológico com um número finito de vértices. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *S é pró-V;*
2. *S é isomorfo a um limite projectivo de um sistema dirigido quociente de semigrupóides de V;*
3. *S é isomorfo a um limite projectivo de um sistema dirigido de semigrupóides de V.*

4.2.1 O consolidado de um semigrupóide

O *consolidado* de um semigrupóide S é o semigrupo S_{cd} definido do seguinte modo: o conjunto subjacente é constituído pelas arestas de S e, apenas no caso de S ter pares de arestas não consecutivas, por um elemento extra 0; o produto em S_{cd} de arestas consecutivas coincide com a composição em S, o produto de arestas não consecutivas é 0, e 0 é um zero de S_{cd}. Se S é um semigrupóide topológico então atribuímos a S_{cd} a topologia de E_S acrescentando-lhe 0 como ponto isolado, no caso de 0 pertencer a S_{cd}.

Observação 4.12. Dado um semigrupóide topológico S, se D_S é aberto então S_{cd} é um semigrupo topológico.

Justificação. Seja $(s_i, t_i)_{i \in I}$ uma rede de pares de elementos de S_{cd} convergente para (s, t).

Se $st = 0$ então $(s, t) \notin D_S$. Como D_S é fechado e 0 é um ponto isolado, o conjunto

$$U = (E_S \times E_S) \setminus D_S \cup \{E_S\} \times \{0\} \cup \{0\} \times \{E_S\} \cup \{(0, 0)\}$$

é uma vizinhança aberta de (s, t) em $S_{cd} \times S_{cd}$. Logo existe $i_0 \in I$ tal que se $i \leq i_0$ então $(s_i, t_i) \in U$, donde $s_i t_i = 0$. Logo a rede $(s_i t_i)_{i \in I}$ converge para st.

Se $st \neq 0$ então $(s, t) \in D_S$. Como D_S é aberto, existe $i_0 \in I$ tal que se $i \leq i_0$ então $(s_i, t_i) \in D_S$, donde $s_i t_i \in E_S$. Pela definição de semigrupóide topológico, concluímos que em S_{cd} a rede $(s_i t_i)_{i \in I}$ converge para st. □

Suponhamos que $\varphi : S \to T$ é um homomorfismo quociente contínuo de semigrupóides topológicos. É claro que $0 \in S_{cd}$ se e só se $0 \in T_{cd}$. Consideremos a função $\varphi_{cd} : S_{cd} \to T_{cd}$ tal que $\varphi_{cd}(s) = \varphi(s)$ para qualquer $s \in E_S$, e $\varphi_{cd}(0) = 0$ se $0 \in S_{cd}$. Então φ_{cd} é um homomorfismo contínuo.

Proposição 4.13. *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos que contém* B_2*. Seja* S *um semigrupóide finito. Então* $S \in \mathsf{gV}$ *se e só se* $S_{cd} \in \mathsf{V}$*.*

Veja-se [AW98, Corolário 7.7] para uma demonstração da Proposição 4.13. Da Proposição 4.13 decorre imediatamente que gS é a pseudovariedade de todos os semigrupóides finitos.

Corolário 4.14. *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos que contém* B_2*. Seja* S *um semigrupóide compacto com um número finito de vértices. Então* S *é pró-*gV *se e só se* S_{cd} *é pró-*V*.*

Demonstração. Suponhamos que S é pró-gV. Então para quaisquer dois elementos distintos s e t de $S_{cd} \setminus \{0\}$, existem um semigrupóide F de gV e um homomorfismo quociente contínuo $\varphi : S \to F$ tais que $\varphi_{s,t}(s) \neq \varphi_{s,t}(t)$, ou seja, $(\varphi_{s,t})_{cd}(s) \neq (\varphi_{s,t})_{cd}(t)$. Se $0 \in S_{cd}$, então $(\varphi_{s,t})_{cd}(s) \neq (\varphi_{s,t})_{cd}(0)$ para quaisquer $s, t \in E_S$. Em resumo, para quaisquer $u, v \in S_{cd}$

existe um homomorfismo contínuo $\psi : S_{cd} \to F_{cd}$ tal que $\psi(u) \neq \psi(v)$. Pela Proposição 4.13 temos $F_{cd} \in \mathsf{V}$, logo S_{cd} é pró-V.

Reciprocamente, suponhamos que S_{cd} é pró-V. Sejam s e t arestas distintas de S. Então existe um homomorfismo contínuo ψ de S_{cd} num semigrupo T de V tal que $\psi(s) \neq \psi(t)$. Seja $\gamma : S \to S_{cd}$ o homomorfismo de semigrupóides cuja restrição a E_S é a identidade. Então $\psi \circ \gamma$ é um homomorfismo contínuo de semigrupóides tal que $\psi \circ \gamma(s) \neq \psi \circ \gamma(t)$. □

4.3 Semigrupóides profinitos relativamente livres gerados por grafos com um número finito de vértices

Consideremos um grafo Γ com um número finito de vértices, e uma pseudovariedade V de semigrupóides. Seja $Con_\Gamma\mathsf{V}$ o conjunto das congruências θ sobre Γ^+ tais que Γ^+/θ pertence a V. O conjunto $Con_\Gamma\mathsf{V}$ é não vazio: se ϑ for a congruência de co-terminalidade em Γ^+ então Γ^+/ϑ é um semigrupóide trivial, pelo que $\vartheta \in Con_\Gamma\mathsf{V}$. A intersecção de congruências sobre um mesmo semigrupóide ainda é uma congruência sobre esse semigrupóide. Logo o conjunto $Con_\Gamma\mathsf{V}$ munido da ordem parcial $\supseteq$ é um conjunto dirigido. A família

$$\{q_{\theta,\rho} : \Gamma^+/\theta \to \Gamma^+/\rho \mid \rho, \theta \in Con_\Gamma\mathsf{V}, \rho \supseteq \theta\}$$

é um sistema dirigido de homomorfismos quocientes. O seu limite projectivo é um semigrupóide pró-V, denotado por $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$. Se o grafo Γ for finito então $Con_\Gamma\mathsf{V}$ é numerável, pelo que o espaço topológico $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ é gerado por uma métrica [Wil70, Teorema 22.3].

Seja $\iota : \Gamma \to \overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ a função definida por $\iota(a) = ([a]_\theta)_{\theta \in Con_\Gamma\mathsf{V}}$. O subsemigrupóide de $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ gerado por $\iota(\Gamma)$ é o conjunto $\iota^+(\Gamma^+)$, denotado por $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$.

Uma função ψ entre um grafo não vazio X e um semigrupóide topológico S diz-se uma *função geradora de S* se $\lceil \psi(X) \rceil = S$. Recordemos que, nesse caso, se S tiver um número finito de vértices então $\overline{\langle \psi(X) \rangle} = S$. Este facto e o Teorema 4.11 são cruciais para que possamos dizer que a demonstração do próximo teorema é inteiramente análoga à do Teorema 1.35.

Teorema 4.15 (cf. [Jon96a, Teorema 6.3])**.** *Sejam V uma pseudovariedade de semigrupóides e Γ um grafo com um número finito de vértices.*

1. *A função ι é uma função geradora do semigrupóide compacto $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$.*

2. *Para todo o semigrupóide S pró-V com um número finito de vértices e para todo o homomorfismo de grafos $\varphi : \Gamma \to S$ existe um único homomorfismo de semigrupóides contínuo $\hat{\varphi} : \overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V} \to S$ tal que $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$, ou seja, $\hat{\varphi}$ é tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V} \arrow[d, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

3. *Suponhamos que Λ é um grafo isomorfo a Γ. Seja T um semigrupóide pró-V com um número finito de vértices e com uma função geradora $\kappa : \Lambda \to T$ tal que, para qualquer semigrupóide S de V e para qualquer homomorfismo de grafos $\varphi : \Lambda \to S$, existe um homomorfismo de semigrupóides contínuo $\varphi_T : T \to S$ tal que $\varphi_T \circ \kappa = \varphi$. Então T é um semigrupóide compacto isomorfo a $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$.*

Corolário 4.16. *Sejam Γ e Λ grafos com um número finito de vértices. Se Γ e Λ são grafos isomorfos então $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ e $\overline{\Omega}_\Lambda\mathsf{V}$ são semigrupóides compactos isomorfos.*

Dado um grafo Γ com um número finito de vértices, o semigrupóide $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ denomina-se *semigrupo profinito livre gerado por Γ relativamente à pseudovariedade* V, ou simplesmente *semigrupo pró-*V *livre gerado por* Γ.

Lema 4.17. *Seja Γ um grafo. Fixemos um caminho u sobre Γ. Então existe um semigrupo S pertencente a N e um homomorfismo de semigrupóides $\varphi_u : \Gamma^+ \to S$ tal que $\varphi_u^{-1}\varphi_u(u) = \{u\}$.*

Demonstração. Consideremos o conjunto Λ das arestas de Γ que são factores de u. Seja F o conjunto dos elementos de Λ^+ que têm comprimento menor ou igual ao comprimento de u. O conjunto $I = E_\Gamma^+ \setminus F$ é um ideal de E_Γ^+. O quociente de Rees $S = E_\Gamma^+/I$ é finito, pois F é finito. O ideal I é um zero de S. Logo $S \in \mathsf{N}$. Sejam ϱ o homomorfismo canónico de semigrupos entre E_Γ^+ e E_Γ^+/I, e j o homomorfismo canónico de semigrupóides entre Γ^+ e E_Γ^+. Se $w \in F$ então $\varrho \circ j(w) = \varrho(w) = \{w\} \neq I$; se $w \in I$ então $\varrho \circ j(w) = \varrho(w) = I$. Como $u \in F$, o homomorfismo de semigrupóides $\varrho \circ j$ está nas condições pretendidas. $\square$

Proposição 4.18. *Sejam V uma pseudovariedade de semigrupóides e Γ um grafo com um número finito de vértices. Se V contém semigrupos não triviais então $\iota : \Gamma \to \Omega_\Gamma\mathsf{V}$ é um mergulho. Suponhamos que V contém N. Então ι^+ é um isomorfismo de semigrupóides entre Γ^+ e $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$, e os elementos de $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$ são pontos isolados de $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$.*

Demonstração. Sejam u e v e arestas distintas de Γ. Suponhamos que V contém um semigrupo S com pelo menos dois elementos. Então existe uma função $\psi : \Gamma \to S$ tal que $\psi(u) \neq \psi(v)$. Qualquer função entre um grafo e um conjunto é um homomorfismo de grafos. Logo existe um único homomorfismo de grafos contínuo $\hat{\psi} : \overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V} \to S$ tal que $\hat{\psi} \circ \iota = \psi$. Necessariamente $\iota(u) \neq \iota(v)$. Logo ι é um mergulho.

Suponhamos que V contém N. A função $\iota^+ : \Gamma^+ \to \Omega_\Gamma\mathsf{V}$ é um homomorfismo quociente de semigrupóides. Queremos mostrar que é uma função injectiva. Suponhamos que u e v são arestas distintas de Γ^+. Pelo Lema 4.17 existem um semigrupo S pertencente a N e um homomorfismo de semigrupóides $\varphi_u : \Gamma^+ \to S$ tal que $\varphi_u^{-1}\varphi_u(u) = \{u\}$. Em particular, $\varphi_u(u) \neq \varphi_u(v)$. Como $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{V}$, existe um único homomorfismo de semigrupóides contínuo $\hat{\varphi}_u$ entre $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ e S tal que $\hat{\varphi}_u \circ \iota = \varphi_u|_\Gamma$. Se $w = w_1 \dots w_n$ é um caminho de Γ onde $w_1, \dots, w_n$ são arestas de Γ, então

$$\hat{\varphi}_u(\iota^+(w)) = \hat{\varphi}_u(\iota(w_1)) \dots \hat{\varphi}_u(\iota(w_n)) = \varphi_u(w_1) \dots \varphi_u(w_n) = \varphi_u(w).$$

Ou seja, $\hat{\varphi}_u \circ \iota^+ = \varphi_u$. Logo $\hat{\varphi}_u(\iota^+(u)) \neq \hat{\varphi}_u(\iota^+(v))$, donde $\iota^+(u) \neq \iota^+(v)$. Portanto ι^+ é um isomorfismo. Sendo assim, por simplicidade, identificamos Γ^+ com $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$, considerando ι^+ como a identidade.

Seja w uma aresta de Γ^+. Seja $(w_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ uma rede de arestas de Γ^+ convergente para w. Como $\hat{\varphi}_w$ é uma função contínua e a sua restrição a Γ^+ coincide com φ_w, existe $\tau_0 \in \mathcal{T}$ tal que se $\tau_0 \leq \tau$ então $\varphi_w(w_\tau) = \varphi_w(w)$. Logo, como $\varphi_w^{-1}\varphi_w(w) = \{w\}$, se $\tau_0 \leq \tau$ então $w_\tau = w$. Uma vez que Γ^+ é denso em $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$, isto mostra que os elementos de Γ^+ são pontos isolados de $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$. $\square$

4.4 Semigrupóides profinitos relativamente livres gerados por grafos profinitos

A noção de *grafo profinito* é inteiramente análoga às de semigrupo profinito e de semigrupóide profinito. De facto, poderíamos desde logo abstrair uma noção abrangente de estruturas profinitas que englobasse todos estes casos [Alm03]. Um grafo é profinito se e só se for o limite projectivo de um sistema dirigido sobrejectivo de grafos finitos.

Exemplifiquemos com uma classe de grafos profinitos que nos ajudará a compreender melhor o universo dos semigrupóides profinitos com um número infinito de vértices: a classe dos grafos de transição de um sistema simbólico. Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico. Na Secção 2.2 definimos o grafo $\Sigma_k(\mathcal{X})$, o grafo de De Bruijn de ordem k de $\mathcal{X}$. Consideremos inteiros positivos n e m tais que $m \geq n$. Seja $\pi_{m,n}$ a seguinte função:

$$\begin{array}{rcll} \Sigma_{2m}(\mathcal{X}) & \to & \Sigma_{2n}(\mathcal{X}) & \\ x_{[-m,m-1]} \in L_{2m}(\mathcal{X}) & \mapsto & x_{[-n,n-1]} \in L_{2n}(\mathcal{X}), & x \in \mathcal{X}. \\ x_{[-m,m]} \in L_{2m+1}(\mathcal{X}) & \mapsto & x_{[-n,n]} \in L_{2n+1}(\mathcal{X}), & x \in \mathcal{X}, \end{array}$$

A função $\pi_{m,n}$ é um homomorfismo sobrejectivo de grafos. A família de homomorfismos de grafos $\{\pi_{m,n} \,|\, n \leq m\}$, indexada pelo conjunto dos inteiros positivos munido da ordem habitual, é um sistema dirigido sobrejectivo. O seu limite projectivo e $\Sigma(\mathcal{X})$ vão a partir de agora ser identificados, na medida em que a função

$$\begin{array}{rcll} \Sigma(\mathcal{X}) & \to & \varprojlim \Sigma_{2n}(\mathcal{X}) & \\ x & \mapsto & (x_{[-n,n-1]})_n & \\ (x,\sigma(x)) & \mapsto & (x_{[-n,n]})_n, & x \in \mathcal{X}. \end{array}$$

é um isomorfismo de grafos topológicos. O grafo $\Sigma(\mathcal{X})$ é portanto um grafo profinito. A projecção canónica $\Sigma(\mathcal{X}) \to \Sigma_{2n}(\mathcal{X})$ é denotada por π_n.

Um grafo profinito é aproximado por grafos finitos no sentido em que é um limite projectivo sobrejectivo de grafos finitos. É de esperar que essa aproximação nos permita definir semigrupóides profinitos livres sobre grafos profinitos, já que vimos que tal é possível para grafos finitos. É a esta questão que esta secção é dedicada.

Na verdade ser-nos-á possível tratar a situação mais geral dos grafos topológicos que são um limite projectivo sobrejectivo de grafos compactos com um número finito de vértices. Tais limites projectivos serão designados *grafos v-profinitos*.

Consideremos um grafo Γ v-profinito. Então Γ é o limite projectivo de um sistema dirigido sobrejectivo

$$\{\delta_{j,i} : \Gamma_j \to \Gamma_i \,|\, i,j \in I, i \leq j\} \tag{4.2}$$

de homomorfismos contínuos entre grafos compactos com um número finito de vértices. A projecção canónica $\Gamma \to \Gamma_i$ será denotada por δ_i.

Para cada homomorfismo de grafos φ de domínio Γ, consideremos o seguinte conjunto:

$$I_\varphi = \{i \in I \,|\, \forall x, y \in \Gamma,\, \delta_i(x) = \delta_i(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)\}.$$

Lema 4.19. *Se φ é um homomorfismo de grafos contínuo entre Γ e um grafo finito S então $I_\varphi \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que $I_\varphi = \emptyset$. Então para qualquer $i \in I$ existem $x_i, y_i \in \Gamma$ tais que $\delta_i(x_i) = \delta_i(y_i)$ e $\varphi(x_i) \neq \varphi(y_i)$. Uma vez que Γ é um grafo compacto, as redes $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$ têm sub-redes $(x_{\lambda(j)})_{j\in J}$ e $(y_{\lambda(j)})_{j\in J}$ convergentes para alguns elementos x e y de Γ, respectivamente. Como φ é uma função contínua e S é finito, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Logo $x \neq y$. Então existe $k \in I$ tal que $\delta_k(x) \neq \delta_k(y)$. O conjunto $\{(u,v) \in \Gamma_k \times \Gamma_k \mid u = v\}$ é um fechado de $\Gamma_k \times \Gamma_k$. Logo, como

$$\lim_{j\in J}(\delta_k(x_{\lambda(j)}), \delta_k(y_{\lambda(j)})) = (\delta_k(x), \delta_k(y)),$$

existe $j_0 \in J$ tal que se $j_0 \leq j$ então $\delta_k(x_{\lambda(j)}) \neq \delta_k(y_{\lambda(j)})$. Ora existe $j_1 \in J$ tal que $j_0 \leq j_1$ e $k \leq \lambda(j_1)$. Seja $l = \lambda(j_1)$. Então

$$\delta_{l,k}(\delta_l(x_l)) = \delta_k(x_l) \neq \delta_k(y_l) = \delta_{l,k}(\delta_l(y_l)).$$

Mas tal contradiz a igualdade $\delta_l(x_l) = \delta_l(y_l)$. □

Lema 4.20. *Seja φ um homomorfismo de grafos contínuo entre Γ e um grafo finito S. Então existe $i \in I$ para o qual existe um único homomorfismo de grafos contínuo $\varphi_i : \Gamma_i \to S$ tal que $\varphi_i \circ \delta_i = \varphi$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.19 o conjunto I_φ tem algum elemento i. Pela definição de I_φ e por δ_i ser uma função sobrejectiva, a correspondência

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_i : & \Gamma_i & \to & S \\ & \delta_i(x) & \to & \varphi(x) \end{array}$$

é uma função bem definida, e é claramente a única função cuja composta com δ_i é φ. Como δ_i e φ são homomorfismos de grafos, para qualquer aresta x de Γ temos

$$\varphi_i[\alpha(\delta_i(x))] = \varphi_i[\delta_i(\alpha(x))] = \varphi(\alpha(x)) = \alpha(\varphi(x)) = \alpha[\varphi_i(\delta_i(x))].$$

Logo $\varphi_i(\alpha(y)) = \alpha(\varphi_i(y))$ para qualquer aresta y de Γ_i. Analogamente, $\varphi_i(\omega(y)) = \omega(\varphi_i(y))$, pelo que φ_i é um homomorfismo de grafos. A continuidade de φ_i resulta do Teorema 1.6. □

Até agora a suposição de que os grafos Γ_i têm um número finito de vértices podia ter sido dispensada. A partir de agora precisamos de a utilizar, porque vamos invocar o Teorema 4.15.

Se i e j são elementos de I tais que $i \leq j$ então, pelo Teorema 4.15, existe um único homomorfismo de semigrupóides contínuo $\hat{\delta}_{j,i}$ que torna o seguinte diagrama comutativo, onde ι_k designa a função geradora de $\overline{\Omega}_{\Gamma_k}\mathsf{V}$:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[d, "\delta_{j,i}"'] & \overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V} \arrow[d, "\hat{\delta}_{j,i}"] \\ \Gamma_i \arrow[r, "\iota_i"] & \overline{\Omega}_{\Gamma_i}\mathsf{V} \end{tikzcd}$$

A família

$$\{\hat{\delta}_{j,i} : \overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V} \to \overline{\Omega}_{\Gamma_i}\mathsf{V} \mid i, j \in I, i \leq j\}$$

é portanto um sistema dirigido de homomorfismos contínuos de semigrupóides compactos. Vamos denotar por $\hat{\delta}_i$ a projecção canónica de $\varprojlim_{j\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V}$ em $\overline{\Omega}_{\Gamma_i}\mathsf{V}$, e por ι a função de Γ em $\varprojlim_{j\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V}$ definida por $\iota(x) = (\iota_i \circ \delta_i(x))_{i\in I}$. O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\delta_i"'] & \varprojlim_{j\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V} \arrow[d, "\hat{\delta}_i"] \\
\Gamma_i \arrow[r, "\iota_i"] & \overline{\Omega}_{\Gamma_i}\mathsf{V}
\end{tikzcd}$$

Lema 4.21. *Seja φ um homomorfismo de grafos contínuo entre Γ e um semigrupóide finito S. Então existe um homomorfismo de semigrupóides contínuo $\bar{\varphi}$ de $\varprojlim_{j\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V}$ em S tal que $\bar{\varphi} \circ \iota = \varphi$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.20 existe $i \in I$ para o qual existe um único homomorfismo de grafos $\varphi_i : \Gamma_i \to S$ tal que $\varphi_i \circ \delta_i = \varphi$. Pelo Teorema 4.15 existe um único homomorfismo de semigrupóides contínuo $\hat{\varphi}_i$ de $\overline{\Omega}_{\Gamma_i}\mathsf{V}$ em S tal que $\hat{\varphi}_i \circ \iota_i = \varphi_i$. O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\delta_i"'] \arrow[ddrr, bend right, "\varphi"'] & & \varprojlim_{j\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V} \arrow[d, "\hat{\delta}_i"] \\
& \Gamma_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \overline{\Omega}_{\Gamma_i}\mathsf{V} \arrow[d, "\hat{\varphi}_i"] \\
& & S
\end{tikzcd}$$

Basta-nos portanto tomar $\bar{\varphi} = \hat{\varphi}_i \circ \hat{\delta}_i$. □

O Lema 4.21 assegura-nos a existência de um homomorfismo com determinadas propriedades. Resta-nos mostrar a unicidade.

Teorema 4.22. *Seja φ um homomorfismo de grafos contínuo entre Γ e um semigrupóide S de V. Então do subsemigrupóide fechado de $\varprojlim_{j\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V}$ gerado por $\iota(\Gamma)$ em S existe um único homomorfismo de semigrupóides contínuo $\hat{\varphi}$ tal que $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.21 existe um homomorfismo de semigrupóides contínuo $\bar{\varphi}$ de $\varprojlim_{j\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V}$ em S tal que $\bar{\varphi} \circ \iota = \varphi$. Seja $\hat{\varphi}$ a restrição de $\bar{\varphi}$ a $\hat{\Gamma}$. Então $\lceil \iota(\Gamma) \rceil$ é um homomorfismo de semigrupóides contínuo de $\lceil \iota(\Gamma) \rceil$ em S tal que $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$. A sua unicidade resulta do Lema 4.8. □

Pelos Teoremas 4.15 e 4.22, se Γ é um grafo com um número finito de vértices então $\overline{\Omega}_{\Gamma}\mathsf{V}$ e o subsemigrupóide $\lceil \iota(\Gamma) \rceil$ de $\varprojlim_{j\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_j}\mathsf{V}$ são semigrupóides compactos isomorfos. Por essa razão, não há qualquer ambiguidade se denotarmos $\lceil \iota(\Gamma) \rceil$ por $\overline{\Omega}_{\Gamma}\mathsf{V}$ quando Γ é um grafo profinito. Também vamos denotar por $\Omega_{\Gamma}\mathsf{V}$ o subsemigrupóide de $\overline{\Omega}_{\Gamma}\mathsf{V}$ gerado por $\iota(\Gamma)$.

Teorema 4.23. *Sejam V uma pseudovariedade de semigrupóides e Γ um grafo v-profinito.*

1. *Para todo o semigrupóide S pró-V e para todo o homomorfismo de grafos $\varphi : \Gamma \to S$ existe um único homomorfismo de semigrupóides contínuo $\hat{\varphi} : \overline{\Omega}_{\Gamma}\mathsf{V} \to S$ tal que $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$, ou seja, $\hat{\varphi}$ é tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \overline{\Omega}_\Gamma \mathsf{V} \arrow[d, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

2. *Suponhamos que Λ é um grafo isomorfo a Γ. Seja T um semigrupóide pró-V com função geradora $\kappa : \Lambda \to T$. Suponhamos que para qualquer semigrupóide S de V e para qualquer homomorfismo de grafos $\varphi : \Lambda \to S$ existe um homomorfismo de semigrupóides contínuo $\varphi_T : T \to S$ tal que $\varphi_T \circ \kappa = \varphi$. Então T é um semigrupóide compacto isomorfo a $\overline{\Omega}_\Gamma \mathsf{V}$.*

Para a demonstração do Teorema 4.23 são necessários alguns resultados auxiliares.

Lema 4.24. *Se S é um semigrupóide pró-V então existem uma família $\mathscr{F}$ de semigrupóides de V e um mergulho contínuo $\Psi : S \to \prod_{F \in \mathscr{F}} F$.*

Demonstração. Denotemos por $\mathcal{P}_2(S)$ o conjunto dos subconjunto de S com dois elementos. Como S é pró-V, para cada elemento $\{u, v\}$ de $\mathcal{P}_2(S)$ existe um homomorfismo de semigrupóides contínuo $\psi_{\{u,v\}}$ de S num semigrupóide $F_{\{u,v\}}$ de V. A seguinte função é um homomorfismo contínuo de semigrupóides:

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & S & \to & \prod_{\{s,t\} \in \mathcal{P}_2(S)} F_{\{u,v\}} \\ & s & \to & (\psi_{\{u,v\}}(s))_{\{u,v\} \in \mathcal{P}_2(S)}. \end{array}$$

Se s e t são elementos distintos de S então $\psi_{\{s,t\}}(s) \neq \psi_{\{s,t\}}(t)$, pelo que $\Psi(s) \neq \Psi(t)$. Ou seja, Ψ é um mergulho. $\square$

Lema 4.25. *Seja $\psi : S \to T$ um homomorfismo contínuo de semigrupóides compactos. Seja X um subgrafo não vazio de S. Então*

$$\psi\big(\lceil X \rceil_\beta\big) \subseteq \lceil \psi(X) \rceil_\beta, \quad \psi\big(\langle \lceil X \rceil_\beta \rangle\big) \subseteq \langle \lceil \psi(X) \rceil_\beta \rangle, \tag{4.3}$$

para qualquer ordinal β. Se $\psi|_{V_S}$ for injectiva então

$$\psi\big(\lceil X \rceil\big) = \lceil \psi(X) \rceil, \quad \psi\big(\langle \lceil X \rceil_\beta \rangle\big) = \langle \lceil \psi(X) \rceil_\beta \rangle. \tag{4.4}$$

Demonstração. Comecemos por mostrar por indução transfinita sobre β a condição

$$\psi\big(\lceil X \rceil_\beta\big) \subseteq \lceil \psi(X) \rceil_\beta, \tag{4.5}$$

O caso $\beta = 0$ é trivial. Vejamos o caso sucessor do passo indutivo. Suponhamos que se verifica (4.5). Como ψ é uma função contínua, temos

$$\psi\big(\lceil X \rceil_{\beta+}\big) = \psi\Big(\overline{\langle \lceil X \rceil_\beta \rangle}\Big) = \overline{\psi\big(\langle \lceil X \rceil_\beta \rangle\big)} \tag{4.6}$$

Como ψ é um homomorfismo de semigrupóides, de acordo com a igualdade (4.1) (página 94) temos

$$\psi\big(\langle \lceil X \rceil_\beta \rangle\big) \subseteq \big\langle \psi\big(\lceil X \rceil_\beta\big) \big\rangle. \tag{4.7}$$

Então, de (4.6) e (4.5) resulta o seguinte

$$\psi\big(\lceil X \rceil_{\beta+}\big) \subseteq \overline{\big\langle \psi\big(\lceil X \rceil_\beta\big) \big\rangle} \subseteq \overline{\langle \lceil \psi(X) \rceil_\beta \rangle} = \lceil \psi(X) \rceil_{\beta+}.$$

O caso limite do passo indutivo é imediato.

Por (4.5) e (4.7), para qualquer ordinal β temos

$$\psi\big(\langle\lceil X\rceil_\beta\rangle\big) \subseteq \big\langle\psi\big(\lceil X\rceil_\beta\big)\big\rangle \subseteq \langle\lceil\psi(X)\rceil_\beta\rangle,$$

o que conclui a demonstração das condições (4.3).

No caso em que $\psi|_{V_S}$ é injectiva, a demonstração das condições (4.4) é semelhante à das condições (4.3): a diferença está em que, como $\psi|_{V_S}$ é injectiva, em (4.7) passamos a ter uma igualdade. $\square$

Corolário 4.26. *Seja $\psi : S \to T$ um homomorfismo contínuo de semigrupóides compactos. Seja X um subgrafo não vazio de S. Então $\psi\big(\lceil X\rceil\big) \subseteq \lceil\psi(X)\rceil$. Se $\psi|_{V_S}$ for injectiva então $\psi\big(\lceil X\rceil\big) = \lceil\psi(X)\rceil$.*

Demonstração do Teorema 4.23. Seja S um semigrupóide pró-V. Então, de acordo com o Lema 4.24, existe uma família $\mathscr{F}$ de semigrupóides de V e um mergulho contínuo $\Psi : S \to \prod_{F\in\mathscr{F}} F$. Para cada $T \in \mathscr{F}$, seja ρ_T a projecção canónica $\prod_{F\in\mathscr{F}} F \to T$.

Consideremos um qualquer homomorfismo de grafos $\varphi : \Gamma \to S$. Pelo Teorema 4.22 para cada $T \in \mathscr{F}$ existe um único homomorfismo contínuo ζ_T de $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ em T tal que $\zeta_T \circ \iota = \rho_T \circ \Psi \circ \varphi$. Consideremos a função $\zeta : \overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V} \to \prod_{F\in\mathscr{F}} F$ tal que $\zeta(u) = (\zeta_F(u))_{F\in\mathscr{F}}$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & \overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V} \arrow[d, "\zeta"] \arrow[dr, "\zeta_T"] & \\
S \arrow[r, "\Psi"'] & \prod_{F\in\mathscr{F}} F \arrow[r, "\rho_T"'] & T
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

Como

$$\rho_T \circ \zeta \circ \iota = \zeta_T \circ \iota = \rho_T \circ \Psi \circ \varphi, \quad \forall T \in \mathscr{F},$$

concluímos que $\zeta \circ \iota = \Psi \circ \varphi$, e portanto o Diagrama (4.8) é comutativo. Então, aplicando o Corolário 4.26,

$$\zeta(\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}) = \zeta\big(\lceil\iota(\Gamma)\rceil\big) \subseteq \lceil\zeta(\iota(\Gamma))\rceil = \lceil\Psi(\varphi(\Gamma))\rceil \subseteq \lceil\Psi(S)\rceil = \Psi(S).$$

Logo, podemos considerar a função $\hat\varphi = \Psi^{-1} \circ \zeta$, que é um homomorfismo contínuo de semigrupóides compactos de $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ em S. Temos então $\hat\varphi \circ \iota = \varphi$. A unicidade do homomorfismo $\hat\varphi$ resulta do Lema 4.8.

A segunda parte do teorema demonstra-se exactamente da mesma forma como nos Teoremas 1.35 e 4.15, com a ressalva de que é preciso invocar o Lema 4.8. $\square$

Corolário 4.27. *Se Γ e Λ são grafos v-profinitos isomorfos então $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ e $\overline{\Omega}_\Lambda\mathsf{V}$ são semigrupóides compactos isomorfos.*

Naturalmente, dado um grafo v-profinito Γ, o semigrupóide $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ denomina-se *semigrupo profinito livre gerado por* Γ *relativamente à pseudovariedade* V, ou simplesmente *semigrupo pró-*V *livre gerado por* Γ.

4.4.1 Pseudovariedades contendo os semigrupos finitos nilpotentes

Vamos usar as hipóteses e notações para Γ e para os objectos que lhe estão relacionados tal como foram introduzidas no início desta secção. Se $i \leq j$, consideremos o único homomorfismo de semigrupóides $\delta_{j,i}{}^{+}$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_j \arrow[r, hook] \arrow[d, "\delta_{j,i}"'] & \Gamma_j^{+} \arrow[d, "\delta_{j,i}{}^{+}"] \\ \Gamma_i \arrow[r, hook] & \Gamma_i^{+} \end{tikzcd}$$

A família

$$\{\delta_{j,i}{}^{+} : \Gamma_j^{+} \to \Gamma_i^{+} \,|\, i, j \in I, i \leq j\}$$

é um sistema dirigido de homomorfismos de semigrupóides. Vamos denotar por $\delta_i{}^{+}$ a projecção canónica de $\varprojlim_{j\in I} \Gamma_j^{+}$ em Γ_i^{+}. O grafo Γ é um subgrafo de $\varprojlim_{j\in I} \Gamma_j^{+}$.

Lema 4.28. *Os semigrupóides Γ^{+} e $\varprojlim_{i\in I} \Gamma_i^{+}$ podem ser identificados na medida em que o único homomorfismo $\jmath$ de semigrupóides entre Γ^{+} e $\varprojlim_{i\in I} \Gamma_i^{+}$ que estende a inclusão é um isomorfismo.*

Demonstração. É claro que $\jmath$ é uma bijecção entre os respectivos conjuntos de vértices. Seja $w = w_1 \cdots w_k$ um caminho de Γ, onde $w_1, \ldots, w_k$ são arestas de Γ. Dado $i \in I$, temos a seguinte igualdade:

$$\delta_i{}^{+} \circ \jmath(w) = \delta_i(w_1) \cdots \delta_i(w_k) \tag{4.9}$$

Suponhamos que $u = u_1 \cdots u_n$ e $v = v_1 \cdots v_m$ são caminhos de Γ, onde $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ são arestas de Γ. Se $\jmath(u) = \jmath(v)$, então de (4.9) deduzimos a seguinte igualdade entre elementos de Γ_i^{+}:

$$\delta_i(u_1) \cdots \delta_i(u_n) = \delta_i(v_1) \cdots \delta_i(v_m)$$

Logo $n = m$ e $\delta_i{}^{+}(u_l) = \delta_i{}^{+}(v_l)$, para qualquer $l \in \{1, \ldots, n\}$. Como i é arbitrário, concluímos que $u_l = v_l$, para qualquer $l \in \{1, \ldots, n\}$. Ou seja, $u = v$.

Por outro lado, seja q um elemento de $\varprojlim_{i\in I} \Gamma_i^{+}$. Uma vez que o sistema dirigido que define Γ é sobrejectivo, para cada $i \in I$ existem $q_{i,1}, \ldots, q_{i,n_i} \in \Gamma$ tais que $\delta_i{}^{+}(q) = \delta_i(q_{i,1}) \cdots \delta_i(q_{i,n_i})$. Se $i \leq j$ então, como $\delta_i{}^{+} = \delta_{j,i}{}^{+} \circ \delta_j{}^{+}$, temos

$$\delta_i(q_{i,1}) \cdots \delta_i(q_{i,n_i}) = \delta_i(q_{j,1}) \cdots \delta_j(q_{j,n_j})$$

Logo

$$j \geq i \Rightarrow \big(n_j = n_i \quad \text{e} \quad \delta_i(q_{i,l}) = \delta_i(q_{j,l}) \quad \forall l \in \{1, \ldots, n_i\}\big). \tag{4.10}$$

Em particular, se i_1 e i_2 são elementos quaisquer de I, então $n_{i_1} = n_{i_2} = n_l$, para qualquer l tal que $i_1 \leq l$ e $i_2 \leq l$. Como I é dirigido, um tal l existe sempre, pelo que a rede $(n_i)_{i\in I}$ tem valor constante n. Seja F um subconjunto finito de I. Então existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ para qualquer $i \in F$. De acordo com a condição (4.10), temos

$$q_{k,l} \in \bigcap_{i\in F} \delta_i^{-1}\delta_i(q_{i,l}).$$

O conjunto $\delta_i^{-1}\delta_i(q_{i,l})$ é fechado para qualquer $i \in I$. Então, uma vez que Γ é compacto e $\bigcap_{i\in F}\delta_i^{-1}\delta_i(q_{i,l}) \neq \emptyset$ para qualquer subconjunto finito F de I, o conjunto $\bigcap_{i\in I}\delta_i^{-1}\delta_i(q_{i,l})$ é não vazio. Seja q_l um seu elemento. Supondo que $l < n$, temos

$$\omega(q_l) = (\omega(\delta_i(q_l)))_{i\in I} = (\omega(\delta_i(q_{i,l})))_{i\in I} = (\alpha(\delta_i(q_{i,l+1})))_{i\in I} = (\alpha(\delta_i(q_{l+1})))_{i\in I} = \alpha(q_{l+1}).$$

Como $q_1,\ldots,q_n$ são arestas consecutivas, podemos considerar o elemento $\jmath(q_1\cdots q_n)$ da imagem de $\jmath$. Então

$$\delta_i^+(\jmath(q_1\cdots q_n)) = \delta_i(q_1)\cdots\delta_i(q_n) = \delta_i(q_{i,1})\cdots\delta_i(q_{i,n}) = \delta_i{}^+(q).$$

Como i é arbitrário, concluímos que $q = \jmath(q_1\cdots q_n)$. Logo $\jmath$ é sobrejectiva. □

Proposição 4.29. *Sejam* V *uma pseudovariedade de semigrupóides e* Γ *um grafo v-profinito. Se* V *contém semigrupos não triviais então* $\iota : \Gamma \to \Omega_\Gamma\mathsf{V}$ *é um mergulho. Suponhamos que* V *contém* N. *Então* ι^+ *é um isomorfismo de semigrupóides entre* Γ^+ *e* $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$. *Os elementos de* $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$ *são pontos isolados do fecho de* $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$ *em* $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$.

Demonstração. Vamos continuar com as mesmas notações para Γ e para os objectos que lhe estão relacionados que têm sido usados ao longo desta secção.

Comecemos por supor que V contém semigrupos não triviais. Sejam u e v elementos distintos de Γ. Então existe $i \in I$ tal que $\delta_i(u) \neq \delta_i(v)$. O homomorfismo de grafos ι_i é um mergulho, pela Proposição 4.18. Logo $\iota_i(\delta_i(u)) \neq \iota_i(\delta_i(v))$. Como $\iota(w) = (\iota_i \circ \delta_i(w))_{i\in I}$, isto mostra que ι é um mergulho.

Suponhamos que V contém N. A função $\iota^+ : \Gamma^+ \to \Omega_\Gamma\mathsf{V}$ é um homomorfismo quociente de semigrupóides. Queremos mostrar que é uma função injectiva. Seja $w = w_1\ldots w_n$ um caminho de Γ, onde $w_1,\ldots,w_n$ são arestas consecutivas de Γ. Então, para qualquer $i \in I$,

$$\hat{\delta}_i(\iota^+(w)) = \hat{\delta}_i(\iota(w_1))\cdots\hat{\delta}_i(\iota(w_n)) = \iota_i(\delta_i(w_1))\cdots\iota_i(\delta_i(w_n)) = \iota_i{}^+(\delta_i{}^+(w)). \tag{4.11}$$

Sejam u e v arestas de Γ^+. Suponhamos que $\iota^+(u) = \iota^+(v)$. Então por (4.11) temos $\iota_i{}^+(\delta_i{}^+(u)) = \iota_i{}^+(\delta_i{}^+(v))$ para qualquer $i \in I$. Da Proposição 4.18 deduzimos que $\delta_i{}^+(u) = \delta_i{}^+(v)$ para qualquer $i \in I$. Então $u = v$ pelo Lema 4.28.

A demonstração de que os elementos de $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$ são pontos isolados em $\overline{\Omega_\Gamma\mathsf{V}}$ é totalmente decalcada do último parágrafo da demonstração da Proposição 4.29, com a diferença de que no lugar de $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$ devemos considerar $\overline{\Omega_\Gamma\mathsf{V}}$. □

Em conformidade com a Proposição 4.29, vamos considerar Γ^+ como um subsemigrupóide de $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$.

Corolário 4.30. *Para qualquer pseudovariedade de semigrupóides* V *que contém* N, *existem grafos profinitos* Γ *tais que* $\Omega_\Gamma\mathsf{V}$ *não é denso em* $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V}$.

Demonstração. Basta considerar o grafo $\Sigma(\mathcal{Z})$ da Proposição 4.5 e aplicar as Proposições 4.5 e 4.29. □

4.4.2 Problemas

Problema 4.31. *Existe algum grafo v-profinito* $\Gamma = \varprojlim_{i\in I}\Gamma_i$ *tal que* $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{V} \neq \varprojlim_{i\in I}\overline{\Omega}_{\Gamma_i}\mathsf{V}$*? — onde* $\varprojlim_{i\in I}\Gamma_i$ *simboliza um sistema projectivo sobrejectivo de grafos compactos com um número finito de vértices.*

Problema 4.32. *Consideremos uma pseudovariedade* V *de semigrupóides finitos. Um semigrupóide pró-*V *é um limite projectivo de semigrupóides de* V*? Em que medida se pode generalizar o Teorema 4.11?*

Sem entrar em muitos detalhes, se quisermos generalizar as demonstrações que o autor conhece do Teorema 4.11 ou do Teorema 1.34 (ver por exemplo [Alm02c, Secção 4]), deparámonos com um obstáculo: a imagem de um subsemigrupóide por um homomorfismo contínuo entre semigrupóides compactos não é necessariamente um subsemigrupóide do conjunto de chegada (Exemplos 4.1 e 4.2). No que diz respeito ao Teorema 4.11 esse problema é contornado devido ao facto de que, graças ao Lema 4.10, é suficiente considerar homomorfismos quocientes nesses casos. A proposição seguinte é o melhor que o autor conseguiu até ao momento, combinando os métodos conhecidos com o Corolário 4.26. Dispensámo-nos de exibir a demonstração.

Proposição 4.33. *Consideremos uma pseudovariedade* V *de semigrupóides finitos. Seja* S *um semigrupóide topológico. As seguintes condições são equivalentes:*

1. S *é pró-*V*;*
2. S *é um subsemigrupóide fechado de um limite projectivo de semigrupóides de* V*.*

Capítulo 5

O semigrupóide profinito livre associado a um sistema simbólico

Este capítulo é constituído apenas por resultados originais obtidos em colaboração com Almeida. Nele vamos investigar os semigrupóides profinitos gerados pelos grafos das órbitas de sistemas simbólicos. Tais grafos em geral são infinitos, pelo que esta investigação pode ajudar a responder a várias questões sobre o que foi exposto no capítulo anterior. Por exemplo, vamos desse modo mostrar que o ordinal $\mathfrak{o}(X)$ definido na página 99 pode ser um ordinal numerável arbitrariamente grande; que pode ser igual a 2; e que se o grafo gerador é o grafo das órbitas de um sistema simbólico minimal então é igual a 1.

Ao longo deste capítulo, $\mathcal{X}$ designa um sistema simbólico genérico de $A^{\mathbb{Z}}$, e V uma pseudovariedade de semigrupos que contém $\mathscr{L}\mathsf{I}$. Isto permite-nos considerar as funções t_n e i_n com domínio em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, para qualquer inteiro não negativo n.

Para cada grafo profinito Γ vamos denotar por $\widehat{\Gamma}$ o semigrupóide $\overline{\Omega}_\Gamma\mathsf{gV}$. Como gV contém N, podemos considerar Γ^+ como sendo um subgrafo de $\widehat{\Gamma}$, pela Proposição 4.29.

Como a estrutura de $\Sigma(\mathcal{X})$ define um invariante de conjugação completo, também a estrutura de $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$ é um invariante de conjugação completo, o que constitui uma motivação adicional para estudar $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$. A propósito, iremos deduzir desse estudo uma nova demonstração do Corolário 3.42 para o caso em que $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$. Teremos oportunidade ao longo deste capítulo de apreciar por diversas vezes a utilidade da Proposição 3.6 sobre pseudovariedades da forma $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$.

Relacionada com a questão sobre o valor que o ordinal $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X}))$ pode assumir, está a questão de saber como é que os grafos $\Sigma(\mathcal{X})$, $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$ e $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ se relacionam entre si. De acordo com a Proposição 4.5, existe um sistema simbólico sófico $\mathcal{Z}$ tal que $\overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+} \neq \widehat{\Sigma}(\mathcal{Z})$. Essa situação contrasta com a próxima proposição.

Proposição 5.1. *Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de tipo finito então $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X}) = \widehat{\Sigma}(\mathcal{X}) = \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{X}$ é de tipo finito com passo N. Então $\mathcal{X}$ é de tipo finito com passo n para qualquer inteiro n maior do que N. Seja n tal que $2n \geq N$. Consideremos um caminho $q = q_1 \cdots q_k$ sobre $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$, onde $q_1, \ldots, q_k$ são arestas consecutivas de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$. Pela Proposição 2.9 existe $x \in \mathcal{X}$ tal que

$$q_1 = x_{[-n,n]},\ q_2 = x_{[-n+1,n+1]},\ \ldots,\ q_{k-1} = x_{[-n+k-2,n+k-2]},\ q_k = x_{[-n+k-1,n+k-1]}.$$

Seja p o único caminho de $\Sigma(\mathcal{X})$ que começa em x e acaba em $\sigma^k(x)$. Temos $\hat{\pi}_{2n}(p) =$

q. Portanto, $\hat{\pi}_{2n}(\Sigma(\mathcal{X})^+) = \Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$, donde $\hat{\pi}_{2n}\Big(\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}\Big) = \overline{\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+}$. Ora $\overline{\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+} = \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$, pelo Teorema 4.15, pois $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$ é um grafo finito. O resultado segue então da Proposição 1.8. $\square$

5.1 Etiquetagem

Vamos denotar por μ o homomorfismo de grafos contínuo de $\Sigma(\mathcal{X})$ em A que associa a cada aresta $(x, \sigma(x))$ de $\Sigma(\mathcal{X})$ a letra x_0, e por μ_n o homomorfismo de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$ em A que associa a cada aresta $x_{[-n,n]}$ de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$ a letra x_0. Temos $\mu_n \circ \pi_n = \mu$, e se $n \leq m$ então $\mu_n \circ \pi_{m,n} = \mu_m$.

Como $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é um semigrupo pró-V, pelo Teorema 4.15 existe um único homomorfismo contínuo de semigrupóides $\hat{\mu}_n$ de $\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e tal que a restrição de $\hat{\mu}_n$ a $\Sigma_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ é igual a μ_n. A imagem por $\hat{\mu}_n$ de uma aresta q de $\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ é referida como sendo a *etiqueta de* q.

$$\begin{tikzcd} \Sigma_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\mu_n"'] & \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \arrow[d, dashed, "\hat{\mu}_n"] \\ & \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \end{tikzcd}$$

Se $n \leq m$ então $\hat{\mu}_n \circ \hat{\pi}_{m,n}$ é um homomorfismo contínuo de semigrupóides cuja restrição a $\Sigma_{2m}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ coincide com μ_m, pelo que $\hat{\mu}_n \circ \hat{\pi}_{m,n} = \hat{\mu}_m$. Então

$$\hat{\mu}_m \circ \hat{\pi}_m = (\hat{\mu}_1 \circ \hat{\pi}_{m,1}) \circ \hat{\pi}_m = \hat{\mu}_1 \circ (\hat{\pi}_{m,1} \circ \hat{\pi}_m) = \hat{\mu}_1 \circ \hat{\pi}_1.$$

Daí resulta que se $q \in \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ então a sucessão $(\hat{\mu}_n(\hat{\pi}_n(q)))_n$ tem um valor constante, designado *etiqueta de* q e denotado por $\hat{\mu}(q)$. A função $\hat{\mu}$ assim definida é um homomorfismo contínuo de semigrupóides de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.

Reparemos que os semigrupóides $\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ e $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ são subsemigrupóides fechados de $\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ e $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$, respectivamente, pois $\Sigma(\mathcal{X}) \subseteq \Sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$. Pelo Lema 4.8 a restrição de $\hat{\mu}$ a $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$ é o único homomorfismo contínuo de semigrupóides de $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$ em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ cuja restrição a $\Sigma(\mathcal{X})$ é igual a μ.

Os conjuntos da forma $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X})$ só foram definidos relativamente a pseudovariedades que contêm $\mathscr{L}\mathsf{SI}$. Independentemente de qual é a pseudovariedade V que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$, o conjunto $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X}) \cap A^+$ é sempre o mesmo subconjunto de A^+, pelo que na proposição seguinte basta-nos supor que $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{V}$ (o que garante que os elementos de A^+ estão contidos em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e são elementos isolados de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$).

Proposição 5.2. *Os conjuntos* $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X}) \cap A^+$ *e* $\hat{\mu}_n(\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+)$ *são iguais.*

Demonstração. Seja u um elemento do conjunto $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X}) \cap A^+$. Uma vez que tal conjunto é prolongável, existe $x \in A^{\mathbb{Z}}$ tal que $x_{[0,|u|-1]} = u$ e $L_{2n+1}(x) \subseteq L(\mathcal{X})$. Então podemos considerar o seguinte caminho de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$:

$$\boxed{x_{[-n,n-1]}} \xrightarrow{x_{[-n,n]}} \boxed{x_{[-n+1,n]}} \xrightarrow{x_{[-n+1,n+1]}} \boxed{x_{[-n+2,n+1]}} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{x_{[|u|-1-n,|u|-1+n]}} \boxed{x_{[|u|-n,|u|-1+n]}}$$

A sua etiqueta é u. Logo $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X}) \cap A^+ \subseteq \hat{\mu}_n(\Sigma_{2n}(\mathcal{X}))$.

Reciprocamente, se q é um caminho de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$ de comprimento $2n+1$, então a $(n+1)$-ésima aresta de q é $\hat{\mu}_n(q)$. Logo $\hat{\mu}_n(q) \in L(\mathcal{X})$. E como $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$ é um grafo essencial, se q é um caminho de comprimento menor ou igual a $2n+1$ então q é factor de um caminho p de comprimento $2n+1$. Logo $\hat{\mu}_n(q) \in L(\mathcal{X})$, uma vez que $\hat{\mu}_n(q)$ é factor de $\hat{\mu}_n(p)$. Também é claro que qualquer factor de comprimento $2n+1$ da etiqueta de um caminho q sobre $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$ é da forma $\hat{\mu}_n(p)$, para algum factor p de q com comprimento $2n+1$. Logo $\hat{\mu}_n(\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+) \subseteq \mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X})$. $\square$

Lema 5.3. *Consideremos uma aresta* $q : x_{[-n,n-1]} \to y_{[-n,n-1]}$ *de* $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$*, onde* $x, y \in \mathcal{X}$*. Seja* $u = \hat{\mu}(q)$*. Se* $k = \min\{|u|, n\}$ *então* $x_{[0,k-1]} = \mathrm{i}_k(u)$ *e* $y_{[-k,-1]} = \mathrm{t}_k(u)$*.*

Demonstração. O resultado é obviamente verdadeiro se $q \in \Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$.

O caso geral segue então quase imediatamente da densidade de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$ em $\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$, decorrente de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})$ ser um grafo finito e do Teorema 4.15. Com efeito, por essa razão existe uma sucessão $(q_l)_l$ de elementos de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$ convergente para q. Se $u_l = \hat{\mu}(q_l)$ então, pela continuidade das várias funções envolvidas, a partir de certa ordem temos

$$\begin{aligned} \alpha(q_l) = x_{[-n,n-1]}, \quad \omega(q_l) = y_{[-n,n-1]}, \\ \mathrm{i}_k(u_l) = \mathrm{i}_k(u), \quad \mathrm{t}_k(u_l) = \mathrm{i}_k(u), \\ \min\{|u_l|, n\} = \min\{|u|, n\} = k. \end{aligned}$$

Ora de acordo com a observação inicial sobre o caso dos elementos de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$, temos $x_{[0,k-1]} = \mathrm{i}_k(u_l)$ e $y_{[-k,-1]} = \mathrm{t}_k(u_l)$, para l suficientemente grande. $\square$

Lema 5.4. *Seja* $q : x \to y$ *uma aresta de* $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$*. Seja* $u = \hat{\mu}(q)$*. Se* $u \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V} \setminus A^+$ *então* $\overrightarrow{u} = x_{[0,+\infty[}$ *e* $\overleftarrow{u} = y_{]-\infty,-1]}$*. Se* $u \in A^+$ *então* q *é a única aresta de* $\Sigma(\mathcal{X})^+$ *que começa em* x *e acaba em* $\sigma^{|u|}(x)$*.*

Demonstração. Seja n um inteiro positivo. Temos $\alpha(\hat{\pi}_n(q)) = \hat{\pi}_n(\alpha(q)) = x_{[-n,n-1]}$. Do mesmo modo, $\omega(\hat{\pi}_n(q)) = y_{[-n,n-1]}$. Seja $k = \min\{|u|, n\}$. Como $\hat{\mu}_n(\hat{\pi}_n(q)) = u$, pelo Lema 5.3 temos $x_{[0,k-1]} = \mathrm{i}_k(u)$ e $y_{[-k,-1]} = \mathrm{t}_k(u)$.

Suponhamos que $u \notin A^+$. Então $k = n$. Sendo n arbitrário, concluímos que $\overrightarrow{u} = x_{[0,+\infty[}$ e $\overleftarrow{u} = y_{]-\infty,-1]}$.

Suponhamos que $u \in A^+$. Seja $(q_l)_l$ uma sucessão de elementos de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$ convergente para $\hat{\pi}_n(q)$. Então a partir de certa ordem temos $\hat{\mu}_n(q_l) = u$. Logo, considerando uma subsucessão se necessário, podemos supor que $|q_l|_l$ é constante igual a $|u|$. Como existe um número finito de elementos de $\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$ com comprimento $|u|$, deduzimos que $\pi_n(q) \in \Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$. Logo $q \in \Sigma(\mathcal{X})^+$, uma vez que n é arbitrário (cf. Lema 4.28). Evidentemente q é a única aresta de $\Sigma(\mathcal{X})^+$ que começa em x e acaba em $\sigma^{|q|}(x)$. Ora $|q| = |\hat{\mu}(q)| = |u|$. $\square$

Note-se que a topologia de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ é induzida por uma métrica, uma vez que se trata de um limite projectivo de uma quantidade numerável de espaços métricos [Wil70, Teorema 22.3]. Graças a este facto, na demonstração do próximo lema podemos utilizar sucessões no lugar de redes.

Lema 5.5. *Os conjuntos* $\overline{L(\mathcal{X})}$ *e* $\hat{\mu}\Big(\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}\Big)$ *são iguais.*

Demonstração. Se $v \in L(\mathcal{X})$ então existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $x_{[0,|v|-1]} = v$, e v é a etiqueta do único caminho sobre $\Sigma(\mathcal{X})$ que vai de x a $\sigma^{|v|}(x)$. Logo, se $u \in \overline{L(\mathcal{X})}$ então existe uma sucessão

$(q_k)_k$ de caminhos de $\Sigma(\mathcal{X})$ tal que $(\hat{\mu}(q_k))_k$ converge para u. Como $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ é compacto, a sucessão $(q_k)_k$ tem alguma subsucessão convergente para uma aresta q de $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$. Pela continuidade de $\hat{\mu}$, temos $\hat{\mu}(q) = u$.

Reciprocamente, é claro que $\hat{\mu}(\Sigma(\mathcal{X})^+) \subseteq L(\mathcal{X})$, donde $\hat{\mu}\Big(\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}\Big) \subseteq \overline{L(\mathcal{X})}$. □

À medida que avançamos, torna-se necessário enriquecer a pseudovariedade V. Na próxima Proposição é necessário supor que V contém $\mathscr{L}\mathsf{Sl}$ para que se possa considerar o conjunto $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ de forma conveniente, isto é, como a intersecção dos aberto-fechados da forma $\mathscr{M}_n(\mathcal{X})$.

Proposição 5.6. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *que contém* $\mathscr{L}\mathsf{Sl}$. *Os conjuntos* $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ *e* $\hat{\mu}\Big(\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})\Big)$ *são iguais.*

Demonstração. Comecemos por supor que q é uma aresta de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$. Seja $u = \hat{\mu}(q)$. Consideremos um qualquer inteiro positivo n. Então $u = \hat{\mu}_n(\underline{\pi_n(q)})$. Ora $\hat{\mu}_n(\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+) \subseteq \mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X})$, de acordo com a Proposição 5.2. Como $\overline{\Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+} = \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$, $\hat{\mu}_n$ é contínua e $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X})$ é fechado, concluímos que $u \in \mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X})$. Logo $u \in \bigcap_{n\geq 1} \mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X}) = \mathscr{M}(\mathcal{X})$.

Reciprocamente, suponhamos que u é um elemento de $\mathscr{M}(\mathcal{X})$. Se $u \in A^+$ então $u \in L(\mathcal{X})$, bastando-nos então invocar o Lema 5.5. Suponhamos que $u \notin A^+$. A Proposição 3.27 diz-nos que $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ é prolongável. Então, como $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ é fechado, pelo Lema 3.9 existem $v, w \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V} \setminus A^+$ tais que $vuw \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Sejam $(v_k)_k$, $(u_k)_k$ e $(w_k)_k$ sucessões de elementos de A^+ convergentes para v, u e w, respectivamente. Para cada k, existem no grafo $\Sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ caminhos consecutivos p_k, q_k e r_k tais que $\hat{\mu}(p_k) = v_k$, $\hat{\mu}(q_k) = u_k$ e $\hat{\mu}(r_k) = w_k$. Seja n um qualquer inteiro positivo. Como $vuw \in \mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X})$ e $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X})$ é aberto, e como u, v e w têm comprimento infinito, existe N tal que se $k \geq N$ então $v_k u_k w_k \in \mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X})$ e v_k, u_k e w_k têm comprimento maior do que n. Então todas as arestas que constituem o caminho $\hat{\pi}_n(q_k)$ são elementos de $L_{2n+1}(\mathcal{X})$. Logo $\hat{\pi}_n(q_k) \in \Sigma_{2n}(\mathcal{X})^+$. Seja q um ponto de acumulação da sucessão $(q_k)_k$. Então $\hat{\pi}_n(q) \in \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$, para qualquer inteiro positivo n. Ou seja, $q \in \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$. Ora $\hat{\mu}(q) = u$. □

5.2 Fidelidade

Duas arestas co-terminais de $\Sigma(\mathcal{X})^+$ com a mesma etiqueta são iguais (de facto basta supor que ambas as arestas têm o mesmo comprimento, de acordo com o Lema 5.4). Vamos em seguida mostrar que, sob certas condições, esse fenómeno também ocorre com as arestas infinitas de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$.

Proposição 5.7. *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos que contém* B_2 *e tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Então o homomorfismo* $\hat{\mu}_n : \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \to \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *é fiel.*

Demonstração. Como $\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ tem um número finito de vértices, podemos considerar o semigrupo topológico $T = (\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}))_{cd}$ (cf. Observação 4.12). Pelo Corolário 4.14, sabemos que T é pró-V. Logo existe um único homomorfismo contínuo $\Theta : \overline{\Omega}_{A^{2n+1}}\mathsf{V} \to T$ tal que $\Theta(u) = u$ para qualquer $u \in A^{2n+1} = E_{\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})}$. Como $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$, de acordo com a Proposição 1.59, o homomorfismo de grafos $\Psi : \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \to \overline{\Omega}_{A^{2n+1}}\mathsf{V}$ que faz corresponder a cada aresta q de $\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ a pseudopalavra $\Phi^{\mathsf{V}}_{2n}[\mathrm{i}_n(\alpha(q)) \cdot \hat{\mu}_n(q) \cdot \mathrm{t}_n(\omega(q))]$ está bem definido e é contínuo. Facilmente se verifica por indução sobre o comprimento de q que $\Theta(\Psi(q)) = q$, para qualquer $q \in E_{\Sigma_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})^+}$. Como Ψ é uma função contínua e $\overline{\Sigma_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})^+} = \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$, concluímos que $\Theta(\Psi(q)) = q$, para qualquer $q \in E_{\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})}$. É claro que se q_1 e q_2 são arestas co-terminais com a mesma etiqueta, então $\Psi(q_1) = \Psi(q_2)$, e portanto $q_1 = q_2$. $\square$

Corolário 5.8. *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos que contém* B_2 *e tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Então o homomorfismo* $\hat{\mu} : \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \to \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *é fiel.*

Note-se que a hipótese $B_2 \in \mathsf{V}$ é redundante no que diz respeito à parte mais significativa das pseudovariedades que surgem neste capítulo, pois $B_2 \in \mathscr{L}\mathsf{SI}$.

Ser-nos-á útil fazer representações esquemáticas das arestas de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$. Uma aresta entre dois vértices x e y etiquetada u será representada por:

$$x \xrightarrow{\;q|u\;} y$$

No lugar de $q|u$ poderemos escrever simplesmente u, ficando a representação resumida a

$$x \xrightarrow{\;u\;} y$$

Na verdade, se estivermos a considerar uma pseudovariedade V tal que $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$ e $B_2 \in \mathsf{V}$ então não se perdeu informação, pois $\hat{\mu}$ é fiel.

5.3 Factorizações boas

Consideremos uma aresta q de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$. Suponhamos que $q_1, \ldots, q_n$ são arestas consecutivas de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ tais que $q = q_1 \cdots q_n$. Seja $u_i = \hat{\mu}(q_i)$. Fazendo $x_0 = \alpha(q_1)$ e $x_i = \omega(q_i)$, para $1 \leq i \leq n$, dizemos então que a aresta q é factorizada de acordo com o seguinte esquema:

$$\boxed{x_0} \xrightarrow{\;q_1|u_1\;} \boxed{x_1} \xrightarrow{\;q_2|u_2\;} \boxed{x_2} \xrightarrow{\;q_2|u_2\;} \cdots \xrightarrow{\;q_{n-1}|u_{n-1}\;} \boxed{x_{n-1}} \xrightarrow{\;q_n|u_n\;} \boxed{x_n} \tag{5.1}$$

Consideremos um subgrafo G de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$. Se o conjunto de factores de q

$$\left\{\textstyle\prod_{i=k}^{l} q_i \,|\, 1 \leq k \leq l \leq n\right\}$$

estiver contido em E_{G} então dizemos que $q_1 \cdots q_n$ é uma *factorização boa de* q *em* G, ou que q tem uma *factorização boa em* G segundo o esquema (5.1). Note-se que se q tem uma *factorização boa em* G então em particular $q \in \mathrm{G}$.

Lema 5.9. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledm \mathsf{V}$. *Sejam* $u, v, w, t \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ *tais que* $uv = wt$. *Então existe* $z \in (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1$ *para o qual se verifica pelo menos uma das seguintes condições:*

1. $u = wz$ *e* $zv = t$,

2. $uz = w$ *e* $v = zt$.

Demonstração. Consideremos sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ de elementos de A^+ convergentes para u e v, respectivamente. A sucessão $(u_n v_n)_n$ converge para wt. Então, pelos Lemas 3.4 e 3.5, existe uma subsucessão $(u_{n_k} v_{n_k})_k$ e sucessões $(w_n)_n$ e $(t_n)_n$ de elementos de A^+ tais que $u_{n_k} v_{n_k} = w_k t_k$, e $\lim w_k = w$ e $\lim t_k = t$. É claro que para cada k existe $z_k \in A^*$ tal que pelo menos uma das seguintes condições se verifica:

1. $u_{n_k} = w_k z_k$ e $z_k v_{n_k} = t_k$,

2. $u_{n_k} z_k = w_k$ e $v_{n_k} = z_k t_k$.

Pelo menos um dos conjuntos

$$P = \{k : u_{n_k} = w_k z_k \text{ e } z_k v_{n_k} = t_k\}, \quad Q = \{k : u_{n_k} z_k = w_k \text{ e } v_{n_k} = z_k t_k\},$$

é infinito. Suponhamos que P é infinito. Seja z um ponto aderente da subsucessão $(z_k)_{k\in P}$. Então $u = wz$ e $zv = t$. Do mesmo modo, se Q for infinito então existe $z \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{V})^1$ tal que $uz = w$ e $v = zt$. □

Proposição 5.10. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$. *Seja* $q \in \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$. *Suponhamos que* $\hat{\mu}(q) = u_1 \cdots u_n$, *onde* $u_i \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$. *Dado um ordinal* β, *seja* G *qualquer um dos grafos* $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta$ *ou* $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle$. *Se* $q \in \mathrm{G}$ *então existe uma factorização* $q = q_1 \cdots q_n$ *que é boa em* G *e tal que* $\hat{\mu}(q_i) = u_i$, *para qualquer* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Consideremos as seguintes condições:

$P(\mathrm{G}, q, n)$**:** *"Suponhamos que* $\hat{\mu}(q) = u_1 \cdots u_n$, *onde* $u_i \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$. *Então existe uma factorização* $q = q_1 \cdots q_n$ *que é boa em* G *e tal que* $\hat{\mu}(q_i) = u_i$, *para qualquer* $i \in \{1, \ldots, n\}$."

$R(\beta)$**:** $\forall q \in \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta, \forall n,\ P(\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta, q, n)$.

$S(\beta)$**:** $\forall q \in \langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle, \forall n,\ P(\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle, q, n)$.

Queremos mostrar que a condição $R(\beta) \wedge S(\beta)$ é verdadeira para qualquer ordinal β. Vamos fazê-lo por indução transfinita sobre β.

O caso $\beta = 0$ é trivial e o caso limite do passo indutivo também não oferece dificuldades.

Vejamos o caso sucessor do passo indutivo. Seja β um ordinal tal que a condição $R(\beta) \wedge S(\beta)$ é verdadeira. Suponhamos que $q \in \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+}$ e que $\hat{\mu}(q) = u_1 \cdots u_n$, onde $u_i \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$. Então existe uma sucessão $(q_k)_k$ de elementos de $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle$ convergente para q. Pelo Lema 3.5, existe uma subsucessão $(q_{k_l})_l$ e sucessões $(u_{i,l})_l$ de elementos de $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$ convergentes para u_i tais que $\hat{\mu}(q_{k_l}) = u_{1,l} u_{2,l} \cdots u_{n-1,l} u_{n,l}$. Como $S(\beta)$ é uma condição verdadeira, existe uma factorização $q = q_{1,l} \cdots q_{n,l}$ que é boa em $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle$ e tal que $\hat{\mu}(q_{i,l}) = u_{i,l}$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\overline{\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle}$ é compacto, a sucessão $(q_{1,k}, \ldots, q_{n,k})_k$ tem alguma subsucessão convergente para um n-uplo $(q_1, \ldots, q_n)$ de arestas consecutivas de $\overline{\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle}$. É claro que $q_1 \cdots q_n$ é uma factorização de q boa em $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+}$ e que $\hat{\mu}(q_i) = u_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, \}$. Logo $R(\beta^+)$ é uma condição verdadeira.

Suponhamos agora que $q \in \langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle$. Então existem arestas consecutivas $q_1, \ldots, q_l$ de $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+}$ tais que $q = q_1 \cdots q_l$. Seja $\lambda(q)$ o menor valor possível para l. Vamos provar $P(\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle, q, n)$ por indução sobre $\lambda(q) + n$. Se $\lambda(q) = 1$ então $q \in \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+}$, e portanto $P(\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle, q, n)$ é verdadeira para qualquer n, simplesmente porque $R(\beta^+)$ é verdadeira. Por outro lado, a condição $P(\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle, q, 1)$ é obviamente verdadeira, para qualquer valor de $\lambda(q)$. Logo a condição $P(\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle, q, n)$ é verdadeira quando $\lambda(q) + n \leq 3$. Seja $k \geq 4$. Suponhamos que $P(\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle, q, n)$ é verdadeira quando $\lambda(q) + n < k$. Sejam q e n tais que $\lambda(q) + n = k$ e $\lambda(q), n > 1$. Suponhamos que $\hat{\mu}(q) = u_1 \cdots u_n$, onde $u_i \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$. Sejam $q_1, \ldots, q_{\lambda(q)}$ arestas consecutivas de $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+}$ tais que $q = q_1 \cdots q_{\lambda(q)}$. Consideremos a aresta $q' = q_1 \cdots q_{\lambda(q)-1}$. Como $\hat{\mu}(q') \hat{\mu}(q_{\lambda(q)}) = (u_1 \cdots u_{n-1}) u_n$, pelo Lema 5.9 existe $z \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{V})^1$ tal que pelo menos uma das seguintes condições se verifica:

1. $\hat{\mu}(q') = u_1 \cdots u_{n-1} z$ e $z \hat{\mu}(q_{\lambda(q)}) = u_n$,

2. $\hat{\mu}(q')z = u_1 \cdots u_{n-1}$ e $\hat{\mu}(q_{\lambda(q)}) = zu_n$.

Suponhamos que se verifica a primeira condição. Como $\lambda(q') + n < \lambda(q) + n$, por hipótese indutiva existe uma factorização boa $s_1 \cdots s_{n-1}t$ de q' em $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle$ para a qual $\hat{\mu}(s_i) = u_i$ se $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ e $\hat{\mu}(t) = z$ (se $z = 1$ então consideramos t como sendo um caminho vazio). Seja $s_n = tq_{\lambda(q)}$. Então $s_1 \cdots s_{n-1}s_n$ é uma factorização boa de $q'q_{\lambda(q)} = q$ em $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle$. Como $\hat{\mu}(s_i) = u_i$ para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$, fica provado $P(\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle, q, n)$.

Suponhamos que se verifica a segunda condição. Como $R(\beta^+)$ é uma condição verdadeira, existem arestas $r, t \in \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+}$ tais que $q_{\lambda(q)} = rt$, $\hat{\mu}(r) = z$ e $\hat{\mu}(t) = u_n$ (se $z = 1$ então consideramos r como sendo um caminho vazio). Temos $\lambda(q'r) \leq \lambda(q') + 1 \leq \lambda(q)$, donde $\lambda(q'r) + (n-1) < \lambda(q) + n$. Como $\hat{\mu}(q'r) = u_1 \cdots u_{n-1}$, por hipótese indutiva existe uma factorização boa $s_1 \cdots s_{n-1}$ de $q'r$ em $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle$ para a qual $\hat{\mu}(s_i) = u_i$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Logo $s_1 \cdots s_{n-1}t$ é uma factorização boa de q tal que a etiqueta do i-ésimo factor é u_i. Também neste caso fica provado $P(\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta^+} \rangle, q, n)$, o que conclui o passo indutivo sobre $\lambda(q) + n$. Logo a condição $S(\beta^+)$ é verdadeira.

Ou seja, mostrámos que $R(\beta^+) \wedge S(\beta^+)$ é verdadeira, concluindo a demonstração do caso sucessor do passo indutivo da indução sobre β. □

Corolário 5.11. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Dado um ordinal* β, *seja* G *qualquer um dos grafos* $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta$ *ou* $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle$. *Sejam* $p, q, r \in \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ *tais que* $p = qr$. *Se* $p \in \mathrm{G}$ *então* $q, r \in \mathrm{G}$.

Demonstração. Se $p \in \mathrm{G}$ então existe uma factorização $p = q'r'$ que é boa em G e tal que $\hat{\mu}(q) = \hat{\mu}(q')$ e $\hat{\mu}(r) = \hat{\mu}(r')$. Pelo Lema 5.4, q e q' são co-terminais, e r e r' também são co-terminais. Logo $q = q'$ e $r = r'$, uma vez que $\hat{\mu}$ é fiel pelo Corolário 5.8. □

Corolário 5.12. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$. *Suponhamos que* $u_1 \cdots u_n \in \overline{L(\mathcal{X})}$, *onde* $u_i \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$. *Suponhamos também que* $u_1, u_n \notin A^+$. *Para cada* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *sejam* $v_i = u_1 \cdots u_i$ *e* $w_i = u_{i+1} \cdots u_n$. *Então existe uma aresta* q *com uma factorização boa em* $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ *segundo o seguinte esquema:*

$$\circ \xrightarrow{q_1|u_1} \boxed{\overleftarrow{v_1}.\overrightarrow{w_1}} \xrightarrow{q_2|u_2} \boxed{\overleftarrow{v_2}.\overrightarrow{w_2}} \xrightarrow{q_3|u_3} \cdots \xrightarrow{q_{n-1}|u_{n-1}} \boxed{\overleftarrow{v_{n-1}}.\overrightarrow{w_{n-1}}} \xrightarrow{q_n|u_n} \circ$$

Demonstração. Existe uma aresta q em $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ cuja etiqueta é $u_1 \cdots u_n$, pelo Lema 5.5. Ora $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} = \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_1$. Basta então aplicar a Proposição 5.10 e o Lema 5.4. □

No Apêndice C dão-se exemplos de soluções da cadeia de equações $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$ na variável V, e de soluções da equação $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$ que não são soluções da equação $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$.

5.4 O ordinal $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X}))$

Como $\Sigma(\mathcal{X})$ é um invariante de conjugação, o ordinal

$$\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X})) = \inf\{\beta : \beta \text{ é um ordinal}, |\beta| \leq |\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil|, \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta = \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil\}.$$

também é um invariante de conjugação. De acordo com a Proposição 5.1, se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de tipo finito então $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X})) = 1$. Na Proposição 4.5, vimos o exemplo de um sistema simbólico sófico $\mathcal{Z}$ tal que $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X})) > 1$. Vamos procurar calcular $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X}))$ para alguns casos, ou pelo menos encontrar majorantes e minorantes para $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X}))$.

5.4.1 O ordinal $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X}))$ pode ser muito grande

Lema 5.13. *Sejam $u, v, z \in A^+$ tais que $z^2u = vz^2$ e $|u| < |z|$. Se o comprimento de z é um número primo então $z \in a^+$ para algum $a \in A$.*

Demonstração. Como $z^2u = vz^2$, a palavra zu tem z como sufixo. Ou seja, existe $v' \in A^*$ tal que $zu = v'z$. Note-se que $|v'| = |u|$. Logo v' é o prefixo de z de comprimento $|u|$, uma vez que $|u| < |z|$. Como $z^2u = vz^2$, a palavra v é um prefixo de z de comprimento $|u|$, donde $v' = v$. Logo $vz^2 = z^2u = zvz$, donde $vz = zv$. Por [Lal79, Corolário 5.3], a igualdade $vz = zv$ implica a existência de $w \in A^+$ e de $k, l > 0$ tais que $z = w^k$ e $v = w^l$. Como $|z| = k|w|$ e $|z|$ é primo, concluímos que $k = 1$ ou $|w| = 1$. Se $k = 1$ então $z = w$ e $|v| = l|w| \geq |z|$, o que é contraditório. Logo $w \in A$. $\square$

Um subconjunto C de A^+ é um *código circular* [BPS85] se para quaisquer inteiros $n, m \geq 1$ e palavras $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_m \in C$, $p \in A^*$ e $s \in A^+$, as igualdades $sc_2 \cdots c_np = d_1d_2 \cdots d_m$ e $ps = c_1$ implicam $n = m$, $p = 1$ e $c_i = d_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Lema 5.14. *Consideremos uma palavra z de A^+ de comprimento primo tal que z não é uma potência de um elemento de A. Se $k \geq 4$ então Az^k é um código circular.*

Demonstração. Sejam $n, m \geq 1$ e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in A$, $p \in A^*$, $s \in A^+$ tais que $ps = a_1z^k$ e

$$sa_2z^k \cdots a_nz^kp = b_1z^k \cdots b_mz^k.$$

Suponhamos que $p \neq 1$. Então $p = a_1z^ip'$ e $s = s'z^j$ para alguns $p', s' \in A^*$, $i, j \geq 0$ tais que $p's' = z$ e $|p'| < |z|$. Note-se que $i + j + 1 = k$.

Suponhamos que $p' = 1$. Então $s = z^{j+1}$, pelo que, mesmo que $n = 1$, temos a garantia de que $z^{j+1}a_1z^i$ é um sufixo de $b_1z^k \cdots b_mz^k$. Ora $|z^{j+1}a_1z^i| = |b_mz^k|$, donde $z^{j+1}a_1z^i = b_mz^k$. Logo $z^{j+1}a_1 = b_mz^{k-i}$. Como $i < k$, então $za_1 = cz$, para algum $c \in A$, o que implica $z = {a_1}^{|z|} = c^{|z|}$ (cf. [Lal79, Lema 5.1]). Tal contraria uma das hipóteses do enunciado. Logo $p' \neq 1$.

Suponhamos que $i \geq 2$. Então z^2p' é um sufixo de b_mz^k, pelo que $z^2p' = qz^2$ para algum $q \in A^{|p'|}$. Mas tal não é possível, pelo Lema 5.13. Logo $i \leq 1$.

Suponhamos que $i = 0$. Como z^2p é um sufixo de z^3 e $p = a_1p'$, existe $r \in A^{|a_1p'|}$ tal que $z^2a_1p' = rz^2$. Temos $|a_1p'| \leq |z|$. Mas pelo Lema 5.13 só podemos ter $|a_1p'| = |z|$. Então $a_1p' = z = p's'$, pelo que $p' = a_1^{|p'|}$, donde $z = a_1^{|z|}$, o que não é possível. Logo $i = 1$ e portanto $j = k - 2$.

A palavra $sa_2 = s'z^{k-2}a_2$ (ou $s'z^{k-2}a_1$, se $n = 1$) é um prefixo de b_1z^k. Suponhamos que $s' = 1$. Então, como $k - 2 \geq 1$, temos $b_1z \in zA$. Mas tal implica $z = {b_1}^{|z|}$. Logo $s' \neq 1$.

Suponhamos que $s' \in A$. Então $|p'| = |z| - 1$. Ora $p = a_1zp'$, e $|a_1zp'| = |z^2|$. Logo $a_1zp' = z^2$, donde $dp' = z = p's'$, para algum $d \in A$. Mas então $p' = d^{|z|-1}$, donde $z = d^{|z|}$, o que não é possível. Portanto $s' = es''$ para alguns $e \in A$ e $s'' \in A^+$. Como $s''z^{k-2}a_2$ é um prefixo de z^k e $k - 2 \geq 2$, temos $s''z^2 \in z^2A^{|s''|}$. Mas tal não é possível, pelo Lema 5.13.

Esgotadas todas as possibilidades, concluímos que $p = 1$. Como os elementos de Az^k têm todos o mesmo comprimento, deduzimos que $n = m$ e $a_i = b_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto Az^k é um código circular. $\square$

Corolário 5.15. *Consideremos uma palavra z de A^+ de comprimento primo tal que z não é uma potência de um elemento de A. Seja $k \geq 4$. Sejam $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \in A$ e $u \in A^+$, $w \in A^*$ tais que $a_1z^ka_2z^k = wb_2z^ku$, w é um sufixo de b_1z^k e u é um prefixo de b_3z^k. Então $w = 1$ e $u = a_2z^k = b_3z^k$.*

Demonstração. Como $u \neq 1$, existem $i \geq 0$ e $u' \in A^*$ para os quais $u = b_3 z^i u'$ e u' é um prefixo de z tal que $0 \leq |u'| < |z|$. Como $|u| + |w| = k|z| + 1$ e $u \neq 1$, tem-se $|w| < k|z| + 1$. Logo existem $j \geq 0$ e $w' \in A^*$ para os quais $w = w' z^j$ e w' é um sufixo de z tal que $0 \leq |w'| < |z|$. Temos

$$k|z| = |u| + |w| - 1 = (1 + i|z| + |u'|) + (|w'| + j|z|) - 1 = (i + j)|z| + |u'| + |w'|,$$

pelo que $|u'| + |w'|$ é um múltiplo de $|z|$. Como $|u'| + |w'| < |z| + |z| = |2z|$, resulta que $|u'w'| = |z|$ ou $|u'w'| = 0$. Sendo u' um prefixo de z e w' um sufixo de z, conclui-se que $u'w' = z$ ou $u'w' = 1$. Logo $uw = b_3 z^i u' w' z^j \in b_3 z^*$. Como $|uw| = k|z| + 1$, temos $uw \in Az^k$. Então $w = 1$ pelo Lema 5.14. $\square$

Dado $v \in A^+$, denotamos por ψ_v a função de $A^{\mathbb{Z}}$ em $A^{\mathbb{Z}}$ definida pela seguinte correspondência:

$$\ldots x_{-2} x_{-1}.x_0 x_1 x_2 x_3 \ldots \mapsto \ldots v x_{-2} v x_{-1} v.x_0 v x_1 v x_2 v x_3 v \ldots .$$

Naturalmente, ψ_1 define-se como sendo a identidade em $A^{\mathbb{Z}}$. Note-se que $\psi_v \circ \sigma = \sigma^{|v|+1} \circ \psi_v$. O conjunto

$$\mathcal{X}_v = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{O}(\psi_v(x))$$

está contido em todos os sistemas simbólicos que contêm $\psi_v(\mathcal{X})$.

Observação 5.16. O conjunto $\mathcal{X}_v$ é um sistema simbólico.

Jusificação. Como $\mathcal{X}_v$ é uma união de órbitas, apenas temos que verificar que $\mathcal{X}_v$ é fechado. Seja $(y^{(k)})_k$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{X}_v$ convergente para y. Temos $y^{(k)} = \sigma^{n_k}(\psi_v(x^{(k)}))$ para alguns $x^{(k)} \in \mathcal{X}$ e $n_k \in \mathbb{Z}$. Como $\psi_v \circ \sigma = \sigma^{|v|+1} \circ \psi_v$, podemos escolher $x^{(k)}$ de modo a que $0 \leq n_k < |v| + 1$. Como a sucessão $(n_k)_k$ é limitada, tem alguma subsucessão $(n_{k_l})_l$ de valor constante C. Como $\mathcal{X}$ é compacto, considerando subsucessões se necessário, podemos supor que $(x^{(k_l)})_l$ converge para um elemento x de $\mathcal{X}$. Então $\psi^C(x) = \lim_{l \to +\infty} \psi^N((x^{(k_l)})_l) = y$. Logo $y \in \mathcal{X}_v$. $\square$

Lema 5.17. *Suponhamos que z é uma palavra de A^+ de comprimento primo tal que z não é uma potência de um elemento de A. Seja $k \geq 4$. Se $x, y \in \mathcal{X}$ e $n \in \mathbb{Z}$ são tais que $\psi_{z^k}(y) = \sigma^n(\psi_{z^k}(x))$ então n é um múltiplo de $k|z| + 1$.*

Demonstração. Existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $n = q(k|z| + 1) + r$ e $0 \leq r < k|z| + 1$.

$$\psi_{z^k}(y) = \sigma^n \circ \psi_{z^k}(x) = \sigma^r \circ \sigma^{q(k|z|+1)} \circ \psi_{z^k}(x) = \sigma^r \circ \psi_{z^k} \circ \sigma^q(x).$$

Se $y = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $\sigma^q(x) = (b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ então

$$\begin{aligned}\psi_{z^k}((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) &= \ldots a_{-3} z^k a_{-2} z^k a_{-1} z^k.a_0 z^k a_1 z^k a_2 z^k a_3 z^k \ldots = \\ \sigma^r \circ \psi_{z^k}((b_i)_{i \in \mathbb{Z}}) &= \ldots b_{-3} z^k b_{-2} z^k b_{-1} z^k u.v b_1 z^k b_2 z^k b_3 z^k \ldots .\end{aligned}$$

onde u, v são elementos de A^+ tais que $b_{-1} z^k = uv$ e $|u| = r$. Se w for o sufixo de comprimento $k|z| + 1 - r$ de $b_{-2} z^k$ então $a_{-2} z^k a_{-1} z^k = w b_{-1} z^k u$. Suponhamos que $u \neq 1$. Então $w = 1$, pelo Corolário 5.15, donde $k|z| + 1 - r = 0$, o que é absurdo porque $r < k|z| + 1$. Logo $u = 1$, ou seja, $r = 0$. $\square$

Lema 5.18. *Suponhamos que z é uma palavra de A^+ de comprimento primo tal que z não é uma potência de um elemento de A. Seja $k \geq 4$. Seja $x \in \mathcal{X}$. Se $(y^{(n)})_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{X}_{z^k}$ convergente para $\psi_{z^k}(x)$ então existe uma sucessão $(x^{(m)})_m$ de elementos de $\mathcal{X}$ convergente para x e uma subsucessão $(y^{(n_m)})_m$ tal que $y^{(n_m)} = \psi_{z^k}(x^{(m)})$, para qualquer m.*

Demonstração. Como $y^{(n)} \in \mathcal{X}_{z^k}$, existem $x^{(n)} \in \mathcal{X}$ e um inteiro r_n tais que $y^{(n)} = \sigma^{r_n}\psi_{z^k}(x^{(n)})$ e $0 \leq r_n < k|z| + 1$. A sucessão $(x^{(n)})_n$ tem alguma subsucessão $(x^{(n_i)})_i$ convergente para um elemento x' de $\mathcal{X}$. Como $(r_{n_i})_i$ é uma sucessão limitada, tem alguma subsucessão $(r_{n_{i_j}})_j$ de valor constante C. Então

$$\sigma^C\psi_{z^k}(x') = \lim_{j\to+\infty} \sigma^C\psi_{z^k}(x^{(n_{i_j})}) = \lim_{j\to+\infty} y^{(n_{i_j})} = \psi_{z^k}(x).$$

Logo $C = 0$, pelo Lema 5.17. Portanto $\psi_{z^k}(x') = \psi_{z^k}(x)$. Como ψ_{z^k} é injectiva, concluímos que $x' = x$. Portanto a sucessão $(x^{(n_{i_j})})_j$ converge para x e $\psi_{z^k}(x^{(n_{i_j})}) = y^{(n_{i_j})}$ para qualquer j. □

Sejam $v \in A^+$ e $x \in \mathcal{X}$. De acordo com o Lema 5.4, existe um único caminho de $\Sigma(\mathcal{X}_v)^+$ de comprimento $|v|+1$ que começa em $\psi_v(x)$ e acaba em $\sigma^{|v|+1}(\psi_v(x)) = \psi_v(\sigma(x))$. Denotemos por $\big(\psi_v(x), \psi_v(\sigma(x))\big)$ esse caminho único. Consideremos a seguinte função:

$$\begin{array}{rrcl} \Psi_v : & \Sigma(\mathcal{X}) & \to & \Sigma(\mathcal{X}_v)^+ \\ & x & \mapsto & \psi_v(x) \\ & (x, \sigma(x)) & \mapsto & \big(\psi_v(x), \psi_v(\sigma(x))\big), \qquad x \in \mathcal{X}. \end{array}$$

É claro que Ψ_v é um homomorfismo de grafos. Seja $\hat{\Psi}_v$ o único homomorfismo contínuo de semigrupóides compactos de $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$ em $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X}_v)$ cuja restrição a $\Sigma(\mathcal{X})$ é Ψ_v.

Observação 5.19. Para qualquer ordinal β tem-se

$$\hat{\Psi}_v(E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta}(x,y)) \subseteq E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X}_v)\rceil_\beta}(\psi_v(x), \psi_v(y)),$$
$$\hat{\Psi}_v(E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle}(x,y)) \subseteq E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_v)\rceil_\beta\rangle}(\psi_v(x), \psi_v(y)),$$

para quaisquer $x, y \in \mathcal{X}$.

Justificação. Tem-se $\hat{\Psi}_v(\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta) \subseteq \lceil\Psi_v(\Sigma(\mathcal{X}))\rceil_\beta$ e $\hat{\Psi}_v(\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle) \subseteq \langle\lceil\Psi_v(\Sigma(\mathcal{X}))\rceil_\beta\rangle$, pelo Lema 4.25. □

Proposição 5.20. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos V tal que $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$. Suponhamos que z é uma palavra de A^+ de comprimento primo tal que z não é uma potência de um elemento de A. Seja $k \geq 4$. Para qualquer ordinal β tem-se*

$$\hat{\Psi}_{z^k}(E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta}(x,y)) = E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_\beta}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y)),$$
$$\hat{\Psi}_{z^k}(E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle}(x,y)) = E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_\beta\rangle}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y)),$$

para quaisquer $x, y \in \mathcal{X}$.

Demonstração. De acordo com a Observação 5.19, falta-nos mostrar a seguinte conjunção de condições:

$$P(\beta): \forall x, y \in \mathcal{X},\ E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_\beta}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y)) \subseteq \hat{\Psi}_{z^k}(E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta}(x, y)),$$

$$Q(\beta): \forall x, y \in \mathcal{X},\ E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_\beta\rangle}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y)) \subseteq \hat{\Psi}_{z^k}(E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle}(x, y)).$$

Vamos provar $P(\beta) \wedge Q(\beta)$ por indução transfinita sobre β.

Pelo Lema 5.17, temos $\psi_{z^k}(y) \neq \sigma(\psi_{z^k}(x))$, logo $E_{\Sigma(\mathcal{X})}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y)) = \emptyset$, o que mostra a proposição $P(0)$. Suponhamos que $s \in E_{\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})^+}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y))$. Então $\psi_{z^k}(y) = \sigma^{|s|}(\psi_{z^k}(x))$. Pelo Lema 5.17, existe um inteiro positivo n tal que $|s| = n(k|z| + 1)$. Então $\psi_{z^k}(y) = \psi_{z^k}(\sigma^n(x))$. Como ψ_{z^k} é injectiva, segue-se que $y = \sigma^n(x)$. Logo $E_{\Sigma(\mathcal{X})^+}(x, y)$ tem um elemento s' de comprimento n. O comprimento de $\hat{\Psi}_{z^k}(s')$ é igual a $|s'|(k|z| + 1)$, pela definição de Ψ_{z^k}. Logo s e $\hat{\Psi}_{z^k}(s')$ são elementos de $E_{\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})^+}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y))$, com o mesmo comprimento, pelo que $s = \hat{\Psi}_{z^k}(s')$ (cf. Lema 5.4). Fica assim provada a conjunção $P(0) \wedge Q(0)$.

Suponhamos que a proposição $P(\beta) \wedge Q(\beta)$ é verdadeira. Consideremos um elemento s de $E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y))$. Então existe uma sucessão $(s_n)_n$ de elementos de $\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle$ convergente para s. As sucessões $(\alpha(s_n))_n$ e $(\omega(s_n))_n$ convergem respectivamente para $\psi_{z^k}(x)$ e $\psi_{z^k}(y)$. Pelo Lema 5.18, considerando subsucessões se necessário, podemos supor que $\alpha(s_n) = \psi_{z^k}(x^{(n)})$ e $\omega(s_n) = \psi_{z^k}(y^{(n)})$ para qualquer n, para algumas sucessões $(x^{(n)})_n$ e $(y^{(n)})_n$ de elementos de $\mathcal{X}$ convergentes para x e y, respectivamente. Como $Q(\beta)$ é uma proposição verdadeira, para cada n existe $s'_n \in E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle}(x^{(n)}, y^{(n)})$ tal que $s_n = \hat{\Psi}_{z^k}(s'_n)$. Seja s' um ponto aderente da sucessão $(s'_n)_n$. Temos $s' \in E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}}(x, y)$ e $\hat{\Psi}_{z^k}(s') = \lim_{n\to\infty} s_n = s$, o que mostra a proposição $P(\beta^+)$.

Para cada inteiro positivo l seja $\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}\rangle_l$ o conjunto das arestas de $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$ da forma $q_1 \cdots q_l$, onde $q_1, \ldots, q_l$ são arestas consecutivas de $\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}$. Note-se que

$$\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}\rangle = \bigcup_{l\geq 1} \langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}\rangle_l.$$

Logo $Q(\beta)$ ficará provada se mostrarmos por indução sobre l a seguinte proposição:

$$Q(\beta, l): \forall x, y \in \mathcal{X},\ E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}\rangle_l}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y)) \subseteq \hat{\Psi}_{z^k}(E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}\rangle_l}(x, y)).$$

O passo inicial $l = 1$ corresponde à Proposição $P(\beta^+)$, que sabemos ser verdadeira. Suponhamos agora que $l > 1$ e que $Q(\beta, l')$ é verdadeira quando $l' < l$. Seja r um elemento de $E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}\rangle_l}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(y))$. Então existem arestas consecutivas $r_1, \ldots, r_l$ de $\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}$ tais que $r = r_1 \cdots r_l$. Como a proposição $Q(0)$ é verdadeira, podemos supor que $r \notin \Sigma(\mathcal{X})^+$. Então existe $i \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $r_i \notin \Sigma(\mathcal{X})^+$. Como $l > 1$, temos $i < l$ ou $i > 1$. Vamos supor que $i < l$ (o caso $i > 1$ é análogo). Existe um inteiro positivo m tal que $\omega(r_i) = \sigma^m(\psi_{z^k}(x'))$ para algum $x' \in \mathcal{X}$. Seja $u = \mathrm{t}_m(\hat{\mu}(r_i))$. Como $r_i \notin \Sigma(\mathcal{X})^+$, a palavra u tem comprimento m. Sejam $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$ sucessões de elementos de $\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle$ convergentes para r_i e r_{i+1}, respectivamente. Como $(\overline{\Omega}_A \mathsf{V})u$ é aberto, podemos supor que para qualquer n existe $w_n \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$ tal que $\hat{\mu}(p_n) = w_n u$. Pela Proposição 5.10, existem arestas p'_n e p''_n pertencentes a $\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle$ tais que $p_n = p'_n p''_n$, $\hat{\mu}(p'_n) = w_n$ e $\hat{\mu}(p''_n) = u$. Para cada n, seja q'_n a única aresta de $\Sigma(\mathcal{X})^+$ que começa em $\sigma^{-m}(\alpha(q_n))$ e acaba em $\alpha(q_n)$. Seja (p', p'', q') um ponto aderente da sucessão $(p'_n, p''_n, q'_n)_n$. Como $(|q'_n|)_n$ é a sucessão constante de valor m, e apenas existe um número finito de caminhos de $\Sigma(\mathcal{X})$ de comprimento m, conclui-se que q' é um caminho de $\Sigma(\mathcal{X})$ que começa em $\sigma^{-m}(\omega(q'))$ e acaba em $\omega(q')$. Por outro lado, como $\hat{\mu}(p'') = u \in A^+$, pelo Lema 5.4 sabemos que p'' é o único caminho de $\Sigma(\mathcal{X})$ que começa em $\sigma^{-m}(\omega(p''))$ e acaba em $\omega(p'')$. Como

$$\omega(p'') = \omega(r_i) = \alpha(r_{i+1}) = \lim_{n\to\infty} \omega(q'_n) = \omega(q'),$$

conclui-se que $p'' = q'$. Portanto

$$r = (r_1 \cdots r_{i-1}p')((q'r_{i+1})r_{i+2}\cdots r_l).$$

Note-se que $p' \in \lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}$ e que

$$\omega(p') = \alpha(p'') = \sigma^{-m}(\omega(p'')) = \sigma^{-m}(\omega(r_i)) = \psi_{z^k}(x'),$$

donde

$$r_1 \cdots r_{i-1}p' \in E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}\rangle_i}(\psi_{z^k}(x), \psi_{z^k}(x')).$$

Por outro lado, como $q'_nq''_n \in \langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta}\rangle$ e $q'r_{i+1}$ é um ponto de aderente da sucessão $(q'_nq''_n)_n$, tem-se $q'r_{i+1} \in \lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}$. Logo

$$(q'r_{i+1})r_{i+2}\cdots r_l \in E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X}_{z^k})\rceil_{\beta^+}\rangle_{l-i}}(\psi_{z^k}(x'), \psi_{z^k}(y))$$

Como as proposições $Q(\beta, i)$ e $Q(\beta, l-i)$ são verdadeiras por hipótese de indução, concluímos que

$$r_1 \cdots r_{i-1}p' \in \hat{\Psi}_{z^k}(E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}\rangle_i}(x, x')), \quad (q'r_{i+1})r_{i+2}\cdots r_l \in \hat{\Psi}_{z^k}(E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}\rangle_{l-i}}(x', y)),$$

donde

$$r_1 \cdots r_l \in \hat{\Psi}_{z^k}(E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}\rangle_l}(x, y)).$$

Fica assim provada a proposição $Q(\beta, l)$. Logo $Q(\beta^+)$ é um proposição verdadeira.

Mostrámos o caso sucessor do passo indutivo na demonstração da conjunção $P(\beta) \wedge Q(\beta)$. O caso limite do passo indutivo é trivial. □

Lema 5.21. *Seja z uma palavra de A^+ que não é potência de um elemento de A. Sejam k e l inteiros positivos tais que $k < l$, e $k|z| + 1$ e $l|z| + 1$ são primos entre si. Existe um inteiro positivo n_0 tal que se $n > n_0$ então $L_n((A^{\mathbb{Z}})_{z^k}) \cap L_n((A^{\mathbb{Z}})_{z^l}) = \emptyset$.*

Demonstração. O que queremos mostrar pode ser reformulado como $(A^{\mathbb{Z}})_{z^k} \cap (A^{\mathbb{Z}})_{z^l} = \emptyset$ (a formulação adoptada será posteriormente mais conveniente). Suponhamos que $(A^{\mathbb{Z}})_{z^k} \cap (A^{\mathbb{Z}})_{z^l} \neq \emptyset$. Então existem sucessões $(a_i)_{i\geq 1}$ e $(b_i)_{i\geq 1}$ de elementos de A tais que

$$z^k a_1 z^k a_2 z^k a_3 z^k a_4 \ldots = v z^l b_1 z^l b_2 u z^l b_3 z^l b_4 \ldots.$$

para algum $v \in A^+$. Como $k|z| + 1$ e $l|z| + 1$ são primos entre si, existem inteiros $r, s > 1$ tais que $r(k|z| + 1) - s(l|z| + 1) = |v|$. Logo

$$|z^k a_1 z^k a_2 z^k \cdots a_{r-1} z^k| = r(k|z| + 1) - 1 = |v| + s(l|z| + 1) - 1 = |v z^l b_1 z^l b_2 z^l \cdots b_{s-1} z^l|,$$

donde

$$z^k a_1 z^k a_2 z^k \cdots a_{r-1} z^k = v z^l b_1 z^l b_2 z^l \cdots b_{s-1} z^l.$$

Como $0 < k < l$, existe $c \in A$ tal que $za_{r-1} = cz$. Mas então $z = c^{|z|}$, o que contradiz a hipótese do enunciado. □

Lema 5.22. *Seja z uma palavra de A^+ que não é potência de um elemento de A. Para qualquer $k > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que se $n > n_0$ então $L_n((A^{\mathbb{Z}})_{z^k}) \cap L_n(z^\infty) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que o lema é falso. Então existe uma sucessão $(a_i)_{i\geq 1}$ de elementos de A tal que

$$z^k a_1 z^k a_2 z^k a_3 z^k a_4 \ldots = vzzzzz\ldots$$

para algum $v \in A^*$. Como $k|z|+1$ e $|z|$ são primos entre si, existem inteiros $r, s > 0$ tais que $r(k|z|+1) - s|z| = |v|$. Logo

$$|z^k a_1 z^k a_2 z^k \cdots a_{r-1} z^k a_r| = r(k|z|+1) = |v| + s|z| = |vz^s|,$$

donde

$$z^k a_1 z^k a_2 z^k \cdots a_{r-1} z^k a_r = vz^s.$$

Como k e s são positivos, existe $c \in A$ tal que $za_r = cz$. Mas então $z = c^{|z|}$, o que contradiz a hipótese do enunciado. $\square$

Teorema 5.23. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos V tal que $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$. Suponhamos que A é o alfabeto de duas letras $\{a, b\}$. Se β é um ordinal numerável então existe um sistema simbólico numerável $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ tal que $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X})) > \beta$.*

Demonstração. Consideremos a seguinte proposição:

$Q(\beta, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, c)$**:** *se β é um ordinal numerável, e $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ são sistemas simbólicos, e $c \in A^+$, então*

1. *$\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ e $\mathcal{X}$ é numerável;*
2. *$a^\infty \in \mathcal{Y}$, $b^\infty \in \mathcal{X}$ e $c^\infty \in \mathcal{Z}$;*
3. *os grafos $\lceil \Sigma(\mathcal{Y}) \rceil_1$ e $\lceil \Sigma(\mathcal{Z}) \rceil_1$ são fortemente conexos;*
4. *o conjunto $\{s \in E_{\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_{\beta+} \rangle} : \alpha(s) \in \mathcal{Y}$ e $\omega(s) \in \mathcal{Z}\}$, o qual denotamos por $E_\beta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, é não vazio;*
5. *$E_\beta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \cap \langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle = \emptyset$.*

Seja $P(\beta)$ a proposição

$$\exists \mathcal{X}\, \exists \mathcal{Y}\, \exists \mathcal{Z}\, \exists c \;\; Q(\beta, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, c).$$

Se $Q(\beta, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, c)$ é uma proposição verdadeira então $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico numerável de $A^{\mathbb{Z}}$ tal que $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X})) > \beta$. Portanto o teorema ficará demonstrado se provarmos por indução transfinita a proposição $P(\beta)$, o que faremos.

Verifiquemos o passo inicial $\beta = 0$. Consideremos os sistemas simbólicos $\mathcal{Y} = \{a^\infty\}$, $\mathcal{Z} = \{b^\infty\}$ e $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{O}(a^{-\infty}.b^{+\infty})}$. O conjunto das arestas que começam em a^∞ e acabam em b^∞ não contém nenhum elemento de $\Sigma(\mathcal{X})^+ = \langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_0 \rangle$, donde $E_0(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \cap \langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_0 \rangle = \emptyset$. Por outro lado, denotando por q_n o único caminho de $\Sigma(\mathcal{X})^+$ que começa em $\sigma^{-n}(a^{-\infty}.b^{+\infty})$ e acaba em $\sigma^n(a^{-\infty}.b^{+\infty})$, se q for um ponto de acumulação de $(q_n)_n$ então q é um elemento de $E_0(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Portanto $P(0)$ é uma proposição verdadeira.

Suponhamos que $P(\beta)$ é uma proposição verdadeira. Consideremos sistemas simbólicos $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ e uma palavra c de A^+ tal que $Q(\beta, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, c)$ é uma proposição verdadeira. Como $\mathcal{X} \neq A^{\mathbb{Z}}$ (pois $|\mathcal{X}| < |A^{\mathbb{Z}}|$), existe $z \in A^+ \setminus L(\mathcal{X})$. Se necessário prolongando z, podemos supor que $|z|$ é um número primo. Pelo teorema de Dirichlet [IR82, Capítulo 16, Secção 1], a sucessão $(n|z|+1)_n$ tem uma infinidade de números primos. Para cada inteiro positivo k, seja e_k o k-ésimo inteiro positivo maior do que 3 tal que $e_k|z|+1$ é primo. Definimos $e_0 = 0$.

Sejam $h > 0$ e $c_1, \dots, c_h \in A$ tais que $c = c_1 \cdots c_h$. Para cada inteiro não negativo k, seja

$$\begin{aligned} t_k &= \psi_{z^{e_k}}(c)_{]-\infty,-1]}.\psi_{z^{e_{k+1}}}(a^{\infty})_{[0,+\infty[} \\ &= \dots c_1 z^{e_k} c_2 z^{e_k} \dots c_{h-1} z^{e_k} c_h z^{e_k} c_1 z^{e_k} c_2 z^{e_k} \dots c_{h-1} z^{e_k} c_h z^{e_k}.a z^{e_{k+1}} a z^{e_{k+1}} a z^{e_{k+1}} \dots . \end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{Z}'$ o sistema simbólico $\left[\bigcup_{u\in A\,:\,c\in A^*uA^*} \mathcal{O}(z^{-\infty}.uz^{+\infty})\right] \cup \mathcal{O}(z^{\infty})$. O menor sistema simbólico $\mathcal{X}'$ que contém $\bigcup_{k\geq 0}(\mathcal{X}_{z^{e_k}} \cup \{t_k\})$ é o conjunto

$$\mathcal{X}' = \Big[\bigcup_{k\geq 0}(\mathcal{X}_{z^{e_k}} \cup \mathcal{O}(t_k))\Big] \cup \mathcal{Z}'.$$

Observemos que $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{X}'$, $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}' = \emptyset$ e que $\lceil \Sigma(\mathcal{Z}')\rceil_1$ é fortemente conexo. Acresce que $\mathcal{X}'$ é numerável. Estas observações constituem os primeiros passos para mostrarmos que $Q(\beta^+, \mathcal{X}', \mathcal{Y}, \mathcal{Z}', z)$ é uma proposição verdadeira.

Para cada $k \geq 0$ e $n > 0$, seja $q_{k,n}$ o único caminho de $\Sigma(\mathcal{X}')^+$ com origem em $\sigma^{-n}(t_k)$ e término em $\sigma^n(t_n)$. Seja q_k um ponto de acumulação da sucessão $(q_{k,n})_n$. Então q_k tem origem num elemento da órbita de $\psi_{z^{e_k}}(c^{\infty})$, e término num elemento da órbita de $\psi_{z^{e_{k+1}}}(a^{\infty})$. Note-se que $q_k \in \lceil \Sigma(\mathcal{X}')\rceil_1$.

De acordo com os itens (3) e (4) da hipótese $P(\beta)$, existe uma aresta s_0 de $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}\rangle$ que começa num elemento de $\mathcal{Y}$ e acaba em $\alpha(q_0)$. Pelos mesmos itens e pela Observação 5.19, para cada $k \geq 1$, existe uma aresta s_k de $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}_k)\rceil_{\beta^+}\rangle$ que começa em $\omega(q_{k-1})$ e acaba em $\alpha(q_k)$ (ver Figura 5.1). Para cada k, a sequência $s_0q_0s_1q_1s_2q_2\cdots s_kq_k$ é um elemento de $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}\rangle$. Seja q um ponto de acumulação da sucessão $(s_0q_0s_1q_1s_2q_2\cdots s_kq_k)_k$. Então $\omega(q) \in \mathcal{Z}'$ e q pertence a $\lceil \Sigma(\mathcal{X}')\rceil_{(\beta^+)^+}$, e portanto $E_{\beta^+}(\mathcal{X}', \mathcal{Y}, \mathcal{Z}')$ não é vazio.

Suponhamos que existe um elemento de $E_{\beta^+}(\mathcal{X}', \mathcal{Y}, \mathcal{Z}')$ pertencente a $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}\rangle$. Então esse elemento tem algum factor p pertencente a $\lceil \Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta^+}$ que começa num elemento de $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{Z}'$ e acaba num elemento de $\mathcal{Z}'$. Logo existe $k \geq 0$ tal que $\alpha(p) \in U_k = \mathcal{O}(t_{k-1}) \cup \mathcal{X}_{z^{e_k}} \cup \mathcal{O}(t_k)$, onde $\mathcal{O}(t_{-1})$ designa o conjunto vazio (para o caso em que $k = 0$). Pelos Lemas 5.21 e 5.22, se $k \neq l$ então $\mathcal{X}_{z^{e_k}} \cap \mathcal{X}_{z^{e_l}} = \emptyset$, e $\mathcal{X}_{z^{e_k}} \cap \mathcal{Z}' = \emptyset$, para quaisquer $k, l \geq 0$. Portanto, na topologia de $\mathcal{X}'$, os conjuntos U_k e

$$V_k = \Big[\bigcup_{r\geq k+4}(\mathcal{X}_{z^{e_r}} \cup \mathcal{O}(t_r))\Big] \cup \mathcal{Z}',$$

são vizinhanças abertas de $\alpha(p)$ e $\omega(p)$, respectivamente. Seja $(p_n)_n$ uma sucessão de arestas de $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X})\rceil_{\beta}\rangle$ convergente para p. Como α e ω são funções contínuas, existe N tal que se $n \geq N$ então $\alpha(p_N) \in U_k$ e $\omega(p_N) \in V_k$. Se necessário mudando o valor de k, acrescentando-lhe uma unidade, podemos supor que

$$\alpha(p_N) \in \mathcal{O}(t_{k-1}) \cup \mathcal{X}_{z^{e_k}} \quad \text{e} \quad \omega(p_N) \in \mathcal{X}_{z^{e_r}} \cup \mathcal{O}(t_r) \cup \mathcal{Z}',$$

para algum $r \geq k+3$.

Comecemos por supor que $k > 0$. Seja m um qualquer inteiro positivo. Uma vez que $\alpha(p_N) \in \mathcal{O}(t_{k-1}) \cup \mathcal{X}_{z^{e_k}}$, qualquer prefixo finito de $\hat{\mu}(p_N)$ de comprimento suficientemente grande tem algum factor pertencente a $(Az^{e_k})^m$. E como

$$A^*(Az^{e_k})^m A^* = (A^*(Az^{e_k})^m)(A^* \setminus Az^{e_k}A^*),$$

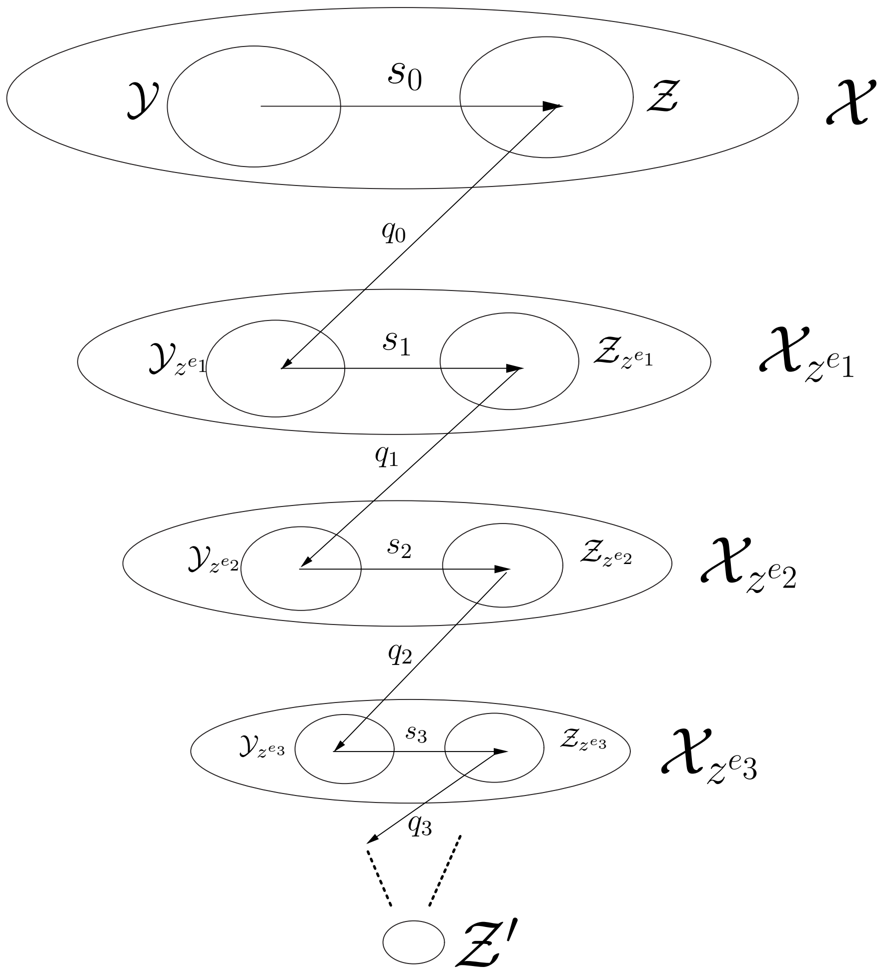


Figura 5.1: Um passo na demonstração do Teorema 5.23.

existe uma factorização $\hat{\mu}(p_N) = \rho_m \nu_m$ tal que

$$\rho_m \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{S})(Az^{e_k})^m \quad \text{e} \quad \nu_m \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{S})^1 \setminus Az^{e_k}(\overline{\Omega}_A \mathsf{S})^1.$$

Note-se que se $m \geq n$ então $\rho_m \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{S})(Az^{e_k})^n$. Sejam ρ e ν pontos aderentes das sucessões $(\rho_m)_m$ e $(\nu_m)_m$. Então

$$\rho \in \bigcap_{n \geq 1} (\overline{\Omega}_A \mathsf{S})(Az^{e_k})^n \quad \text{e} \quad \nu \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{S})^1 \setminus Az^{e_k}(\overline{\Omega}_A \mathsf{S})^1.$$

É imediato que u é uma pseudopalavra infinita. Se ν é uma palavra finita, então $\overleftarrow{\rho\nu} = \omega(p_N)_{]-\infty,-1]} \in \mathcal{X}_{z^{e_r}} \cup \mathcal{O}(t_r) \cup \mathcal{Z}'$. Então

$$(Az^{e_k})^n \subseteq L_m((A^{\mathbb{Z}})_r) \quad \text{qualquer } n \geq 1,$$

ou

$$(Az^{e_k})^n \subseteq L_m(\mathcal{Z}') \quad \text{qualquer } n \geq 1,$$

o que no primeiro caso contradiz o Lema 5.21, e no segundo caso contradiz o Lema 5.22. Logo ν é uma pseudopalavra infinita.

Seja $x = \overleftarrow{\rho}.\overrightarrow{\nu}$. Como $\hat{\mu}(p_N) \in \mathscr{M}(\mathcal{X}')$ pela Proposição 5.6, sabemos que $x \in \mathcal{X}'$. Temos

$$x_{]-\infty,-1]} = \dots a_{-4}z^{e_k}a_{-3}z^{e_k}a_{-2}z^{e_k}a_{-1}z^{e_k}, \quad \text{para alguns } a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots \in A, \tag{5.2}$$

e

$$x_{[0,e_k|z|]} \notin Az^{e_k}. \tag{5.3}$$

De (5.2) e do Lema 5.22 deduzimos que $x \notin \mathcal{Z}'$.

Suponhamos que existe $l \geq 0$ tal que $x \in \mathcal{X}_{z^{e_l}}$. Então, por (5.2),

$$(Az^{e_k})^n \cap L(\mathcal{X}_{z^{e_l}}) \neq \emptyset, \quad \forall n \geq 1. \tag{5.4}$$

Logo $k = l$, pelo Lema 5.21. Portanto, existe uma sucessão $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de elementos de A e palavras $u, v \in A^*$ tais que $uv = b_0z^{e_k}$ e

$$x = \dots b_{-3}z^{e_k}b_{-2}z^{e_k}b_{-1}z^{e_k}u.vb_1z^{e_k}b_2z^{e_k}b_3z^{e_k}\dots$$

Por (5.3), temos

$$0 < |u| < e_k|z| + 1. \tag{5.5}$$

Por (5.2), existe um sufixo w de $b_{-2}z^{e_k}$ tal que

$$wb_{-1}z^{e_k}u = a_{-2}z^{e_k}a_{-1}z^{e_k}. \tag{5.6}$$

Então, como $u \neq 1$ e $e_k \geq 4$, do Corolário 5.15 resulta que $u = a_1z^{e_k}$ que contradiz (5.5). O absurdo surgiu de supormos que $x \in \mathcal{X}_{z^{e_l}}$ para algum $l \geq 0$.

Portanto $x \in \mathcal{O}(t_l)$, para algum $l \geq 0$. Então graças a (5.2) dá-se (5.4), e portanto $k = l$, pelo Lema 5.21.

Até agora supusemos que $k > 0$. Suponhamos que $k = 0$. Então z não é um factor de $\alpha(p_N)$. Como $\omega(p_N)_{]-\infty,-1]}$ tem z como factor, e $A^*zA^* = (A^+ \setminus A^*zA^*)zA^*$, existem pseudopalavras $\rho \in \overline{\Omega}_A\mathsf{S} \setminus (\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1z(\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1$ e $\nu \in z(\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1$ tais que $\hat{\mu}(p_N) = \rho\nu$. Uma vez que $\alpha(p_N) \in \mathcal{X}$, a palavra z não é factor de nenhum prefixo de ρ. Logo ρ é infinita. Se ν fosse finita, então o factor z apareceria apenas um número finito de vezes em $\omega(p_N)_{]-\infty,-1]}$, o que não é possível. Logo ν é infinita. Como z é factor de $\overleftarrow{\rho}.\overrightarrow{\nu}$ mas não de $\overleftarrow{\rho}$, necessariamente $\overleftarrow{\rho}.\overrightarrow{\nu} \in \mathcal{O}(t_0)$.

Em qualquer dos casos, $k = 0$ ou $k > 0$, existem pseudopalavras infinitas ρ, ν tais que $\hat{\mu}(p_N) = \rho\nu$ e $\overleftarrow{\rho}.\overrightarrow{\nu} \in \mathcal{O}(t_k)$. Logo o idempotente $f = (az^{e_{k+1}})^\omega$ é um factor de ν, pelo que $\hat{\mu}(p_N) = \rho'f\nu'$ para algumas pseudopalavras ρ' e ν'. Pela Proposição 5.10, existe uma factorização $p_N = s_1s_2$ que é boa em $\langle E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta}\rangle$ e tal que $\hat{\mu}(s_1) = \rho'f$, $\hat{\mu}(s_2) = f\nu'$. Então $\alpha(s_2) = \overleftrightarrow{f} = \psi_{z^{e_{k+1}}}(a^\infty) \in \mathcal{X}_{z^{e_{k+1}}}$.

Aplicando a s_2 os argumentos que foram aplicados a p_N, concluímos que $\hat{\mu}(s_2) = \rho''\nu''$ para algumas pseudopalavras ρ'' e ν'' tais que $\overleftarrow{\rho''}.\overrightarrow{\nu''} \in \mathcal{O}(t_{k+1})$. O idempotente

$$g = (c_1z^{e_{k+1}}c_2z^{e_{k+1}}\cdots c_{h-1}z^{e_{k+1}}c_hz^{e_{k+1}})^\omega$$

é um factor de ρ''. Logo, aplicando novamente a Proposição 5.10, deduz-se que existe uma factorização $s_2 = s_1's_2'$ que é boa em $\langle E_{\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta}\rangle$ e tal que $\omega(s_1') = \overleftrightarrow{g} = \psi_{z^{e_{k+1}}}(c^\infty)$. Portanto s_1' é um elemento de $E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle}(\psi_{z^{e_{k+1}}}(a^\infty), \psi_{z^{e_{k+1}}}(c^\infty))$. Logo $E_{\langle\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta\rangle}(a^\infty, c^\infty) \neq \emptyset$, pela

Proposição 5.20. Mas tal contradiz o item (5) da proposição $P(\beta)$. O absurdo a que chegámos deve-se a termos suposto que $E_\beta(\mathcal{X}', \mathcal{Y}, \mathcal{Z}') \cap \langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil'_\beta \rangle \neq \emptyset$. Logo $Q(\beta^+, \mathcal{X}', \mathcal{Y}, \mathcal{Z}', z)$ é uma proposição verdadeira. Conclui-se assim que a proposição $P(\beta^+)$ é verdadeira.

Suponhamos agora que β é um ordinal limite numerável e que $P(\gamma)$ é uma proposição verdadeira para qualquer ordinal $\gamma \in \beta$. Para cada $\gamma \in \beta$, sejam $\mathcal{X}_\gamma$, $\mathcal{Y}_\gamma$, $\mathcal{Z}_\gamma$ sistemas simbólicos e $c_\gamma \in A^+$ tais que $Q(\beta, \mathcal{X}_\gamma, \mathcal{Y}_\gamma, \mathcal{Z}_\gamma, c_\gamma)$ é uma proposição verdadeira. Como β é numerável, o conjunto

$$X = \bigcup_{\gamma \in \beta} \mathcal{X}_\gamma$$

é numerável. Logo existe $z \in A^+$ tal que $z \notin L(X)$ e $|z|$ é primo. Tal como fizemos no decorrer da demonstração do caso sucessor do passo indutivo, definimos a sucessão $(e_k)_k$ do seguinte modo: $e_0 = 0$ e se $k > 0$ então e_k é o k-ésimo inteiro positivo maior do que 3 tal que $e_k|z| + 1$ é primo. Consideremos uma enumeração $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ dos elementos de β. Para cada inteiro não negativo k, seja

$$t_k = \psi_{z^{e_k}}(c_{\gamma_k})_{]-\infty,-1]} . \psi_{z^{e_{k+1}}}(a^\infty)_{[0,+\infty[}.$$

Seja $\mathcal{Z}_\beta$ o sistema simbólico $\Big[\bigcup_{u \in A : c \in A^* u A^*} \mathcal{O}(z^{-\infty}.uz^{+\infty})\Big] \cup \mathcal{O}(z^\infty)$. Consideremos o sistema simbólico numerável

$$\mathcal{X}_\beta = \Big[\bigcup_{k \geq 0} (\mathcal{X}_{\gamma_k})_{z^{e_k}} \cup \mathcal{O}(t_k))\Big] \cup \mathcal{Z}_\beta.$$

Então a proposição $Q(\beta, \mathcal{X}_\beta, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}_\beta, z)$ é verdadeira, o que se mostra de forma semelhante ao que foi feito para o caso sucessor do passo indutivo.

Portanto $P(\beta)$ é uma proposição verdadeira, qualquer que seja o ordinal β. $\square$

5.4.2 Condições para majorar $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X}))$

Vamos agora procurar condições que nos permitam indicar um majorante de $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X}))$. Note-se desde logo que $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X})) \leq |\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil| \leq 2^{\aleph_0}$. Vamos atacar este problema tendo por base a observação trivial de que se $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta = \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ então $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil = \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ e $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{X})) \leq \beta$.

Proposição 5.24. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Seja* G *um subgrafo de* $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$ *da forma* $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta$ *ou da forma* $\langle \lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_\beta \rangle$, *para algum ordinal* β. *Se* $\hat{\mu}(\mathrm{G}) = \mathscr{M}(\mathcal{X})$ *então* $\mathrm{G} = \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$.

Demonstração. Suponhamos que $\hat{\mu}(\mathrm{G}) = \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Consideremos uma aresta $q : x \to y$ de $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$. Seja $u = \hat{\mu}(q)$. Então $u \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$, pela Proposição 5.6. Queremos mostrar que $q \in \mathrm{G}$. Temos $\Sigma(\mathcal{X})^+ \subseteq \mathrm{G}$, uma vez que $\hat{\mu}(\Sigma(\mathcal{X})) = L_1(\mathcal{X}) \neq \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Por isso podemos desde já supor que $q \notin \Sigma(\mathcal{X})^+$. Logo $u \notin A^+$, pelo Lema 5.4. Sejam v e w pontos de acumulação em $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$ das sucessões $(x_{[-n,-1]})_n$ e $(y_{[0,n]})_n$, respectivamente. Então $vuw \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Por hipótese, existe uma aresta p de G tal que $\hat{\mu}(p) = vuw$. Pela Proposição 5.10, existe uma factorização $p = p_1 p_2 p_3$ que é boa em G e tal que $\hat{\mu}(p_1) = v$, $\hat{\mu}(p_2) = u$ e $\hat{\mu}(p_3) = w$. Pelo Lema 5.4, temos $\alpha(p_2) = \overleftarrow{v}.\overrightarrow{u} = x$ e $\omega(p_2) = \overleftarrow{u}.\overrightarrow{w} = y$. Logo $p_2 = q$, uma vez que $\hat{\mu}$ é fiel. Portanto $q \in \mathrm{G}$. $\square$

Seria interessante procurar saber se existe algum sistema simbólico $\mathcal{X}$ tal que $\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil \neq \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$, porque a sua existência resolveria o Problema 4.31. Um tal sistema simbólico seria assaz curioso, especialmente se estivermos a considerar pseudovariedades V tais que $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$: como $\hat{\mu}(\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})) = \mathscr{M}(\mathcal{X})$, pela Proposição 5.24 teríamos então pseudopalavras de $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ bastante "afastadas" de $\overline{L(\mathcal{X})}$, no sentido em que não pertenceriam a $\hat{\mu}(\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_\beta)$, para qualquer ordinal β.

Lema 5.25. *Seja $(f(k))_k$ uma sucessão limitada de inteiros maiores do que um. Consideremos uma sucessão $(u_{k,1}, u_{k,2}, \cdots, u_{k,f(k)-1}, u_{k,f(k)})_k$ de tuplos de elementos de A^+ tal que*

1. $\lim_{k\to+\infty} \min\{|u_{k,i}|_i : 1 \leq i \leq f(k)\} = +\infty$,
2. $u_{k,i}u_{k,i+1} \in L(\mathcal{X})$, *para qualquer* $i \in \{1, \ldots, f(k) - 1\}$.

Então os pontos de acumulação da sucessão $(u_{k,1}u_{k,2}\cdots u_{k,f(k)-1}u_{k,f(k)})_k$ pertencem ao conjunto $\hat{\mu}\Big(\Big\langle\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}\Big\rangle\Big)$.

Demonstração. Como $(f(k))_k$ é uma sucessão limitada, considerando subsucessões se necessário podemos desde já supor que se trata de uma sucessão constante de valor n.

Seja $w_k = \prod_{i=1}^n u_{k,i}$. Seja w um ponto de acumulação da sucessão $(w_k)_k$. Considerando subsucessões se necessário, podemos supor que $\lim_{k\to+\infty} w_k = w$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sejam $p_{k,i}, s_{k,i} \in A^*$ tais que $u_{k,i} = p_{k,i}s_{k,i}$ e $||p_{k,i}| - |s_{k,i}|| \leq 1$. Seja $(v_{k,j})_{j=1,\ldots,2n}$ a sequência de palavras dada por:

$$v_{k,2i-1} = p_{k,i}, \quad v_{k,2i} = s_{k,i}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Então $w_k = \prod_{j=1}^{2n} v_{k,j}$. Façamos $v_{k,0} = v_{k,2n+1} = 1$. Para cada $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, a palavra $v_{k,j-1}v_{k,j}v_{k,j+1}$ pertence a $L(\mathcal{X})$, pela Condição 2 do enunciado. Logo existem $z_{k,j} \in A^{\mathbb{Z}^-}$ e $t_{k,j} \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$ tais que a sequência $z_{k,j}v_{k,j-1}.v_{k,j}v_{k,j+1}t_{k,j}$ é um elemento de $\mathcal{X}$, o qual denotamos abreviadamente por $x_{k,j}$. Seja $q_{k,j}$ a única aresta de $\Sigma(\mathcal{X})^+$ que começa em $x_{k,j}$ e acaba em $\sigma^{|v_{k,j}|}(x_{k,j})$. Reparemos que $\hat{\mu}(q_{k,j}) = v_{k,j}$. Considerando uma subsucessão se necessário, podemos supor que existe o seguinte limite:

$$\lim_{k\to+\infty}(q_{k,1}, q_{k,2}, \ldots, q_{k,2n-1}, q_{k,2n}) = (q_1, q_2, \ldots, q_{2n-1}, q_{2n})$$

Então, para cada $j \in \{1, \ldots, 2n - 1\}$, e uma vez que pela Condição 1 do enunciado se tem $\lim\limits_{k\to+\infty} |v_{k,j}| = \lim\limits_{k\to+\infty} |v_{k,j+1}| = +\infty$, verificam-se as seguintes igualdades:

$$\omega(q_j) = \lim_{k\to+\infty} \omega(q_{k,j}) = \overleftarrow{\hat{\mu}(q_j)}.\overrightarrow{\hat{\mu}(q_{j+1})} = \lim_{k\to+\infty} \alpha(x_{k,j+1}) = \alpha(q_{j+1}).$$

Logo $q = q_1q_2\cdots q_{2n-1}q_{2n}$ é uma aresta de $\Big\langle\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}\Big\rangle$. Ora

$$\hat{\mu}(q) = \hat{\mu}(q_1)\hat{\mu}(q_2)\cdots\hat{\mu}(q_{2n-1})\hat{\mu}(q_{2n}) = \lim_{k\to+\infty} v_{k,1}v_{k,2}\cdots v_{k,2n-1}v_{k,2n} = w. \quad \square$$

Vamos de seguida enunciar um resultado combinatório sobre semigrupos finitos que será invocado na demonstração da proposição que se lhe segue. A demonstração deste resultado é muito fácil, mas mesmo assim será explicitada, por falta de uma referência bibliográfica e porque dele dependem resultados importantes desta monografia.

Lema 5.26. *Suponhamos que S é um semigrupo finito. Então para quaisquer elementos $s_1 \cdots s_n$ de S existe um subconjunto $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, n\}$ com no máximo $|S|$ elementos tal que $s_1 \cdots s_n = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$.*

Demonstração. Vamos mostrar a proposição por indução sobre n. Se $n \leq |S|$ então nada há a provar. Vamos efectuar o passo indutivo, supondo desde já que $n > |S|$. Então existem inteiros p, q tais que $1 \leq p < q \leq n$ e $s_1 \cdots s_p = s_1 \cdots s_q$. Seja $m = n-(q-p)$. Consideremos o m-tuplo

$$(t_1, \ldots, t_m) = (s_1, \ldots, s_n) = (s_1, \ldots, s_p, s_{q+1}, \ldots, s_n).$$

Então

$$s_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_q s_{q+1} \cdots s_n = t_1 \cdots t_m.$$

Basta-nos portanto aplicar a hipótese de indução ao m-tuplo $(t_1, \ldots, t_m)$. $\square$

Proposição 5.27. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos V que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$. Seja $(f(n))_{n\geq 1}$ uma sucessão não limitada de inteiros positivos. Consideremos o conjunto $L_f(\mathcal{X}) = \bigcup_{n\geq 1}\{u \in L(\mathcal{X}) : |u| = f(n)\}$. Suponhamos que existem famílias de palavras $(p_u)_{u\in L_f(\mathcal{X})}$, $(z_u)_{u\in L_f(\mathcal{X})}$ e $(s_u)_{u\in L_f(\mathcal{X})}$ tais que:*

1. *$u = p_u z_u s_u$ para qualquer $u \in L_f(\mathcal{X})$;*
2. *para quaisquer $u, v \in L_f(\mathcal{X})$, se $|u| = |v|$ então $z_u s_v \in L(\mathcal{X})$;*
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\min_{u\in L_{f(n)}(\mathcal{X})}|p_u|\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\min_{u\in L_{f(n)}(\mathcal{X})}|z_u|\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\min_{u\in L_{f(n)}(\mathcal{X})}|s_u|\Big) = +\infty.$

Então $\mathscr{M}(\mathcal{X}) = \hat{\mu}(\lceil\Sigma(\mathcal{X})\rceil_2)$.

Demonstração. Seja $v \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Se $v \in A^+$, então $v \in L(\mathcal{X})$ e portanto $v \in \hat{\mu}(\Sigma(\mathcal{X})^+)$.

Vamos supor que $v \notin A^+$. Seja $(v_n)_n$ uma sucessão de elementos de A^+ convergente para v. Como $\mathscr{M}_{3f(k)}(\mathcal{X})$ é uma vizinhança aberta de v, existe um inteiro N_k tal que

$$n \geq N_k \Rightarrow (v_n \in \mathscr{M}_{3f(k)}(\mathcal{X}) \text{ e } |v_n| \geq 3f(k)).$$

Seja n_k a sucessão de inteiros definida recursivamente do seguinte modo:

- $n_1 = N_1$;
- $n_k = \max\{n_{k-1}+1, N_k\}$ se $k > 1$.

Então $(v_{n_k})_k$ é uma subsucessão de $(v_n)_n$ tal que $v_{n_k} \in \mathscr{M}_{3f(k)}(\mathcal{X})$ e $|v_{n_k}| \geq 3f(k)$, para qualquer k. A palavra v_{n_k} admite uma factorização da forma:

$$v_{n_k} = v_{k,1}v_{k,2}\cdots v_{k,r_k-1}v_{k,r_k},\ |v_{k,1}| = |v_{k,2}| = \cdots = |v_{k,r_{k-1}}| = f(k),$$
$$f(k) \leq |v_{k,r_k}| < 2f(k),\ r_k \geq 3.$$

Então

$$v_{n_k} = p_{v_{k,1}} z_{v_{k,1}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{r_k-2} s_{v_{k,i}} p_{v_{k,i+1}} z_{v_{k,i+1}}\right) \cdot s_{v_{k,r_k-1}} v_{k,r_k}.$$

Consideremos uma qualquer linguagem K de A^+ que seja V-reconhecível. Então existe um homomorfismo $\varphi : A^+ \to S$ de A^+ num semigrupo S de V tal que $K = \varphi^{-1}\varphi(K)$. Pelo Lema 5.26 existe $t_k \le |S|$ e um subconjunto $\{i_1, \dots, i_{t_k}\}$ de $\{1, \dots, r_k - 2\}$ tal que

$$\varphi(v_{n_k}) = \varphi\left(p_{v_{k,1}} z_{v_{k,1}} \cdot \left(\prod_{j=1}^{t_k} s_{v_{k,i_j}} p_{v_{k,i_j+1}} z_{v_{k,i_j+1}}\right) \cdot s_{v_{k,r_k-1}} v_{k,r_k}\right). \tag{5.7}$$

A igualdade (5.7) leva-nos a considerar o seguinte vector:

$$\lambda_k = (p_{v_{k,1}}, z_{v_{k,1}}, s_{v_{k,i_1}}, p_{v_{k,i_1+1}}, z_{v_{k,i_1+1}}, s_{v_{k,i_2}}, p_{v_{k,i_2+1}}, z_{v_{k,i_2+1}}, s_{v_{k,i_3}}, \dots$$
$$\dots, s_{v_{k,i_{t_k}}}, p_{v_{k,i_{t_k}+1}}, z_{v_{k,i_{t_k}+1}}, s_{v_{k,r_k-1}}, v_{k,r_k}).$$

O número de coordenadas de λ_k é $3t_k + 4 \le 3|S| + 4$. O produto de quaisquer duas coordenadas consecutivas de λ_k ou é um factor de uma palavra da forma $v_{k,i}v_{k,i+1}$ — que pertence a $L(\mathcal{X})$ porque $|v_{k,i}v_{k,i+1}| < 3f(k)$ e $v_{n_k} \in \mathscr{M}_{3f(k)}(\mathcal{X})$ — ou é da forma $z_{u_1}s_{u_2}$ com u_1 e u_2 palavras de $L_{f(k)}(\mathcal{X})$. Aplicando a Condição (2) do enunciado, concluímos que o produto de quaisquer duas coordenadas consecutivas de λ_k pertence a $L(\mathcal{X})$. Por outro lado, como

$$\lim_{k\to+\infty} \min\{|v_{k,i}| : 1 \le i \le r_k\} = \lim_{k\to+\infty} f(k) = +\infty,$$

aplicando a Condição (3) do enunciado, deduzimos que

$$\lim_{k\to+\infty} \min\{|(\lambda_k)_i| \,:\, 1 \le i \le 3t_k + 4\} = +\infty.$$

Seja $w_k = \prod_{i=1}^{3t_k+4} (\lambda_k)_i$. Então pelo Lema 5.25 existe um elemento w de $\hat{\mu}\left(\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \right\rangle\right)$ que é o limite de uma subsucessão $(w_{k_l})_l$ de $(w_k)_k$. Seja $\hat{\varphi}$ o único homomorfismo contínuo de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ em S que estende φ. De (5.7) resulta que

$$\hat{\varphi}(v) = \lim_{l\to+\infty} \varphi(v_{n_{k_l}}) = \lim_{i\to+\infty} \varphi(w_{k_l}) = \hat{\varphi}(w).$$

Logo

$$\hat{\varphi}^{-1}\hat{\varphi}(v) \cap \hat{\mu}\left(\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \right\rangle\right) \neq \emptyset. \tag{5.8}$$

Como $\hat{\varphi}^{-1}\varphi(K)$ é um aberto de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ e A^+ é denso em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, temos

$$\hat{\varphi}^{-1}\varphi(K) = \overline{\hat{\varphi}^{-1}\varphi(K) \cap A^+} = \overline{\varphi^{-1}\varphi(K)} = \overline{K}. \tag{5.9}$$

Portanto, se $\overline{K}$ contém v então de (5.8) e (5.9) deduz-se o seguinte:

$$\overline{K} \cap \hat{\mu}\left(\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \right\rangle\right) \neq \emptyset. \tag{5.10}$$

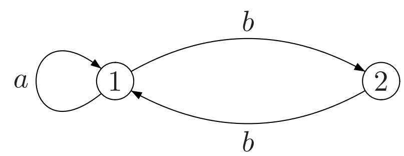
Ora de acordo com a Proposição 1.40 a topologia de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é gerada pelo fecho das linguagens V-reconhecíveis, pelo que $v \in \hat{\mu}\left(\overline{\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \right\rangle}\right)$. $\square$

Corolário 5.28. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *que contém* $\mathscr{L}\mathsf{SI}$.

Seja $\mathcal{X}$ *um sistema simbólico sófico apresentado por um grafo etiquetado* G *para o qual existem um vértice* i *e um inteiro* N *tais que qualquer caminho de* G *de comprimento* N *passa pelo vértice* i. *Então* $\mathscr{M}(\mathcal{X}) = \hat{\mu}(\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_2)$.

Demonstração. Seja u um elemento de $L(\mathcal{X})$ de comprimento maior do que $4N$. Suponhamos que q é um caminho de G de etiqueta u. Então existem caminhos q_1, q_2, q_3 e r tais que $q = q_1 q_2 r q_3$, $|q_1| = |q_2| = |r| = N$ e $|q_3| > N$. Por hipótese, existem caminhos r_1 e r_2 tais que $\omega(r_1) = \alpha(r_2) = i$ e $r = r_1 r_2$. Sejam p_u, z_u e s_u as etiquetas de q_1, $q_2 r_1$ e de $r_2 q_3$, respectivamente. Consideremos a função $f(n) = n + 4N$, $n \geq 1$. Então as famílias de palavras $(p_u)_{u \in L_f(\mathcal{X})}$, $(z_u)_{u \in L_f(\mathcal{X})}$ e $(s_u)_{u \in L_f(\mathcal{X})}$ estão nas condições da Proposição (5.27) $\square$

Exemplo 5.29. Consideremos o sistema simbólico sófico $\mathcal{Z}$ apresentado pelo seguinte grafo etiquetado G sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$:



O sistema simbólico $\mathcal{Z}$ é o que surge no Exemplo 3.26. Qualquer caminho de G de comprimento 2 passa pelo vértice 1. Logo $\mathscr{M}(\mathcal{Z}) = \hat{\mu}(\lceil \Sigma(\mathcal{Z}) \rceil_2)$, pelo Corolário 5.28.

Consideremos uma pseudovariedade V que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$ e o semigrupo sintáctico de $L(\mathcal{Z})$. Então, conforme vimos no Exemplo 3.26, o conjunto $\overline{L(\mathcal{Z})}$ está estritamente contido em $\mathscr{M}(\mathcal{Z})$. Ora $\hat{\mu}(\overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+}) = \overline{L(\mathcal{Z})}$, pelo Lema 5.5. Portanto o conjunto $\lceil \Sigma(\mathcal{Z}) \rceil_1 = \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+}$ está estritamente contido em $\lceil \Sigma(\mathcal{Z}) \rceil_2$.

Resta-nos averiguar a relação entre $\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+} \right\rangle$ e $\lceil \Sigma(\mathcal{Z}) \rceil_2$.

Vamos adicionalmente supor que $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$. Consideremos a pseudopalavra $w = a(b^{\omega+1}a)^{\omega}$. Suponhamos por redução ao absurdo que w pertence a $\hat{\mu}\left(\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+} \right\rangle\right)$. Para cada inteiro positivo j, consideremos a linguagem racional $K_j = A^* a((b^2)^+ ba)^j A^*$. Facilmente se mostra por indução que

$$K_j \cap L(\mathcal{Z})^j = \emptyset, \quad \forall j \geq 1. \tag{5.11}$$

As linguagens A^*, $\{a\}$, $\{b\}$ e $L(\mathcal{Z})$ são V-reconhecíveis. O semigrupo sintáctico de $(b^2)^+$ é um subsemigrupo do semigrupo sintáctico de $L(\mathcal{Z})$, pelo que $(b^2)^+$ também é V-reconhecível. Ora $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$, ou seja, a variedade de linguagens definida por V é fechada para a concatenação. Portanto as linguagens K_n e $L(\mathcal{Z})^n$ também são V-reconhecíveis, pelo que $\overline{K_n}$ e $\overline{L(\mathcal{Z})^n}$ são abertos. Existe um inteiro n tal que $w \in \left(\overline{L(\mathcal{Z})}\right)^n = \overline{L(\mathcal{Z})^n}$. Por outro lado $w \in \overline{K_n}$. Logo $\overline{K_n} \cap \overline{L(\mathcal{Z})^n}$ é um aberto não vazio, e como A^+ é denso em $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$, a intersecção $\overline{K_n} \cap \overline{L(\mathcal{Z})^n} \cap A^+$ é não vazia. Mas $\overline{K_n} \cap \overline{L(\mathcal{Z})^n} \cap A^+ = K_n \cap L(\mathcal{Z})^n$, o que conduz a uma contradição com (5.11). A contradição surgiu de supormos que $w \in \hat{\mu}\left(\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+} \right\rangle\right)$. Ora $w \in \mathscr{M}(\mathcal{Z})$, pelo que $\hat{\mu}\left(\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+} \right\rangle\right)$ está estritamente contido em $\mathscr{M}(\mathcal{Z})$, e $\left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+} \right\rangle$ está estritamente contido em $\lceil \Sigma(\mathcal{Z}) \rceil_2$.

Se também tivermos $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$ então $\lceil \Sigma(\mathcal{Z}) \rceil_2 = \widehat{\Sigma}(\mathcal{Z}) = \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{Z})$, pela Proposição 5.24. Em resumo,

$$\overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+} \subsetneqq \left\langle \overline{\Sigma(\mathcal{Z})^+} \right\rangle \subsetneqq \lceil \Sigma(\mathcal{Z}) \rceil_2 = \widehat{\Sigma}(\mathcal{Z}) = \varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{Z}).$$

Portanto $\mathfrak{o}(\Sigma(\mathcal{Z})) = 2$.

Corolário 5.30. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *que contém* $\mathscr{L}\mathsf{SI}$.

Seja $\mathcal{X}$ *um sistema simbólico tal que para cada inteiro positivo* n *existe uma palavra de comprimento* n *uniformemente recorrente em* $L(\mathcal{X})$. *Então* $\mathscr{M}(\mathcal{X}) = \hat{\mu}(\lceil \Sigma(\mathcal{X}) \rceil_2)$.

Demonstração. Para cada inteiro positivo n seja w_n uma palavra de comprimento n uniformemente recorrente em $L(\mathcal{X})$. Seja $g(n)$ um inteiro tal que toda a palavra de $L(\mathcal{X})$ de comprimento $g(n)$ tem w_n como factor. Consideremos a sucessão $(f(n))_n$ definida recursivamente do seguinte modo:

- $f(1) = 2 + g(1)$;
- $f(n) = \max\{f(n-1)+1, 2n+g(n)\}$ se $n > 1$.

Note-se que $(f(n))_n$ é estritamente crescente. Para cada $u \in L_{f(n)}(\mathcal{X})$ existem palavras u_1, u_2, u_3 tais que $u = u_1u_2u_3$, $|u_1| = |u_3| = n$ e $|u_2| \geq g(n)$. Então w_n é um factor de u_2, pelo que $u = p_u w_n s_u$ para algumas palavras p_u e s_u de comprimento maior ou igual a n. Fazendo $z_u = w_n$, as famílias de palavras $(p_u)_{u\in L_f(\mathcal{X})}$, $(z_u)_{u\in L_f(\mathcal{X})}$ e $(s_u)_{u\in L_f(\mathcal{X})}$ satisfazem as condições da Proposição 5.27. $\square$

O próximo teorema foi demonstrado por Almeida [Alm05a, Teorema 2.6], de forma substancialmente diferente.

Teorema 5.31. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *que contém* $\mathscr{L}\mathsf{Sl}$. *Suponhamos que* $\mathcal{X}$ *é um sistema simbólico minimal. Então* $\mathfrak{J}(\mathcal{X}) = \mathscr{M}(\mathcal{X}) \setminus A^+$.

Demonstração. Como $\overline{L(\mathcal{X})} \setminus A^+ \subseteq \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, temos $\mathfrak{J}(\mathcal{X}) \subseteq \mathscr{M}(\mathcal{X}) \setminus A^+$.

Sejam u e v elementos de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ tais que $uv \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Sejam s um ponto de acumulação da sucessão $(\mathrm{t}_n(u))_n$, e p um ponto de acumulação da sucessão $(\mathrm{i}_n(v))_n$. Então $u = u's$ e $v = pv'$, para algumas pseudopalavras u' e v'. Note-se também que $sp \in \overline{L(\mathcal{X})}$. Como as pseudopalavras s e p são infinitas, existem factorizações $s = s_1es_2$ e $p = p_1fp_2$ tais que e e f são idempotentes, pela Proposição 1.41. Consideremos as pseudopalavras $x = u's_1e$, $y = es_2p_1f$ e $z = fp_2v''$. Os elementos do conjunto $W = \{e, f, x, y, z\}$ são factores infinitos de elementos de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$, pelo que $W \subseteq \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, pela maximalidade de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ demonstrada no Teorema 3.24. Como $x = xe$, $y = ey$ e $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é estável, temos $x\ \mathcal{L}\ e$ e $y\ \mathcal{R}\ e$. Então $xy \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, pela Proposição 1.17. Do mesmo modo, como $xy = xyf$ e $z = fz$, temos $xyz \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Ora $xyz = uv$. Portanto,

$$(u, v \in \mathfrak{J}(\mathcal{X}) \text{ e } uv \in \mathscr{M}(\mathcal{X})) \Rightarrow uv \in \mathfrak{J}(\mathcal{X}). \tag{5.12}$$

Suponhamos agora que $u \in L(\mathcal{X})$, $v \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$ e $uv \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$ (o caso em que $vu \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$ é análogo). Como $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ é regular, existe um idempotente e tal que $v = ev$. Seja w um ponto de acumulação da sucessão $(u\,\mathrm{i}_n(e))_n$. Então $w \in \overline{L(\mathcal{X})} \setminus A^+$, donde $w \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$; por outro lado, $uv = uev = wsv$ para algum sufixo s de e. A pseudopalavra sv é um factor infinito de v, pelo que pertence a $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$, pela maximalidade de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Logo $wsv = uv \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, por (5.12). Fica assim provada a seguinte condição:

$$(u, v \in L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X}) \text{ e } uv \in \mathscr{M}(\mathcal{X})) \Rightarrow uv \in L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X}). \tag{5.13}$$

Sejam $q_1, \ldots, q_n$ arestas consecutivas de $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$. Vamos mostrar por indução sobre n que $\hat{\mu}(q_1 \cdots q_n) \in L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Pelo Lema 5.5 temos $\hat{\mu}\Big(\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}\Big) = \overline{L(\mathcal{X})}$. Ora $\overline{L(\mathcal{X})} \subseteq L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, o que mostra o passo inicial. Suponhamos que $n > 1$ e que $\hat{\mu}(q_1 \cdots q_{n-1}) \in L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Como $\hat{\mu}(q_n) \in L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X})$ e, pela Proposição 5.6, $\hat{\mu}(q_1 \cdots q_{n-1}q_n) \in \mathscr{M}(\mathcal{X})$, de (5.13) deduzimos que $\hat{\mu}(q_1 \cdots q_{n-1}q_n) \in L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Ou seja,

$$\hat{\mu}\Big(\Big\langle \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \Big\rangle\Big) \subseteq L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X}).$$

Como $\hat{\mu}$ é contínua, $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ é fechado e $\overline{L(\mathcal{X})} \subseteq L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, segue-se então que

$$\hat{\mu}\Big(\overline{\big\langle \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \big\rangle}\Big) \subseteq L(\mathcal{X}) \cup \mathfrak{J}(\mathcal{X}).$$

Logo $\mathscr{M}(\mathcal{X}) \setminus A^+ = \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, pelo Corolário 5.30. $\square$

Corolário 5.32. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{\scriptsize m} \mathsf{V}$. *Se* $\mathcal{X}$ *é um sistema simbólico minimal então* $\mathscr{M}(\mathcal{X}) = \overline{L(\mathcal{X})}$.

Demonstração. Já sabemos que $\overline{L(\mathcal{X})} \subseteq \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Temos $\overline{L(\mathcal{X})} \cap \mathfrak{J}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$. O conjunto $\overline{L(\mathcal{X})}$ é factorial, pela Proposição 3.6. Logo $\mathfrak{J}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{L(\mathcal{X})}$. Basta agora aplicar o Teorema 5.31 e a igualdade $\mathscr{M}(\mathcal{X}) \cap A^+ = L(\mathcal{X})$. $\square$

Corolário 5.33. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{\scriptsize m} \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Se* $\mathcal{X}$ *é um sistema simbólico minimal então* $\varprojlim \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X}) = \widehat{\Sigma}(\mathcal{X}) = \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$.

Demonstração. O resultado decorre imediatamente do Corolário 5.32, do Lema 5.5 e da Proposição 5.24. $\square$

Os dois corolários precedentes exibem duas propriedades dos sistemas simbólicos minimais que são comuns aos sistemas simbólicos de tipo finito (cf. Proposição 5.1). Contudo, é interessante observar que não é possível demonstrar o Corolário 5.33 do mesmo modo como foi demonstrada a Proposição 5.1, isto é, não é possível aplicar a Proposição 1.8. Vejamos porquê. Suponhamos que existe um inteiro positivo n tal que $\hat{\pi}_n(\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})) = \widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})$. Então

$$\overline{L(\mathcal{X})} = \hat{\mu}\big(\hat{\pi}_n(\widehat{\Sigma}(\mathcal{X}))\big) = \hat{\mu}\big(\widehat{\Sigma}_{2n}(\mathcal{X})\big) = \mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X}).$$

Ou seja, $L(\mathcal{X}) = \mathscr{M}_{2n+1}(\mathcal{X}) \cap A^+$, pelo que $\mathcal{X}$ é de tipo finito. Ora se $|A| > 1$ então existem apenas $\aleph_0$ sistemas simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ de tipo finito, existindo por outro lado $2^{\aleph_0}$ sistemas simbólicos minimais de $A^{\mathbb{Z}}$.

5.5 Semigrupos locais

Vamos agora concentrar a nossa atenção nos semigrupos locais de $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$, em especial quando $\mathcal{X}$ é minimal.

Proposição 5.34. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{\scriptsize m} \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Para todo o idempotente* e *de* $\overline{L(\mathcal{X})}$, *existe uma aresta idempotente* $\varepsilon : \overleftrightarrow{e} \to \overleftrightarrow{e}$ *pertencente a* $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ *tal que* $\hat{\mu}(\varepsilon) = e$.

Demonstração. Como $e = e^4$, pelo Corolário 5.12 existe uma aresta com a seguinte factorização boa em $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$:

$$\circ \xrightarrow{\quad e \quad} \boxed{\overleftrightarrow{e}} \xrightarrow{\quad \varepsilon_1 | e \quad} \boxed{\overleftrightarrow{e}} \xrightarrow{\quad \varepsilon_2 | e \quad} \boxed{\overleftrightarrow{e}} \xrightarrow{\quad e \quad} \circ$$

Ora ε_1, ε_2 e $\varepsilon_1\varepsilon_2$ são arestas co-terminais com a etiqueta e. Como $\hat{\mu}$ é fiel, elas são todas iguais, pelo que $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^2$. $\square$

Proposição 5.35. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{\scriptsize m} \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Se* $\mathcal{X}$ *é um sistema simbólico irredutível então para todo o elemento* x *de* $\mathcal{X}$ *existem um idempotente* $e \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$ *e uma aresta idempotente* $\varepsilon : x \to x$ *de* $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ *tais que* $\hat{\mu}(\varepsilon) = e$.

Demonstração. Sejam p e s pontos de acumulação em $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ das sucessões $(x_{[0,n-1]})_n$ e $(x_{[-n,-1]})_n$. Então sp é um ponto de acumulação da sucessão $(x_{[-n,n-1]})_n$ e $p, s, sp \in \overline{L(\mathcal{X})}$. Consideremos um elemento z de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Pela Proposição 3.21, o conjunto $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ é uma $\mathcal{J}$-classe contida em $\overline{L(\mathcal{X})}$. Pelo Lema 3.19 existem $\gamma, \xi \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tais que $z\gamma sp\xi z \in \overline{L(\mathcal{X})}$. As pseudopalavras $z\gamma s$ e $p\xi z$ também pertencem a $\overline{L(\mathcal{X})}$, já que $\overline{L(\mathcal{X})}$ é factorial, graças à Proposição 3.6. Pela minimalidade de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ as pseudopalavras $(z\gamma s)(p\xi z)$, $z\gamma s$ e $p\xi z$ pertencem à $\mathcal{J}$-classe $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$, uma vez que z é factor de todas elas. Como $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é estável, temos $(z\gamma s)(p\xi z) \in [z\gamma s]_{\mathcal{R}} \cap [p\xi z]_{\mathcal{L}}$. Então, pela Proposição 1.17 existe um idempotente e em $[p\xi z]_{\mathcal{R}} \cap [z\gamma s]_{\mathcal{L}}$. Note-se então que $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p\xi z} = \overrightarrow{e}$ e que $\overleftarrow{s} = \overleftarrow{z\gamma s} = \overleftarrow{e}$. Logo $\overleftrightarrow{e} = x$. Pela Proposição 5.34, existe uma aresta idempotente $\varepsilon : x \to x$ pertencente a $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ tal que $\hat{\mu}(\varepsilon) = e$. □

Suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico irredutível. Seja $x \in \mathcal{X}$. Pela Proposição 5.35 existe o semigrupo local S_x de $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$ em x. Consideremos o seguinte conjunto:

$$\widetilde{S_x} = \{s \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \cap S_x \mid \exists \varepsilon, \phi \in S_x : \varepsilon^2 = \varepsilon, \phi^2 = \phi, s = \varepsilon s \phi\}.$$

A Proposição 5.35 garante-nos que $\widetilde{S_x}$ é um conjunto não vazio. Nos próximos quatro lemas continuamos a supor que $\mathcal{X}$ é irredutível, que $x \in \mathcal{X}$, e que $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$.

Lema 5.36. *Seja $s \in \widetilde{S_x}$. Se $s = pq$ e $p, q \in S_x$ então $p, q \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$.*

Demonstração. Sejam ε e ϕ arestas idempotentes de S_x tais que $s = \varepsilon s \phi$. Sejam ϖ, ϱ, e e f as etiquetas de p, q, ε e ϕ, respectivamente. Então $\hat{\mu}(s) = e\varpi\varrho f$, e $\hat{\mu}(s) \in \overline{L(\mathcal{X})}$ pelo Lema 5.5. Aplicando o Corolário 5.12 concluímos que existe uma aresta com uma factorização boa em $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ segundo o seguinte esquema:

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, "e"] & \boxed{\overleftarrow{e}.\overrightarrow{\varpi\varrho f}} \arrow[r, "p'|\varpi"] & \boxed{\overleftarrow{e\varpi}.\overrightarrow{\varrho f}} \arrow[r, "q'|\varrho"] & \boxed{\overleftarrow{e\varpi\varrho}.\overrightarrow{f}} \arrow[r, "f"] & \circ \end{tikzcd}$$

Como e, $\varpi\varrho f$, $e\varpi$, ϱf, $e\varpi\varrho$ e f são etiquetas de elementos de S_x, pelo Lema 5.4 temos $p', q' \in S_x$. Logo $p = p'$ e $q = q'$, uma vez que $\hat{\mu}$ é fiel. Portanto $p, q \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$. □

Lema 5.37. *O conjunto $\widetilde{S_x}$ é uma união de $\mathcal{J}$-classes de S_x.*

Demonstração. Suponhamos que $s \in \widetilde{S_x}$. Sejam ε e ϕ idempotentes de S_x tais que $s = \varepsilon s \phi$. Seja t um elemento de S_x que é $\mathcal{J}$-equivalente a s. Então t também é limitado por idempotentes ε_0 e ϕ_0 de S_x e existem elementos u e v de S_x para os quais $s = utv$. Pelo Lema 5.36 temos $tv \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$. Ora tv é limitado pelos idempotentes ε_0 e ϕ de S_x, pelo que $tv \in \widetilde{S_x}$. Novamente pelo Lema 5.36, concluímos que $t \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$. Portanto $t \in \widetilde{S_x}$, pois t é limitado por idempotentes de S_x. □

Lema 5.38. *Existe uma $\mathcal{J}$-classe mínima $J(x)$ em $\widetilde{S_x}$. A $\mathcal{J}$-classe $J(x)$ é regular.*

Demonstração. O conjunto $\widetilde{S_x}$ é um fechado de S_x. Pelo Lema 3.11, existem $\mathcal{J}$-classes de S_x que são $\mathcal{J}$-minimais entre as que estão contidas em $\widetilde{S_x}$. Sejam ζ_1 e ζ_2 elementos de tais $\mathcal{J}$-classes minimais. Existem idempotentes $\varepsilon_i, \phi_i \in S_x$ tais que $\zeta_i = \varepsilon_i \zeta_i \phi_i$. Sejam e_i, f_i e z_i as etiquetas de ε_i, ϕ_i e ζ_i, respectivamente. Uma vez que $z_i \in \overline{L(\mathcal{X})}$, pelo Lema 3.19 existe $w \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tal que $z_1 w z_2 \in \overline{L(\mathcal{X})}$. Tendo em atenção que $z_i = e_i z_i = z_i f_i$, aplicando o Corolário 5.12 deduzimos que existe uma aresta com uma factorização boa em $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ segundo o seguinte esquema:

$$\circ \xrightarrow{e_1} \boxed{x} \xrightarrow{\zeta_1'|z_1} \boxed{x} \xrightarrow{q|f_1we_2} \boxed{x} \xrightarrow{\zeta_2'|z_2} \boxed{x} \xrightarrow{f_2} \circ$$

Como $\hat{\mu}$ é fiel, temos $\zeta_i = \zeta_i'$. Logo $\zeta_1 q \zeta_2 \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \cap S_x$. Ora $\zeta_1 q \zeta_2 = \varepsilon_1 \zeta_1 q \zeta_2 \phi_2$, pelo que $\zeta_1 q \zeta_2 \in \widetilde{S_x}$. Pelas hipóteses de minimalidade sobre ζ_1 e ζ_2, o elemento $\zeta_1 q \zeta_2$ é $\mathcal{J}$-equivalente a ζ_1 e a ζ_2. Logo $\widetilde{S_x}$ possui uma única $\mathcal{J}$-classe minimal $J(x)$. Como $\zeta_1 q \zeta_2$ e ζ_2 são $\mathcal{J}$-equivalentes, também temos $q\zeta_2 \in J(x)$. Logo $\zeta_1 q \zeta_2$ é o produto de dois elementos de $J(x)$, e portanto $J(x)$ é regular, pelo Corolário 1.20. □

Lema 5.39. *O conjunto $\hat{\mu}(J(x))$ está contido em $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$.*

Demonstração. Pela Proposição 5.35 existe um idempotente ε em $\widetilde{S_x}$ tal que $\hat{\mu}(\varepsilon) \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Seja ζ um elemento de $J(x)$. Então $\zeta \leq_{\mathcal{J}} \varepsilon$, pelo que $\hat{\mu}(\zeta) \leq_{\mathcal{J}} \hat{\mu}(\varepsilon)$. Como $\zeta \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$, temos $\hat{\mu}(\zeta) \in \overline{L(\mathcal{X})}$. Logo $\hat{\mu}(\zeta) \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, pela minimalidade de $\hat{\mu}(\varepsilon)$. A função $\hat{\mu}$ preserva a $\mathcal{J}$-ordem (pois é um homomorfismo), pelo que $\hat{\mu}(J(x)) \subseteq \mathfrak{J}(\mathcal{X})$. □

Teorema 5.40. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico irredutível. Para qualquer $x \in \mathcal{X}$, se H é um subgrupo maximal de $J(x)$, então $\hat{\mu}(H)$ é um subgrupo maximal de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ e a restrição de $\hat{\mu}$ a H é um isomorfismo de grupos compactos entre H e $\hat{\mu}(H)$.*

Demonstração. Já sabemos pelo Lema 5.39 que o conjunto $\hat{\mu}(H)$ está contido em $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Como $\hat{\mu}$ é um homomorfismo contínuo, $\hat{\mu}(H)$ é um subgrupo fechado de algum subgrupo maximal K de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Como $\hat{\mu}$ é fiel, a restrição $\hat{\mu}|_H : H \to K$ é um homomorfismo contínuo injectivo de grupos compactos. Resta-nos mostrar que $\hat{\mu}(H) = K$. Suponhamos que $w \in K$. Seja ε o elemento neutro de H. Então $e = \hat{\mu}(\varepsilon)$ é o elemento neutro de K, donde $w = e^2we^2$. Pelo Corolário 5.12 existe uma aresta com uma factorização boa em $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ segundo o seguinte esquema:

$$\circ \xrightarrow{e} \boxed{x} \xrightarrow{\varepsilon_1|e} \boxed{x} \xrightarrow{s|w} \boxed{x} \xrightarrow{\varepsilon_2|e} \boxed{x} \xrightarrow{e} \circ$$

Como $\hat{\mu}$ é fiel, temos $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Seja $t = \varepsilon s \varepsilon$. Então $t \in \widetilde{S_x}$. Como $t \leq_{\mathcal{J}} \varepsilon$ e $\varepsilon \in J(x)$, temos $t \in J(x)$. Uma vez que S_x é um semigrupo estável, t e ε são $\mathcal{H}$-equivalentes, ou seja, $t \in H$. Como $\hat{\mu}(t) = \hat{\mu}(\varepsilon)\hat{\mu}(s)\hat{\mu}(\varepsilon) = ewe = w$, isto mostra que $\hat{\mu}(H) = K$. □

Deste modo obtivemos uma demonstração alternativa do Corolário 3.42, para o caso das pseudovariedades V tais que $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$.

Proposição 5.41. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$. *Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico irredutível então $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \setminus \Sigma(\mathcal{X})^+$ é fortemente conexo.*

Demonstração. Sejam x e y dois quaisquer elementos de $\mathcal{X}$. Pela Proposição 5.35, existem em $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ arestas idempotentes $\varepsilon : x \to x$ e $\phi : y \to y$. Sejam e e f as suas respectivas etiquetas. Como $\hat{\mu}(\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}) = \overline{L(\mathcal{X})}$, pelo Lema 3.19 existe $u \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tal que $euf \in \overline{L(\mathcal{X})}$. Logo existe $q \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ tal que $\hat{\mu}(q) = euf = e^2uf^2$. Pelo Corolário 5.12 existe uma factorização $q = q_1q_2q_3$ boa em $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ tal que $\hat{\mu}(q_2) = euf$, e $q_2 \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}(x, y)$. Como $\hat{\mu}(q_2) \notin A^+$, temos $q_2 \in \overline{\Sigma(\mathcal{X})^+} \setminus \Sigma(\mathcal{X})^+$. □

O recíproco da Proposição 5.41 é falso. O sistema simbólico do enunciado da Proposição 4.5. é disso um exemplo, como se depreende da respectiva demonstração.

Proposição 5.42. *Suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico minimal. Sejam $u, v \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Então $u \mathrel{\mathcal{R}} v$ se e só se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Dualmente, $u \mathrel{\mathcal{L}} v$ se e só se $\overleftarrow{u} = \overleftarrow{v}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Seja e um ponto de acumulação da sucessão $(\mathrm{i}_n(u))_n$. Por hipótese $\mathrm{i}_n(u) = \mathrm{i}_n(v)$, para qualquer n. Logo e é um prefixo comum de u e de v. Pela maximalidade da $\mathcal{J}$-classe $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ e pela estabilidade de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$, concluímos que e, u, v são $\mathcal{R}$-equivalentes. $\square$

Corolário 5.43. *Suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico minimal. Sejam $u, v \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Então $u \,\mathcal{H}\, v$ se e só se $\overleftrightarrow{u} = \overleftrightarrow{v}$.*

Um semigrupóide C diz-se uma *categoria* se para qualquer vértice x de C existe uma aresta 1_x tal que $1_x s = s$ e $t1_x = t$, para quaisquer arestas s e t de C tais que $\alpha(s) = x$ e $\omega(t) = x$. Podemos dizer que as categorias estão para os semigrupóides tal como os monóides estão para os semigrupos: veja-se [AW98] para uma apreciação deste paralelismo. Um *grupóide* é uma categoria G onde para qualquer aresta $s : x \to y$ existe uma aresta $s' : y \to x$ tal que $ss' = 1_x$ e $s's = 1_y$. Reparemos que os semigrupos locais de um grupóide são grupos.

O grafo $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X}) \setminus \Sigma(\mathcal{X})^+$ será abreviadamente denotado por $\hat{\Sigma}_\infty(\mathcal{X})$. Note-se que $\hat{\Sigma}_\infty(\mathcal{X})$ é um subgrafo fechado de $\widehat{\Sigma}(\mathcal{X})$.

Teorema 5.44. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos V tal que $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico minimal então $\hat{\Sigma}_\infty(\mathcal{X})$ é um grupóide compacto conexo*[1].

Demonstração. Já sabemos pela Proposição 5.41 que $\hat{\Sigma}_\infty(\mathcal{X})$ é fortemente conexo. Para cada $x \in \mathcal{X}$, consideremos um idempotente ε_x pertencente a $J(x)$.

Seja $q : x \to y$ uma aresta de $\hat{\Sigma}_\infty(\mathcal{X})$. Então

$$\overrightarrow{\hat{\mu}(\varepsilon_x q)} = x_{[0,+\infty[} = \overrightarrow{\hat{\mu}(q)},$$

e portanto $\hat{\mu}(\varepsilon_x q)$ é $\mathcal{R}$-equivalente a $\hat{\mu}(q)$, pela Proposição 5.42. Logo $\hat{\mu}(q) = \hat{\mu}(\varepsilon_x q)w$ para algum $w \in (\overline{\Omega}_A\mathsf{V})^1$. Portanto

$$\hat{\mu}(\varepsilon_x q) = \hat{\mu}(\varepsilon_x)\hat{\mu}(q) = \hat{\mu}(\varepsilon_x)\hat{\mu}(\varepsilon_x q)w = \hat{\mu}(\varepsilon_x^2 q)w = \hat{\mu}(\varepsilon_x q)w = \hat{\mu}(q).$$

Logo $\varepsilon_x q = q$, uma vez que $\hat{\mu}$ é fiel. Analogamente, $q\varepsilon_y = q$. Isto mostra que $\hat{\Sigma}_\infty(\mathcal{X})$ é uma categoria.

Pela Proposição 1.19, existe $v \in [\hat{\mu}(\varepsilon_x)]_{\mathcal{L}} \cap [\hat{\mu}(\varepsilon_y)]_{\mathcal{R}}$ tal que $v\hat{\mu}(q) = \hat{\mu}(\varepsilon_y)$ e $\hat{\mu}(q)v = \hat{\mu}(\varepsilon_x)$. Note-se que $v = \hat{\mu}(\varepsilon_y)v\hat{\mu}(\varepsilon_x)$. Então pelo Corolário 5.12 existe uma aresta p com uma factorização boa em $\overline{\Sigma(\mathcal{X})^+}$ segundo o seguinte esquema:

$$\circ \xrightarrow{\hat{\mu}(\varepsilon_y)} \boxed{y} \xrightarrow{p_1|\hat{\mu}(\varepsilon_y)} \circ \xrightarrow{p_2|v} \circ \xrightarrow{p_3|\hat{\mu}(\varepsilon_x)} \boxed{x} \xrightarrow{\hat{\mu}(\varepsilon_x)} \circ$$

Seja $r = p_1p_2p_3$. Então $\hat{\mu}(r) = v$, e portanto $\hat{\mu}(qr) = \hat{\mu}(\varepsilon_x)$ e $\hat{\mu}(rq) = \hat{\mu}(\varepsilon_y)$. Como $\hat{\mu}$ é fiel, deduzimos finalmente que $qr = \varepsilon_x$ e que $rq = \varepsilon_y$. $\square$

Note-se que nas condições do Teorema 5.44 o grupo local de $\hat{\Sigma}_\infty(\mathcal{X})$ é isomorfo (no sentido algébrico-topológico) ao grupo de Schützenberger de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$, de acordo com o Teorema 5.40. É um facto bem conhecido que num grupóide conexo todos os grupos locais são isomorfos, e que a classe de isomorfismo de um grupóide fica completamente determinada pela classe de isomorfismo dos seus grupos locais e pelo número de vértices [Mac71]. Analogamente, num

[1] Note-se que um grupóide é conexo se e só se é fortemente conexo.

grupóide compacto conexo todos os grupos locais são isomorfos, e a classe de isomorfismo de um grupóide (no sentido algébrico-topológico) fica completamente determinada pela classe de isomorfismo dos seus grupos locais e pela topologia do espaço dos vértices. Qualquer espaço métrico compacto totalmente desconexo sem pontos isolados é homeomorfo ao conjunto de Cantor [Wil70, Corolário 30.4]; em particular, qualquer sistema simbólico minimal infinito é homemorfo ao conjunto de Cantor. Logo se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico minimal então o cardinal de $\mathcal{X}$ e o grupo de Schützenberger de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ formam um invariante algébrico-topológico completo de $\hat{\Sigma}_\infty(\mathcal{X})$.

Parte III

O semigrupo sintáctico da linguagem de um sistema simbólico

Capítulo 6

Um invariante associado à relação $\mathcal{J}$

Este capítulo é uma recapitulação de uma parte do artigo [Cos06], com algum reforço nos resultados. Vamos deduzir um invariante relacionado com a $\mathcal{J}$-ordem no semigrupo sintáctico de um sistema simbólico. Em [Cos06] essa dedução foi feita apenas para sistemas sóficos.

Conforme já observamos na Subsecção 2.2.2, na página 61, o semigrupo sintáctico $S_{A^+}(A^{\mathbb{Z}})$ é trivial, enquanto que se $A \subsetneq B$ então $S_{B^+}(A^{\mathbb{Z}})$ é o monóide $\mathscr{U} = \{0,1\}$; e se $\mathcal{X}$ não é um sistema simbólico pleno então $S_{A^+}(\mathcal{X}) = S_{B^+}(\mathcal{X})$ para quaisquer alfabetos A e B tais que $\mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{X} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$. Logo nesse caso não há qualquer ambiguidade na notação $S(\mathcal{X})$ e a definição de semigrupo sintáctico de $\mathcal{X}$ não depende do alfabeto. Uma vez que ser-nos-á em vários momentos conveniente que para qualquer sistema simbólico $\mathcal{X}$ o conjunto $S(\mathcal{X}) \setminus \{0\}$ seja diferente do vazio, vamos adoptar neste capítulo a convenção segundo a qual sempre que temos um sistema simbólico pleno $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ então está-se implicitamente a assumir que $\mathcal{X} \subsetneq A^{\mathbb{Z}}$. Deste modo também não haverá qualquer ambiguidade na utilização da notação $S(\mathcal{X})$ no lugar de $S_{A^+}(\mathcal{X})$ mesmo quando o sistema simbólico é pleno.

6.1 Ordem sintáctica no semigrupo livre e no semigrupo profinito livre

Um *semigrupo ordenado* é um semigrupo S munido de uma ordem parcial (usualmente denotada por $\leq$) que é uma congruência sobre S. Os homomorfismos entre semigrupos ordenados são os homomorfismos de semigrupos que respeitam a ordem. Um homomorfismo de semigrupos ordenados $\varphi : S \to T$ diz-se *fiel* se $s \leq t \Leftrightarrow \varphi(s) \leq \varphi(t)$.

Consideremos um semigrupo T e um subconjunto K de T. O *semigrupo sintáctico ordenado* de K em T é o semigrupo sintáctico $S_T(K)$ munido da seguinte ordem (dita *ordem sintáctica*):

$$\delta_{K,T}(u) \leq \delta_{K,T}(v) \Leftrightarrow C_{K,T}(v) \subseteq C_{K,T}(u).$$

Observemos que se K é um subconjunto factorial de T então o zero de $S_T(K)$ é máximo em $S_T(K)$, pela Proposição 2.15. Denotamos por $\mathscr{U}^-$ o semigrupo $\mathscr{U} = \{0,1\}$ munido da ordem $1 \leq 0$. De acordo com a convenção adoptada no início deste capítulo segundo a qual se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ que é pleno então $\mathcal{X} \subsetneq A^{\mathbb{Z}}$, o semigrupo ordenado $\mathscr{U}^-$ é o semigrupo sintáctico ordenado de um sistema simbólico pleno.

Nesta monografia estamos fundamentalmente interessados em semigrupos sintácticos ordenados da forma $S_{A^+}(L)$ e $S_{\overline{\Omega}_A\mathsf{S}}(K)$. Por essa razão, tornam-se convenientes algumas simplificações de notação. Assim, no lugar de $S_{A^+}(L)$, $C_{L,A^+}(u)$ e $\delta_{L,A^+}(u)$ temos respectivamente $S(L)$, $C_L(v)$ e $\delta_L(u)$; e no lugar de $S_{\overline{\Omega}_A\mathsf{S}}(K)$, $C_{K,\overline{\Omega}_A\mathsf{S}}(u)$ e $\delta_{K,\overline{\Omega}_A\mathsf{S}}(u)$ temos respectivamente $\overline{S}(K)$, $\overline{C}_K(u)$ e $\Delta_K(u)$. Algumas desta simplificações já haviam sido introduzidas na página 34.

O lema seguinte e o subsequente corolário estabelecem uma relação entre $S(L)$ e $\overline{S}(\overline{L})$, onde L é uma linguagem de A^+.

Lema 6.1. *Sejam L uma linguagem de A^+ e $u \in A^+$. Então $\overline{C_L(u)} \cap A^* \times A^* = C_L(u)$ e $\overline{C_L(u)} = \overline{C}_{\overline{L}}(u)$.*

Demonstração. A primeira igualdade do enunciado resulta do facto de que os elementos de $A^* \times A^*$ são pontos isolados de $(\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1 \times (\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1$.

Suponhamos que $(x, y) \in \overline{C_L(u)}$. Consideremos uma sucessão $(x_n, y_n)_n$ de elementos de $C_L(u)$ convergente para (x, y). Então $x_n u y_n \in L$, para qualquer n. Logo $xuy \in \overline{L}$, ou seja, $(x, y) \in \overline{C}_{\overline{L}}(u)$. Reciprocamente, suponhamos que $(x, y) \in \overline{C}_{\overline{L}}(u)$. Então existe uma sucessão $(w_n)_n$ de elementos de L convergente para xuy. Pelo Lema 3.5 existem uma subsucessão $(w_{n_k})_k$ e sucessões $(x_k)_k$, $(y_k)_k$ tais que $w_{n_k} = x_k u y_k$ para todo k, $\lim x_k = x$ e $\lim y_k = y$. Como $(x_k, y_k) \in C_L(u)$ para todo k, concluímos que $(x, y) \in \overline{C_L(u)}$. Portanto $\overline{C_L(u)} = \overline{C}_{\overline{L}}(u)$. □

Corolário 6.2. *Seja L uma linguagem de A^+. Então a função*

$$\begin{array}{rrcl} \Upsilon_L : & S(L) & \rightarrow & \overline{S}(\overline{L}) \\ & \delta_L(u) & \mapsto & \Delta_{\overline{L}}(u),\ u \in A^+ \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo fiel de semigrupos ordenados.

Se L é uma linguagem racional de A^+ então podemos considerar o único homomorfismo contínuo $\hat{\delta}_L : \overline{\Omega}_A\mathsf{S} \rightarrow S(L)$ que estende δ_L. Surge naturalmente a questão de saber como se comportam comparativamente δ_L e $\Delta_{\overline{L}}$. A próxima proposição dá uma resposta a essa questão.

Proposição 6.3. *Sejam u e v elementos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$. Se L é uma linguagem racional de A^+ então $\hat{\delta}_L(v) \leq \hat{\delta}_L(u)$ se e só se $\Delta_{\overline{L}}(v) \leq \Delta_{\overline{L}}(u)$.*

Demonstração. Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões de elementos de A^+ convergentes para u e v respectivamente. Como $S(L)$ é finito, existe um inteiro p tal que se $n \geq p$ então $\delta_L(u_n) = \hat{\delta}_L(u)$ e $\delta_L(v_n) = \hat{\delta}_L(v)$. Temos a seguinte equivalência:

$$\hat{\delta}_L(v) \nleq_L \hat{\delta}_L(u) \Leftrightarrow \big[\, \exists k : \forall n \geq k, \delta_L(v_n) \nleq_L \delta_L(u_n) \,\big].$$

Queremos portanto mostrar a equivalência da condição

$$\exists k : \forall n \geq k, \exists x_n, y_n \in A^* : x_n u_n y_n \in L \wedge x_n v_n y_n \notin L \tag{6.1}$$

com a condição

$$\exists x, y \in (\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1 : xuy \in \overline{L} \wedge xvy \notin \overline{L}. \tag{6.2}$$

Suponhamos que se verifica a condição (6.1), ou seja, que existem sucessões $(x_n)_{n\geq k}$ e $(y_n)_{n\geq k}$ de elementos de A^* tais que $x_n u_n y_n \in L$ e $x_n v_n y_n \notin L$. Como $(\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1$ é compacto, as sucessões $(x_n)_{n\geq k}$ e $(y_n)_{n\geq k}$ têm subsucessões convergentes para elementos x e y de $(\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1$, respectivamente. É claro que $xuy \in \overline{L}$. Suponhamos que $xvy \in \overline{L}$. Como L é uma linguagem racional, o conjunto $\overline{L}$ é um aberto de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$, pela Proposição 1.40. Logo existe n tal que $x_nv_nv_n \in \overline{L}$. Uma vez que os elementos de A^+ são pontos isolados, deduzimos que $x_nv_nv_n \in L$, o que é contraditório. Logo $xvy \notin \overline{L}$, e portanto (6.1) implica (6.2).

Reciprocamente, suponhamos que existem elementos x e y de $(\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1$ tais que $xuy \in \overline{L}$ e $xvy \notin \overline{L}$. Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sucessões de elementos de A^* convergentes para x e y, respectivamente. É claro que existe k_1 tal que se $n \geq k_1$ então $x_nv_ny_n \notin L$. Por outro lado, como $\overline{L}$ é aberto e $\overline{L} \cap A^+ = L$, existe k_2 tal que se $n \geq k_2$ então $x_nu_ny_n \in L$. Tomando $k = \max\{k_1, k_2\}$ obtemos (6.1). □

Corolário 6.4. *Se L é uma linguagem racional de A^+ então $S(L)$ e $\overline{S}(\overline{L})$ são isomorfos.*

Demonstração. Dado $w \in \overline{\Omega}_A\mathsf{S}$, existe $u \in A^+$ tal que $\hat{\delta}_L(w) = \hat{\delta}_L(u)$. Logo $\Delta_L(w) = \Delta_L(u)$, pela Proposição 6.3. Portanto $S(L)$ e $\overline{S}(\overline{L})$ são isomorfos pelo Corolário 6.2. □

Recordemos uma convenção que já estabelecemos no Capítulo 2: dado um operador $\mathbf{O}$ definido na classe das linguagens, se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico então a expressão $\mathbf{O}(L(\mathcal{X}))$ é simplificada pela notação $\mathbf{O}(\mathcal{X})$. Por exemplo, $\Delta_{\mathcal{X}}$ é uma simplificação de $\Delta_{L(\mathcal{X})}$.

Observação 6.5. Existem sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ tais que $S(\mathcal{X})$ e $\overline{S}(\mathcal{X})$ não são isomorfos.

Justificação. Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ então $\overline{L(\mathcal{X})}$ é um subconjunto factorial de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$ pela Proposição 3.6. Pela Proposição 2.15 os semigrupos $S(\mathcal{X})$ e $\overline{S}(\mathcal{X})$ possuem um zero e

$$\delta_{\mathcal{X}}^{-1}\big(S(\mathcal{X}) \setminus \{0\}\big) = L(\mathcal{X}), \qquad \Delta_{\mathcal{X}}^{-1}\big(\overline{S}(\mathcal{X}) \setminus \{0\}\big) = \overline{L(\mathcal{X})}.$$

O conjunto $\overline{L(\mathcal{X})}$ possui idempotentes (Lema 3.17), logo $\overline{S}(\mathcal{X})$ tem idempotentes distintos do zero. Se $\overline{S}(\mathcal{X})\setminus\{0\}$ tem algum idempotente então existe $u \in A^+$ tal que $\delta_{\mathcal{X}}(u^n) = \delta_{\mathcal{X}}(u^n) \neq 0$ para qualquer $n \geq 1$. Logo $u^n \in L(\mathcal{X})$ para qualquer $n \geq 1$, donde $u^\infty \in \mathcal{X}$. Tal implica que $\mathcal{X}$ não seja um sistema simbólico minimal com um número finito de elementos. Portanto se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico minimal infinito então $S(\mathcal{X})$ e $\overline{S}(\mathcal{X})$ não são isomorfos porque não têm o mesmo número de idempotentes (o zero é o único idempotente de $S(\mathcal{X})$). □

6.2 Efeito de uma conjugação no contexto

Dados $u \in A^+$, $r, v, s \in A^*$, se $u = rvs$ e $|r| = k-1$, $|rv| = l$ então designamos v através de qualquer de uma das seguintes notações: $u_{[k,l]}, u_{]k-1,l]}, u_{[k,l+1[}$.

De acordo com as convenções habituais, dada uma ordem parcial $\leq$, denotamos por $\geq$ a ordem oposta definida por $u \geq v$ se e só se $v \leq u$.

Proposição 6.6. *Seja $G : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação entre sistemas simbólicos. Sejam $g : A^{2k+1} \to B$ e $h : B^{2l+1} \to A$ duas funções tais que $G = g^{[-k,k]}$ e $G^{-1} = h^{[-l,l]}$. Sejam $u, v \in \overline{\Omega}_A\mathsf{S}$. Consideremos elementos e e f de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S} \setminus A^{<4k+2l}$ tais que $euf \in \mathscr{M}_{2k+2l+1}(\mathcal{X})$. Se $\Delta_{\mathcal{X}}(u) \geq \Delta_{\mathcal{X}}(v)$ então $\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(euf) \geq \Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(evf)$.*

Demonstração. Suponhamos que $(x, y) \in \overline{C}_{\mathcal{Y}}(\bar{g}(euf))$. Pelo Lema 3.9 existem palavras r e s de comprimento $k + l$ tais que $rx\bar{g}(euf)ys \in \overline{L(\mathcal{Y})}$. Sejam $p = \mathrm{i}_{4k+2l}(e)$ e $q = \mathrm{t}_{4k+2l}(f)$, e sejam $\varepsilon, \phi \in (\overline{\Omega}_A\mathsf{S})^1$ tais que $e = p\varepsilon$ e $f = \phi q$. Então

$$\begin{aligned} rx\bar{g}(euf)ys &= rx\bar{g}(p\varepsilon u\phi q)ys \\ &= rx\bar{g}(p_{[1,4k]}) \cdot \bar{g}(p_{]2k,4k+2l]}\varepsilon u\phi q_{[1,2k+2l]}) \cdot \bar{g}(q_{]2l,4k+2l]})ys. \end{aligned}$$

Como as palavras $\bar{g}(p_{]2k,4k+2l]})$ e $\bar{g}(q_{[1,2k+2l]})$ tem comprimento $2l$, temos então

$$\begin{aligned}\bar{h}\big[rx\bar{g}(euf)ys\big] &= \bar{h}\big[rx\bar{g}(p_{[1,4k]})\bar{g}(p_{]2k,4k+2l]})\big]\cdot \bar{h}\bar{g}(p_{]2k,4k+2l]}\varepsilon u\phi q_{[1,2k+2l]})\cdot\\ &\quad\cdot \bar{h}\big[\bar{g}(q_{[1,2k+2l]})\bar{g}(q_{]2l,4k+2l]})ys\big]\\ &= \bar{h}\big[rx\bar{g}(p_{[1,4k+2l]})\big]\cdot \bar{h}\bar{g}(p_{]2k,4k+2l]}\varepsilon u\phi q_{[1,2k+2l]})\cdot \bar{h}\big[\bar{g}(q_{[1,4k+2l]})ys\big].\end{aligned}$$

Por hipótese, $p_{]2k,4k+2l]}\varepsilon u\phi q_{[1,2k+2l]}\in \mathscr{M}_{2k+2l+1}(\mathcal{X})$. Logo deduzimos a seguinte igualdade do Corolário 3.32:

$$\bar{h}\big[rx\bar{g}(euf)ys\big] = \bar{h}\big[rx\bar{g}(p_{[1,4k+2l]})\big]\cdot p_{]3k+l,4k+2l]}\varepsilon\cdot u\cdot \phi q_{[1,k+l]}\cdot \bar{h}\big[\bar{g}(q_{[1,4k+2l]})ys\big]. \tag{6.3}$$

Seja z a pseudopalavra

$$\bar{h}\big[rx\bar{g}(p_{[1,4k+2l]})\big]\cdot p_{]3k+l,4k+2l]}\varepsilon\cdot v\cdot \phi q_{[1,k+l]}\cdot \bar{h}\big[\bar{g}(q_{[1,4k+2l]})ys\big].$$

Como $rx\bar{g}(euf)ys\in\overline{L(\mathcal{Y})}$, temos $\bar{h}\big[rx\bar{g}(euf)ys\big]\in\overline{L(\mathcal{X})}$, pelo Lema 3.29. Logo, como $\Delta_{\mathcal{X}}(u)\geq\Delta_{\mathcal{X}}(v)$, de (6.3) deduzimos que $z\in\overline{L(\mathcal{X})}$, pelo que $\bar{g}(z)\in\overline{L(\mathcal{Y})}$. Novamente pelo Corolário 3.32,

$$\bar{h}\bar{g}(p_{[1,4k+2l]}) = p_{]k+l,3k+l]},\quad \bar{h}\bar{g}(q_{[1,4k+2l]}) = q_{]k+l,3k+l]}.$$

Logo o sufixo de comprimento $2k$ de $\bar{h}\big[rx\bar{g}(p_{[1,4k+2l]})\big]$ é $p_{]k+l,3k+l]}$, e o prefixo de comprimento $2k$ de $\bar{h}\big[\bar{g}(q_{[1,4k+2l]})ys\big]$ é $q_{]k+l,3k+l]}$. Portanto,

$$\bar{g}(z) = \bar{g}\bar{h}\big[rx\bar{g}(p_{[1,4k+2l]})\big]\cdot\bar{g}(p_{]k+l,4k+2l]}\varepsilon v\phi q_{[1,3k+l]})\cdot\bar{g}\bar{h}\big[\bar{g}(q_{[1,4k+2l]})ys\big]. \tag{6.4}$$

As pseudopalavras $rx\bar{g}(p_{[1,4k+2l]})$ e $\bar{g}(q_{[1,4k+2l]})ys$ são elementos de $\overline{L(\mathcal{X})}$, pois são factores de $rx\bar{g}(euf)ys$ e $L(\mathcal{X})$ é factorial (pelo Proposição 3.6). Por outro lado, para $\pi\in\{p,q\}$ temos $\bar{g}(\pi_{[1,4k+2l]})=\bar{g}(\pi_{[1,3k+l]})\bar{g}(\pi_{]k+l,4k+2l]})$, e o comprimento de cada uma das palavras r, s, $\bar{g}(p_{]k+l,4k+2l]})$ e $\bar{g}(q_{[1,3k+l]})$ é $k+l$. Então, aplicando o Corolário 3.32 aos factores extremos do lado direito da igualdade (6.4), podemos efectuar a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned}\bar{g}(z) &= x\bar{g}(p_{[1,3k+l]})\cdot\bar{g}(p_{]k+l,4k+2l]}\varepsilon v\phi q_{[1,3k+l]})\cdot\bar{g}(q_{]k+l,4k+2l]})y\\ &= x\bar{g}(p_{[1,4k+2l]}\varepsilon v\phi q_{[1,4k+2l]})y\\ &= x\bar{g}(evf)y.\end{aligned}$$

Portanto $x\bar{g}(evf)y\in\overline{L(\mathcal{Y})}$. Isto mostra que $\overline{C}_{\mathcal{Y}}(\bar{g}(euf))\subseteq\overline{C}_{\mathcal{Y}}(\bar{g}(evf))$, ou equivalentemente, $\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(euf)\geq\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(evf)$. □

Teorema 6.7. *Seja $G=g^{[-k,k]}:\mathcal{X}\subseteq A^{\mathbb{Z}}\to\mathcal{Y}\subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação entre sistemas simbólicos. Sejam e e f idempotentes de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$. Sejam u e v elementos de $\mathscr{M}(\mathcal{X})$ tais que $u=euf$ e $v=evf$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\Delta_{\mathcal{X}}(u)\geq\Delta_{\mathcal{X}}(v)$,
2. $\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(u)\geq\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(v)$,
3. $\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(e)u\,\mathrm{i}_k(f)]\geq\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(e)v\,\mathrm{i}_k(f)]$.

Demonstração. A implicação (1)⇒(2) segue imediatamente da Proposição 6.6. Suponhamos que $\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(u) \geq \Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(v)$. Então,

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(e)u\,\mathrm{i}_k(f)] &= \Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(e)\,\mathrm{i}_{2k}(e)]\cdot\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(u)\cdot\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_{2k}(f)\,\mathrm{i}_k(f)]\\ &\geq \Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[(\mathrm{t}_k(e)\,\mathrm{i}_{2k}(e)]\cdot\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(v)\cdot\Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_{2k}(f)\,\mathrm{i}_k(f)]\\ &= \Delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(e)v\,\mathrm{i}_k(f)]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Fica assim provada a implicação (2)⇒(3). Suponhamos que se verifica a condição (3). Para $w \in \{u, v\}$ denotemos por w_0 a pseudopalavra $\mathrm{t}_k(e)w\,\mathrm{i}_k(f)$. Pelo Lema 1.62, a pseudopalavra w_0 é $\mathcal{J}$-equivalente a w. Portanto $\bar{g}(w_0) \in \mathscr{M}(\mathcal{Y})$. As pseudopalavras $\varepsilon = \bar{g}[\mathrm{t}_k(e)e\,\mathrm{i}_k(e)]$ e $\phi = \bar{g}[\mathrm{t}_k(f)f\,\mathrm{i}_k(f)]$ são idempotentes tais que $\varepsilon\bar{g}(w_0)\phi = \bar{g}(w_0)$. Portanto, se $H = h^{[-l,l]}$ é a conjugação inversa de G, então pela Proposição 6.6 temos:

$$\Delta_{\mathcal{X}}[\bar{h}\bar{g}(u_0)] \geq \Delta_{\mathcal{X}}[\bar{h}\bar{g}(v_0)]. \tag{6.6}$$

Pelo Corolário 3.31 temos $w_0 = \mathrm{i}_{k+l}(w_0)\bar{h}\bar{g}(w_0)\,\mathrm{t}_{k+l}(w_0)$, ou seja

$$\mathrm{t}_k(e)w\,\mathrm{i}_k(f) = \mathrm{t}_k(e)\mathrm{i}_l(e)\bar{h}\bar{g}(w_0)\,\mathrm{t}_l(f)\mathrm{i}_k(f).$$

Logo $w = \mathrm{i}_l(e)\bar{h}\bar{g}(w_0)\,\mathrm{t}_l(f)$, pela Proposição 1.60. Sejam $r = e\,\mathrm{i}_l(e)$ e $s = \mathrm{t}_l(f)f$. Então $r\bar{h}\bar{g}(w_0)s = ewf = w$. Multiplicando por $\Delta_{\mathcal{X}}(r)$ à esquerda de ambos os membros de (6.6), e por $\Delta_{\mathcal{X}}(s)$ à sua direita, obtemos portanto $\Delta_{\mathcal{X}}(u) \geq \Delta_{\mathcal{X}}(v)$, ficando assim provada a implicação (3)⇒(1). □

6.3 O conjunto $\mathcal{W}(\mathcal{X})$

Nesta secção vamos encontrar um conjunto de pseudopalavras suficientemente pequeno para que se possa contornar o facto de que nem sempre $S(\mathcal{X})$ e $\overline{S}(\mathcal{X})$ são iguais, mas suficientemente grande para que se possam aproveitar certas propriedades, como a existência de pseudopalavras idempotentes.

Lema 6.8. *Seja L uma linguagem de A^+. Suponhamos que u é um elemento de A^+ tal que $\delta_L(u)$ é idempotente. Se $v \in \overline{u^+}$ então $\overline{C}_{\overline{L}}(v) = \overline{C}_{\overline{L}}(u)$.*

Demonstração. Seja $(x, y) \in \overline{C}_{\overline{L}}(v)$. Então existe uma sucessão $(w_n)_n$ de elementos de L convergente para xvy. Pelo Lema 3.5 existe uma subsucessão $(w_{n_k})_k$ e sucessões $(x_k)_k$, $(v_k)_k$ e $(y_k)_k$ tais que $w_{n_k} = x_kv_ky_k$ para todo k e $\lim_{k\to+\infty}(x_k, v_k, y_k) = (x, v, y)$. O conjunto u^+ é racional, pelo que $\overline{u^+}$ é uma vizinhança aberta de v. Logo existe N tal que se $k \geq N$ então $v_k \in u^+$. Como $\delta_L(u)$ é idempotente, se $k \geq N$ então $\delta_L(v_k) = \delta_L(u)$, donde $x_kuy_k \in L$. Portanto $xuy \in \overline{L}$. Logo $\overline{C}_{\overline{L}}(v) \subseteq \overline{C}_{\overline{L}}(u)$.

Seja $(x, y) \in C_L(u)$. Seja k um inteiro positivo. Como $\delta_L(u) = \delta_L(u^k)$, temos $xu^ky \in L$. Logo $xvy \in x\overline{u^+}y \subseteq \overline{L}$. Portanto $C_L(u) \subseteq \overline{C}_{\overline{L}}(v)$. É claro que se K é fechado então $\overline{C}_K(v)$ é fechado. Logo $\overline{C_L(u)} \subseteq \overline{C}_{\overline{L}}(v)$. Ou seja, $\overline{C}_{\overline{L}}(u) \subseteq \overline{C}_{\overline{L}}(v)$, pelo Lema 6.1. □

Se L é uma linguagem de A^+, denotamos por $\mathcal{I}(L)$ o conjunto $\{u \in L \mid \delta_L(u) \text{ é idempotente}\}$.

Lema 6.9. *Seja $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação entre sistemas simbólicos. Se $u \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$ então existe um inteiro N tal que se $n \geq N$ então $\bar{g}(\mathrm{t}_k(u^k)\,u^n\mathrm{i}_k(u^k)) \in \mathcal{I}(\mathcal{Y})$.*

Demonstração. Para qualquer inteiro positivo r temos $\delta_{\mathcal{X}}(u) = \delta_{\mathcal{X}}(u^r)$, pelo que $u^+ \subseteq L(\mathcal{X})$ e
$$\delta_{\mathcal{X}}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^r\, \mathrm{i}_k(u^k)] = \delta_{\mathcal{X}}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u\, \mathrm{i}_k(u^k)],\ \forall r \geq 1. \tag{6.7}$$

Suponhamos que G^{-1} tem memória e antecipação l. Sejam $e = \mathrm{t}_k(u^k)\, u^{3k+2l}$ e $f = u^{3k+2l}\mathrm{i}_k(u^k)$. Seja $N = 2(3k+2l)$. Se $n > N$ então $\mathrm{t}_k(u^k)\, u^n \mathrm{i}_k(u^k) = eu^{n-N}f$. O comprimento de e e de f é igual a $4k+2l$. Além disso, $eu^{n-N}f$ é um factor de uma potência de u, pelo que pertence a $L(\mathcal{X})$. Deste modo, se $n, m > N$ então, invocando o Corolário 6.2 e aplicando duas vezes a Proposição 6.6 à igualdade $\delta_{\mathcal{X}}(u^{n-N}) = \delta_{\mathcal{X}}(u^{m-N})$, concluímos que $\delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(eu^{n-N}f) = \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(eu^{m-N}f)$. Ou seja,
$$n, m > N \Rightarrow \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^n \mathrm{i}_k(u^k)] = \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^m \mathrm{i}_k(u^k)].$$

Em particular,
$$n > N \Rightarrow \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^n \mathrm{i}_k(u^k)] = \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^{2n} \mathrm{i}_k(u^k)]. \tag{6.8}$$

Sendo $n > k$, temos $\bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^{2n}\, \mathrm{i}_k(u^k)] = \bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^n\, \mathrm{i}_k(u^k)]^2$. Logo, se $n > N$ então $\delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^n\, \mathrm{i}_k(u^k)]$ é um idempotente, por (6.8). Além disso, conforme já foi assinalado, $\mathrm{t}_k(u^k)\, u^n\, \mathrm{i}_k(u^k) \in L(\mathcal{X})$, donde $\bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^n\, \mathrm{i}_k(u^k)] \in L(\mathcal{Y})$. Portanto, se $n > N$ então $\bar{g}[\mathrm{t}_k(u^k)\, u^n\, \mathrm{i}_k(u^k)] \in \mathcal{I}(\mathcal{Y})$. □

Dada uma linguagem L de A^+, denotemos por $\mathscr{W}(L)$ o subsemigrupo de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$ gerado pelo conjunto
$$A^+ \cup \Bigl(\bigcup_{u \in \mathcal{I}(L)} \overline{u^+}\Bigr).$$

No próximo lema retomamos a função Υ_L definida no Corolário 6.2.

Lema 6.10. *Seja L uma linguagem de A^+. Então $\Delta_L(\mathscr{W}(L)) = \operatorname{Im}\Upsilon_L$.*

Demonstração. Como $\mathscr{W}(L)$ é gerado por $A^+ \cup \Bigl(\bigcup_{u \in \mathcal{I}(L)} \overline{u^+}\Bigr)$ e a igualdade $\Delta_L(A^+) = \operatorname{Im}\Upsilon_{\mathcal{X}}$ é trivial, apenas temos que mostrar que se $v \in \overline{u^+}$ para algum $u \in \mathcal{I}(L)$ então $v \in \operatorname{Im}\Upsilon_L$. Ora, pelo Lema 6.8, temos $\Delta_L(v) = \Delta_L(u) = \Upsilon_L(\delta_L(u))$. □

De acordo com o Corolário 6.2, a função
$$\begin{array}{rcl} S(L) & \rightarrow & \operatorname{Im}\Upsilon_L \\ \delta_L(u) & \mapsto & \Delta_{\overline{L}}(u), \quad u \in A^+ \end{array}$$

é um isomorfismo de semigrupos ordenados. Por este facto e pelo Lema 6.10 se $u \in \mathscr{W}(L)$ então a função
$$\begin{array}{rrcl} \delta_L^{\mathscr{W}} : & \mathscr{W}(L) & \rightarrow & S(L) \\ & u & \mapsto & \text{o único elemento de } \Upsilon_L^{-1}(\Delta_{\overline{L}}(u)), \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo de semigrupos.

Proposição 6.11. *Seja $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação entre sistemas simbólicos. Então $\bar{g}(\mathscr{W}(\mathcal{X})) \subseteq \mathscr{W}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$.*

Demonstração. Os elementos de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ são da forma

$$w = u_0 v_1^{\nu_1} u_1 v_2^{\nu_1} u_2 \cdots v_{l-1}^{\nu_{l-1}} u_{l-1} v_l^{\nu_l} u_l, \quad l \geq 0,\ u_i \in A^+,\ v_i \in \mathcal{I}(\mathcal{X}),\ x^{\nu_i} \in \overline{\Omega}_1\mathsf{S}.$$

Vamos mostrar por indução sobre l que $\bar{g}(w) \in \mathscr{W}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$. Se $l = 0$ então $\bar{g}(w) \in B^* \subseteq \mathscr{W}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$. Suponhamos que $l > 1$. Seja $w' = u_0 v_1^{\nu_1} u_1 v_2^{\nu_1} u_2 \ldots v_{l-1}^{\nu_{l-1}} u_{l-1}$. Suponhamos que $\bar{g}(w') \in \mathscr{W}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$. Então

$$\begin{aligned} \bar{g}(w) &= \bar{g}(w' v_l^{\nu_l} u_l) \\ &= \bar{g}(w') \cdot \bar{g}[\mathrm{t}_{2k}(w')\, v_l^{\nu_l} u_l] \\ &= \bar{g}(w') \cdot \bar{g}[\mathrm{t}_{2k}(w')\, v_l^k \cdot v_l^{\nu_l - 2k} \cdot v_l^k u_l] \\ &= \bar{g}(w') \cdot \bar{g}[\mathrm{t}_{2k}(w')\, v_l^k\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] \cdot \bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^{\nu_l - 2k}\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] \cdot \bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^k u_l]. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Seja $(c_n)_n$ uma sucessão de inteiros positivos tais que $v_l^{c_n}$ converge para $v_l^{\nu_l - 2k}$. Pelo Lema 6.9 existe um inteiro i maior do que k tal que $\bar{g}[\mathrm{i}_k(v_l^k)\, v_l^i\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] \in \mathcal{I}(\mathcal{Y})$. Para cada n, sejam q_n, r_n os inteiros tais que $c_n = iq_n + r_n$ e $0 \leq r_n < i$. Então

$$\begin{aligned} \bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^{c_n}\, \mathrm{i}_k(v_n^k)] &= \bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^{iq_n} \cdot v_l^{r_n}\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] \\ &= \bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^{iq_n}\, \mathrm{i}_k(v_l^{r_n}\, \mathrm{i}_k(v_l^k))] \cdot \bar{g}[\mathrm{t}_k(\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^{iq_n}) v_l^{r_n}\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] \\ &= \bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, (v_l^i)^{q_n}\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] \cdot \bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^{r_n}\, \mathrm{i}_k(v_l^k)]. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Como $i > k$, temos

$$\bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, (v_l^i)^{q_n}\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] = \bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^i\, \mathrm{i}_k(v_l^k)]^{q_n}.$$

Seja z um ponto de acumulação da sucessão $(\bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^i\, \mathrm{i}_k(v_l^k)]^{q_n})_n$. Então $z \in \mathscr{W}(\mathcal{Y})$, pois $\bar{g}[\mathrm{i}_k(v_l^k)\, v_l^i\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] \in \mathcal{I}(\mathcal{Y})$. Por (6.10) temos

$$\bar{g}[\mathrm{t}_k(v_l^k)\, v_l^{\nu_l - 2k}\, \mathrm{i}_k(v_l^k)] \in zB^*. \tag{6.11}$$

Como $\bar{g}(w') \in \mathscr{W}(\mathcal{Y}) \cup \{1\}$, de (6.11) e de (6.9) deduzimos que $\bar{g}(w) \in \mathscr{W}(\mathcal{Y})$. $\square$

Graças à Proposição 6.11, torna-se claro que o Teorema 6.7 admite a seguinte variação:

Teorema 6.12. *Seja $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação entre sistemas simbólicos. Sejam e e f idempotentes de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$. Consideremos elementos u e v de $\mathscr{M}(\mathcal{X}) \cap \mathscr{W}(\mathcal{X})$ tais que $u = euf$ e $v = evf$. Então $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u) \geq \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(v)$ se e só se $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u) \geq \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(v)$, se e só se $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(e)u\,\mathrm{i}_k(f)] \geq \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}[\mathrm{t}_k(e)v\,\mathrm{i}_k(f)]$.*

Por vezes apenas necessitaremos do seguinte corolário do Teorema 6.12:

Corolário 6.13. *Seja $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação entre sistemas simbólicos. Consideremos idempotentes e e f de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$. Sejam u e v elementos de $\mathscr{M}(\mathcal{X}) \cap \mathscr{W}(\mathcal{X})$ tais que $u = euf$ e $v = evf$. Então $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u) = \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(v)$ se e só se $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(v)$.*

Lema 6.14. *Consideremos uma linguagem L de A^+. Suponhamos que $w \in \mathscr{W}(L)$ e que $p \in A^+$, $t \in \overline{\Omega}_A\mathsf{S}$ são tais que $w = pt$ ou $w = tp$. Então $t \in \mathscr{W}(L)$.*

Demonstração. Vamos considerar o caso $w = pt$ (o caso $w = tp$ é análogo). A pseudopalavra w admite uma factorização da seguinte forma:

$$w = u_0 v_1^{\nu_1} u_1 v_2^{\nu_1} u_2 \ldots v_{l-1}^{\nu_{l-1}} u_{l-1} v_l^{\nu_l} u_l, \quad l \geq 0,\ u_i \in A^+,\ v_i \in \mathcal{I}(L),\ x^{\nu_i} \in \overline{\Omega}_1\mathsf{S}.$$

Seja $w' = v_1^{\nu_1 - |p|} u_1 v_2^{\nu_1} u_2 \ldots v_{l-1}^{\nu_{l-1}} u_{l-1} v_l^{\nu_l} u_l$. Observemos que $w' \in \mathscr{W}(\mathcal{X})$. Então $w = u_0 v_1^{|p|} w'$. Pela Proposição 1.60, como $|u_0 v_1^{|p|}| > |p|$ temos $t = zw'$ para algum $z \in A^+$. $\square$

O Lema 6.14 permite-nos fazer a seguinte adaptação do Lema 1.61:

Lema 6.15. *Consideremos uma linguagem L de A^+. Seja π um elemento de $\mathscr{W}(L)$ limitado por idempotentes de $\mathscr{W}(L)$. Seja ρ um elemento de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tal que $\pi = x\rho y$ para algumas palavras x, y de A^*. Então π e ρ são elementos de $\mathscr{W}(L)$ pertencentes à mesma $\mathcal{J}$-classe do semigrupo $\mathscr{W}(L)$.*

Demonstração. Observemos desde logo que $\rho \in \mathscr{W}(L)$, pelo Lema 6.14. Queremos mostrar que π é um factor de ρ em $\mathscr{W}(L)$. Consideremos idempotentes e e f de $\mathscr{W}(L)$ tais que $\pi = e\pi f$. Como $e\pi f = x\rho y$, temos $\mathrm{i}_{|x|}(e) = x$ e $\mathrm{t}_{|y|}(f) = y$. Logo existem elementos e_0 e f_0 de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tais que $e = xe_0$ e $f = f_0 y$. Por outro lado, $xe_0\pi f_0 y = x\rho y$. Logo $e_0\pi f_0 = \rho$, pela Proposição 1.60. Como, de acordo com o Lema 6.14, temos $e_0, f_0 \in \mathscr{W}(L)$, isto mostra que π e ρ são elementos de $\mathscr{W}(L)$ pertencentes à mesma $\mathcal{J}$-classe do semigrupo $\mathscr{W}(L)$. $\square$

6.4 Um CPO invariante

Consideremos um sistema simbólico $\mathcal{X}$. Como $L(\mathcal{X})$ e $\overline{L(\mathcal{X})}$ são factoriais (Proposição 3.6), pela Proposição 2.15 os semigrupos $S(\mathcal{X})$ e $\overline{S}(\mathcal{X})$ têm um zero e verificam-se as seguintes igualdades:

$$\delta_{\mathcal{X}}^{-1}\delta_{\mathcal{X}}\big(L(\mathcal{X})\big) = L(\mathcal{X}), \qquad \Delta_{\mathcal{X}}^{-1}\Delta_{\mathcal{X}}\Big(\overline{L(\mathcal{X})}\Big) = \overline{L(\mathcal{X})}. \tag{6.12}$$

Mais precisamente

$$\delta_{\mathcal{X}}^{-1}\big(S(\mathcal{X}) \setminus \{0\}\big) = L(\mathcal{X}), \qquad \Delta_{\mathcal{X}}^{-1}\big(\overline{S}(\mathcal{X}) \setminus \{0\}\big) = \overline{L(\mathcal{X})}.$$

Note-se que $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))$ é uma união de $\mathcal{J}$-classes. O CPO etiquetado $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))^{\dagger}_{\times}$ é designado pelo acrónimo CECLIIS de **c***po* **e***tiquetado das $\mathcal{J}$-***c***lasses contendo elementos* **l***imitados por* **i***dempotentes na* **i***magem* **s***intáctica* de $\mathcal{X}$. Note-se que a linguagem L no Exemplo 1.29 é factorial e prolongável, e que o semigrupo sintáctico de L possui uma $\mathcal{J}$-classe que contêm elementos limitados por idempotentes e elementos que não são limitados por idempotentes.

Lema 6.16. *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$. Se ε é um idempotente de $S(\mathcal{X})$ diferente de 0 então existe um idempotente e de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ tal que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(e) = \varepsilon$. Se s é um elemento de $S(\mathcal{X})$ diferente de 0 limitado pelos idempotentes ε_1 e ε_2 então existem um elemento t de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ e idempotentes e_1 e e_2 de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ tais que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(e_i) = \varepsilon_i$ e $t = e_1 t e_2$.*

Demonstração. Existe $u \in L(\mathcal{X})$ tal que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u) = \varepsilon$. Então $u^{\omega} \in \mathscr{W}(\mathcal{X})$ $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u^{\omega}) = \varepsilon$, pelo Lema 6.8.

Seja $v \in L(\mathcal{X})$ tal que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(v) = s$. Conforme vimos, existem idempotentes e_1, e_2 de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ tais que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(e_i) = \varepsilon_i$. Seja $t = e_1 v e_2$. Então $t \in \mathscr{W}(\mathcal{X})$, $t = e_1 t e_2$ e $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(t) = e_1 s e_2 = s$. $\square$

Dado um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$, vamos considerar o conjunto

$$\mathscr{B}(\mathcal{X}) = \{euf \mid u, e, f \in \mathscr{W}(\mathcal{X}) \cap \overline{L(\mathcal{X})};\ e, f \text{ são idempotentes}\}.$$

Seja J uma $\mathcal{J}$-classe limitada por idempotentes contida em $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))$. Então $(\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}})^{-1}(J) \subseteq \overline{L(\mathcal{X})}$, por (6.12). Então, pelo Lema 6.16, existe $w \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ tal que $[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(w)]_{\mathcal{J}} = J$. Deste modo, dada uma conjugação de sistemas simbólicos $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$, somos levados a considerar a correspondência definida da seguinte forma (note-se que $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w)$ é limitado por idempotentes sempre que $w \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$, pelo Lema 1.56):

$$\begin{aligned} G^s: \quad \delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))^\dagger &\to \delta_{\mathcal{Y}}(L(\mathcal{Y}))^\dagger \\ [\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(w)]_{\mathcal{J}} &\mapsto [\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w)]_{\mathcal{J}}, \quad w \in \mathscr{B}(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

Proposição 6.17. *Seja $G = g^{[-k,k]} : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação de sistemas simbólicos. A correspondência G^s é uma função que preserva a ordem.*

Demonstração. Suponhamos que w_1, $w_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ são tais que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(w_1) \leq_{\mathcal{J}} \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(w_2)$. Então existem $u, v \in A^*$ tais que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(w_1) = \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uw_2v)$. Sejam $e, f \in \mathscr{W}(\mathcal{X})$ idempotentes tais que $w_1 = ew_1f$. Então $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(w_1) = \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(euw_2vf)$. De (6.12) resulta que $euw_2vf \in \overline{L(\mathcal{X})}$. Então $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w_1) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(euw_2vf)$, pelo Corolário 6.13. Logo

$$\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w_1) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}[eu\,\mathrm{i}_{2k}(w_2)] \cdot \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w_2) \cdot \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}[\mathrm{t}_{2k}(w_2)vf].$$

pelo que $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w_1) \leq_{\mathcal{J}} \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w_2)$, o que mostra que a correspondência G^s preserva a ordem. Além do mais, se $[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(w_1)]_{\mathcal{J}} = [\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(w_2)]_{\mathcal{J}}$ então $[\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w_1)]_{\mathcal{J}} = [\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(w_2)]_{\mathcal{J}}$, o que mostra que G^s é uma função. □

Lema 6.18. *A função G^s não depende da escolha da função de blocos de G.*

Demonstração. Suponhamos que $G = g_1^{[-k,k]} = g_2^{[-l,l]}$ e que $k \geq l$. Seja u um elemento de $\mathscr{B}(\mathcal{X})$. Pela Proposição 6.11, podemos considerar as restrições $\bar{g}_1 : \mathscr{W}(\mathcal{X}) \to \mathscr{W}(\mathcal{Y})^1$ e $\bar{g}_2 : \mathscr{W}(\mathcal{X}) \to \mathscr{W}(\mathcal{Y})^1$. Então, pelo Lema 1.56, a pseudopalavra $\bar{g}_2(u)$ é limitada por idempotentes de $\mathscr{W}(\mathcal{Y})$. Por outro lado, pelo Lema 3.30, existem palavras r e s de comprimento $k-l$ tais que $\bar{g}_2(u) = r\bar{g}_1(u)s$. Pelo Lema 6.15, as pseudopalavras $\bar{g}_1(u)$ e $\bar{g}_2(u)$ estão na mesma $\mathcal{J}$-classe de $\mathscr{W}(\mathcal{Y})$. Logo $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}_1(u)$ e $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}g_2(u)$ são $\mathcal{J}$-equivalentes. □

Proposição 6.19. *Sejam $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $H : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ conjugações de sistemas simbólicos. Então $H^s \circ G^s = (H \circ G)^s$. Além disso, $(\mathrm{Id}_{\mathcal{X}})^s = \mathrm{Id}_{\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))^\dagger}$.*

Demonstração. Inteiramente análoga à demonstração da Proposição 3.35. □

Corolário 6.20. *O CPO $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))^\dagger$ é um invariante de conjugação de sistemas simbólicos.*

Proposição 6.21. *Seja $G : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação de sistemas simbólicos. Se K é uma $\mathcal{J}$-classe de $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))$ então K é regular se e só se $G^s(K)$ é regular.*

Demonstração. Suponhamos que K é uma $\mathcal{J}$-classe regular de $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))$. Pelo Lema 6.16, existe um idempotente e em $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ tal que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(e) \in K$. A pseudopalavra $\bar{g}(e)$ é um elemento regular do semigrupo $\mathscr{W}(\mathcal{Y})$, pelo Lema 1.56. Como $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(e) \in G^s(K)$, deduzimos que $G^s(K)$ é regular. Do mesmo modo, $(G^{-1})^s$ envia $\mathcal{J}$-classes regulares em $\mathcal{J}$-classes regulares. Ora $(G^{-1})^s = (G^s)^{-1}$, pela Proposição 6.19. Logo G^s envia $\mathcal{J}$-classes não regulares em $\mathcal{J}$-classes não regulares. □

Proposição 6.22. *Seja $G : \mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ uma conjugação entre sistemas simbólicos. Se K é uma $\mathcal{J}$-classe de $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))$ limitada por idempotentes então os grupos de Schützenberger de K e de $G^s(K)$ são isomorfos.*

Demonstração. As Proposições 2.8 e 6.19 reduzem-nos ao caso em que G é uma codificação unitária. Suponhamos que g é uma função de blocos de G com memória e antecipação zero. Convém sublinhar que a restrição de $\bar{g}$ a $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ é um homomorfismo de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ em $\mathscr{W}(\mathcal{Y})$. Seja U uma $\mathcal{H}$-classe de K que contém elementos limitados por idempotentes. Pelo Lema 6.16 existe um elemento u de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ limitado por alguns idempotentes e e f de $\mathscr{W}(\mathcal{X})$ e tal que $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u) \in U$. Note-se que, sendo U uma $\mathcal{H}$-classe, todos os elementos de U são limitados pelos idempotentes $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(e)$ e $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(f)$. Consideremos o conjunto

$$P = \{z \in \mathscr{W}(\mathcal{X}) : z = fzf \text{ e } \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(z) \in T(U)\}.$$

Pela definição de G^s temos $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u) \in G^s(K)$. Seja V a $\mathcal{H}$-classe de $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u)$. Cada elemento de U é da forma $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz)$ para algum $z \in P$. Consideremos a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} \eta : U &\to S(\mathcal{Y}) \\ \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz) &\mapsto \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(uz), \quad z \in P. \end{aligned}$$

Sejam z_1 e z_2 elementos de P. Como $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz_i) \in U \subseteq \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}\big(\overline{L(\mathcal{X})}\big)$, temos $uz_i \in \overline{L(\mathcal{X})}$, por (6.12). E como $uz_i = euz_if$, pelo Corolário 6.13 temos $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz_1) = \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz_2)$ se e só se $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(uz_1) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(uz_2)$. Isto mostra que η é uma função bem definida e injectiva.

Seja $z \in P$. Como $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u)$ e $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz)$ são $\mathcal{H}$-equivalentes, existem $z_0, z_1, z_2 \in \mathscr{W}(\mathcal{X})$ tais que:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz) &= \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(z_0u), & z_0 &= ez_0, \\ \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u) &= \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uzz_1), & z_1 &= z_1f, \\ \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u) &= \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(z_2uz), & z_2 &= ez_2. \end{aligned}$$

Se π é qualquer um dos elementos de $\{u, uz, z_0u, uzz_1, z_2uz\}$ então $\pi = e\pi f$ e $\pi \in \overline{L(\mathcal{X})}$. Assim, pelo Corolário 6.13 temos

$$\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(uz) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(z_0u), \quad \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(uzz_1), \quad \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(z_2uz).$$

Logo $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(uz)$ é $\mathcal{H}$-equivalente a $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u)$. Concluímos assim que $\eta(U) \subseteq V$.

Consideremos os idempotentes $\varepsilon = \bar{g}(e)$ e $\phi = \bar{g}(f)$ de $\mathscr{W}(\mathcal{Y})$. Como $u = euf$, todos os elementos de V são limitados pelos idempotentes $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(\varepsilon)$ e $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(\phi)$. Seja v um qualquer elemento de V. Como v e $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u)$ estão ambos na $\mathcal{H}$-classe V, existem $s_1, s_2, p_1, p_2 \in \mathscr{W}(\mathcal{Y})$ tais que:

$$v = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}[\bar{g}(u)s_1], \quad s_1 = \phi s_1 \phi \tag{6.13}$$

$$v = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}[p_1\bar{g}(u)], \quad p_1 = \varepsilon p_1 \varepsilon, \tag{6.14}$$

$$\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u) = v \cdot \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(s_2), \quad s_2 = \phi s_2 \phi, \tag{6.15}$$

$$\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(p_2) \cdot v, \quad p_2 = \varepsilon p_2 \varepsilon. \tag{6.16}$$

Como $v \neq 0$ e $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(u) \neq 0$, também temos $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(s_i) \neq 0$ e $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(p_i) \neq 0$. Logo $s_i, p_i \in \overline{L(\mathcal{Y})}$. Então pelo Lema 3.33 existem $t_i, q_i \in \mathscr{M}(\mathcal{X}) \cap \mathscr{W}(\mathcal{X})$ tais que $\bar{g}(t_i) = s_i$ e $t_i = ft_if$, e $\bar{g}(q_i) = p_i$ e $q_i = eq_ie$. Logo, de (6.13) e (6.14) resultam as seguintes igualdades:

$$v = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(ut_1) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\bar{g}(q_1u) \tag{6.17}$$

Aplicando a primeira igualdade de (6.17), deduzimos de (6.15) e de (6.16) a seguinte cadeia de igualdades:

$$\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(u) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(ut_1t_2) = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(q_2ut_1). \tag{6.18}$$

Consideremos o conjunto $C = \{u, ut_1, q_1u, ut_1t_2, q_2ut_1\}$. Se $\pi \in C$ então $\pi = e\pi f$. Além disso, pelo Corolário 1.50 temos $C \subseteq \mathscr{M}(\mathcal{X})$. Então podemos aplicar o Corolário 6.13 nas igualdades (6.17) e (6.18), obtendo

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(ut_1) &= \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(q_1u), \\ \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u) &= \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(ut_1t_2) = \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(q_2ut_1). \end{aligned}$$

Logo $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(ut_1)$ é $\mathcal{H}$-equivalente a $\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(u)$, pelo que $t_1 \in P$. Assim $\eta[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(ut_1)] = \delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(ut_1)$, ou seja, $\eta[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(ut_1)] = v$ (por (6.17)). Deste modo concluímos que $\eta(U) = V$.

Cada elemento elemento de $\Gamma(U)$ é da forma $\xi_U[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(z)]$ para algum $z \in P$. Sejam $z_1, z_2 \in P$. Então

$$\xi_U[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(z_1)] = \xi_U[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(z_2)] \Leftrightarrow \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz_1) = \delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz_2).$$

Além disso, $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(\bar{g}(z_1))$ e $\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(\bar{g}(z_2))$ pertencem a $T(V)$ e

$$\xi_V[\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(\bar{g}(z_1))] = \xi_V[\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}(\bar{g}(z_2))] \Leftrightarrow \eta[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz_1)] = \eta[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz_2)].$$

Portanto, como η é uma função injectiva, a correspondência

$$\Psi:\ \xi_U[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(z)] \mapsto \xi_V[\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(z)], \quad z \in P,$$

é um homomorfismo bem definido e injectivo de $\Gamma(U)$ em $\Gamma(V)$. Por outro lado, se $w \in T(V)$ então, como $V = \eta(U)$, existe $z \in P$ tal que

$$(\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(u)) \cdot w = \eta[\delta_{\mathcal{X}}^{\mathscr{W}}(uz)] = (\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(u)) \cdot (\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(z)).$$

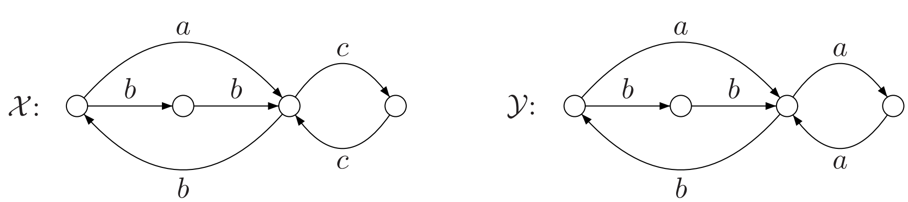
Logo $\xi_V(w) = \xi_V[\delta_{\mathcal{Y}}^{\mathscr{W}}\,\bar{g}(z)]$, donde $\Psi(\Gamma(U)) = \Gamma(V)$, pelo que $\Gamma(U)$ e $\Gamma(V)$ são isomorfos. □

Juntando o Corolário 6.20 e as Proposições 6.21 e 6.22, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 6.23. *O CECLIIS de um sistema simbólico é um invariante de conjugação.*

O autor já havia demonstrado em [Cos06] a versão do Teorema 6.23 restrita aos sistemas simbólicos sóficos. A demonstração aqui apresentada resulta do refinamento dos métodos introduzidos em [Cos06], refinamento esse que consiste essencialmente na consideração do semigrupo $\overline{S}(\mathcal{X})$ e nas ideias que aparecem na Secção 6.3.

Exemplo 6.24. Retomemos os sistemas simbólicos sóficos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ do Exemplo 2.29:



Já verificámos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ não são conjugados porque as respectivas coberturas de Krieger têm formas de Jordan não nulas distintas. Uma justificação alternativa é a de que os CECLIIS de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ não são isomorfos (ver Figura 6.1, onde $\mathbb{Z}_n$ denota o grupo cíclico de ordem n).

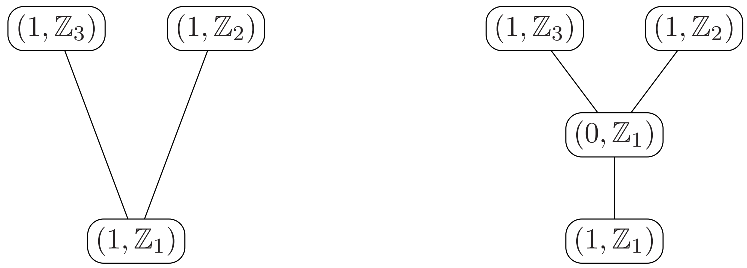


Figura 6.1: Os CECLIIS dos sistemas simbólicos do Exemplo 6.24.

Exemplo 6.25. Consideremos as apresentações de dois sistemas simbólicos sóficos irredutíveis $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dadas na Figura 6.2. Essas apresentações são as apresentações direitas de Fischer de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$. Podemos verificar que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são de tipo quase finito. Se eliminarmos as arestas a tracejado então obtemos o sistema simbólico de multiplicidade da cobertura direita de Fischer.

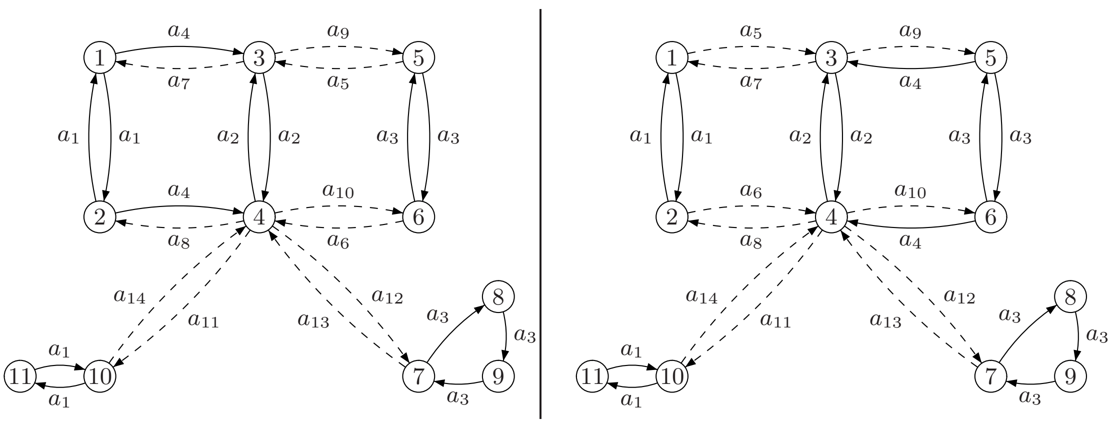


Figura 6.2: Apresentações de Fischer de dois sistemas simbólicos sóficos.

Os sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ não são conjugados, uma vez que os respectivos CECLIIS não são isomorfos (Figura 6.3).

Vejamos o que se passa com outros invariantes. Os sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ têm a mesma função zeta. As apresentações direitas de Krieger de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ obtêm-se acrescentando aos respectivos grafos da Figura 6.2 as arestas dos correspondentes grafos da Figura 6.4 (os vértices adicionais 12, 13 e 14 estão representados por um quadrado). Note-se que as coberturas de Krieger e de Fischer de $\mathcal{X}$ têm respectivamente o mesmo domínio das coberturas de Krieger e de Fischer de $\mathcal{Y}$. As coberturas direitas de Fischer de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ têm o mesmo sistema simbólico de multiplicidade. As imagens das respectivas coberturas de multiplicidade têm a mesma função zeta, cobertura de Krieger com o mesmo domínio, e cobertura de multiplicidade com o mesmo domínio e a mesma imagem. As mesmas situações ocorrem com as apresentações esquerdas de Krieger e de Fischer. Em comparação com os exemplos de [BFP06] e o exemplo 6.24, a detecção do facto de que os sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ não são conjugados falha para um leque significativamente mais abrangente de invariantes de conjugação.

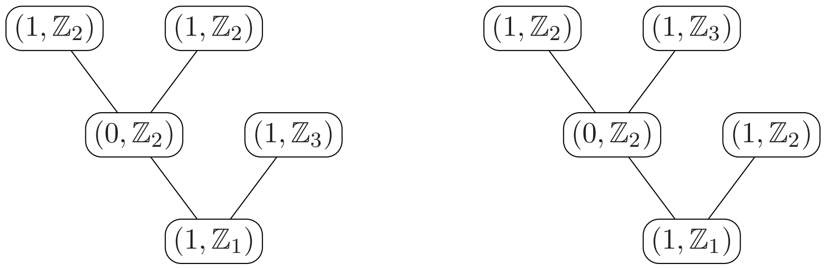


Figura 6.3: Os CECLIIS de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$

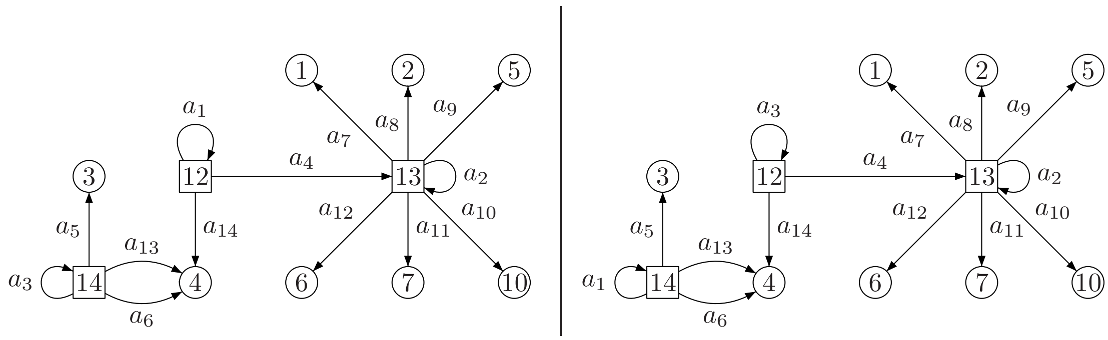


Figura 6.4: Arestas adicionais para se obterem as respectivas coberturas direitas de Krieger dos sistemas simbólicos da Figura 6.2.

Nos dois exemplos anteriores, o CECCLIIS tem um elemento mínimo etiquetado $(1, \mathbb{Z}_1)$. Os sistemas simbólicos sóficos em que tal acontece são precisamente os sistemas sóficos irredutíveis, de acordo com as Proposições 2.18 e 2.21. Mais geralmente, para qualquer sistema sófico, os elementos minimais do CECLIIS são etiquetados pelo grupo $\mathbb{Z}_1$ (cf. Proposição 2.21). Para um exemplo em que o sistema simbólico não é irredutível, veja-se o sistema da Figura 2.2 (em que todas as $\mathcal{J}$-classes do respectivo semigrupo sintáctico são limitadas por idempotentes, pelo que de certa forma o próprio diagrama de Green na Figura 2.2 representa o CECLIIS).

A próxima proposição surge em [BFP06] sob uma forma ligeiramente diferente. Incluímos aqui a sua demonstração por se tratar de uma aplicação do Teorema 6.23.

Proposição 6.26. *Um sistema simbólico sófico é irredutível e de tipo finito se e só se o seu CECLIIS é um CPO etiquetado com um único elemento.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico irredutível de tipo finito. Então pela Proposição 2.9. existe um grafo G fortemente conexo com n vértices tal que $\mathcal{X}$ e X_{G} são conjugados. Como o CECLIIS é um invariante de conjugação, o CECLIIS de $\mathcal{X}$ é igual ao de X_{G}, o qual pela Observação 2.23 é igual ao CPO etiquetado singular cujo único elemento tem a etiqueta $(1, \mathbb{Z}_1)$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ diferente de $A^{\mathbb{Z}}$ e tal que $S(\mathcal{X}) \setminus \{0\}$ contém uma única $\mathcal{J}$-classe K limitada por idempotentes. Então existem idempotentes diferentes de zero, pelo que K é regular. Por outro lado, pela Proposição 2.18, K é uma $\mathcal{J}$-classe 0-miníma e $\mathcal{X}$ é irredutível.

Seja $u \in A^+$ tal que $\delta_{\mathcal{X}}(u) \in K$. De acordo com a Proposição 2.21 existe $v \in A^*$ tal que

$\delta_{\mathcal{X}}(uv)$ é um elemento de rank 1. Como K é 0-mínima, temos $\delta_{\mathcal{X}}(uv) \in K$, e portanto K tem rank 1. Pela Proposição 1.42, se w é um elemento de $L(\mathcal{X})$ com comprimento maior do que o cardinal de $S(\mathcal{X})$ então $\delta_{\mathcal{X}}(w)$ tem algum idempotente como factor. Como $\delta_{\mathcal{X}}(w) \neq 0$ e K é a única $\mathcal{J}$-classe regular e é 0-mínima, temos $\delta_{\mathcal{X}}(w) \in K$. Logo $\mathcal{X}$ é de tipo finito, pela Proposição 2.21. □

Resulta das Proposições 2.18 e 6.26, que o CECLIIS não serve para detectar pares não conjugados de sistemas simbólicos irredutíveis de tipo finito: em tais casos o CECLIIS reduz-se a um único elemento etiquetado $(1, \mathbb{Z}_1)$. Por outro lado, ambos os sistemas simbólicos do Exemplo 6.24 são de tipo quase finito.

6.5 O rank nas apresentações de Krieger e de Fischer

Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico sófico de $A^{\mathbb{Z}}$. Vamos identificar as funções $\Delta_{\overline{L}}$ com $\hat{\delta}_L$, o que, sendo $\mathcal{X}$ sófico, nos é permitido pela Proposição 6.3. Seja $u \in \overline{\Omega}_A \mathsf{S}$. Vamos denotar por $\mathrm{Im}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})}\, u$ (respectivamente $\mathrm{Im}_{\mathfrak{F}(\mathcal{X})}\, u$) a imagem em $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$ (respectivamente $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$) da função parcial $\hat{\delta}_{\mathcal{X}}(u)$. Dada uma $\mathcal{J}$-classe K de $S(\mathcal{X})$, vamos denotar por $\mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} K$ (respectivamente $\mathrm{rank}_{\mathfrak{F}(\mathcal{X})} K$) o rank de K considerando $S(\mathcal{X})$ como o semigrupo de transição de $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$ (respectivamente $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$).

Vimos na Subsecção 2.2.2 que $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$ pode ser considerado como sendo o autómato $\mathfrak{fut}(\mathcal{X})$. Sublinhemos em particular que se $x \in A^{\mathbb{Z}^-}$ então $\mathfrak{f}(x)$ é um vértice de $\mathfrak{fut}(\mathcal{X})$ se e só se $\mathfrak{f}(x) \neq \emptyset$, se e só se $x_{[-n,-1]} \in L(\mathcal{X})$ para qualquer inteiro positivo n. Estas observações são-nos convenientes para a demonstração da proposição seguinte.

Proposição 6.27. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sistemas simbólicos sóficos de $A^{\mathbb{Z}}$ e de $B^{\mathbb{Z}}$, respectivamente. Suponhamos que temos uma conjugação $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Seja K é uma $\mathcal{J}$-classe limitada por idempotentes contida em $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))$. Então $\mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} K = \mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{Y})} G^s(K)$. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são irredutíveis então $\mathrm{rank}_{\mathfrak{F}(\mathcal{X})} K = \mathrm{rank}_{\mathfrak{F}(\mathcal{Y})} G^s(K)$.*

Demonstração. Uma vez provada a desigualdade $\mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} K \leq \mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{Y})} G^s(K)$, basta-nos então aplicá-la a G^{-1} para obtermos a desigualdade contrária:

$$\mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{Y})} G^s(K) \leq \mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} (G^{-1})^s G^s(K) = \mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} K.$$

Suponhamos que $G = g^{[-k,k]}$ e que $G^{-1} = h^{[-l,l]}$. De acordo com o Lema 6.16, existem $u \in A^+$ e $e, f \in \overline{\Omega}_A \mathsf{S}$ tais que e e f são idempotentes e $\hat{\delta}_{\mathcal{X}}(euf) \in K$. A continuidade de $\hat{\delta}_{\mathcal{X}}$, de $\hat{\delta}_{\mathcal{Y}}\bar{g}$, de t_{2k} e de i_{2k}, garante-nos que existem elementos e_0 e f_0 de A^+ (que vão funcionar como aproximações de e e de f) com comprimento maior do que $2k + 2l$ e tais que

$$\begin{aligned} &\delta_{\mathcal{X}}(e_0) = \delta_{\mathcal{X}}(e), \quad \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(e_0) = \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(e), \quad \mathrm{t}_{2k}(f) = \mathrm{t}_{2k}(f_0), \\ &\delta_{\mathcal{X}}(f_0) = \delta_{\mathcal{X}}(f), \quad \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(f_0) = \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(f), \quad \mathrm{i}_{2k}(e) = \mathrm{i}_{2k}(e_0). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(e_0 u f_0) &= \delta_{\mathcal{Y}}\big[\bar{g}(e_0) \cdot \bar{g}(\mathrm{t}_{2k}(e_0) u\, \mathrm{i}_{2k}(f_0)) \cdot \bar{g}(f_0)\big] \\ &= \hat{\delta}_{\mathcal{Y}}\big[\bar{g}(e) \cdot \bar{g}(\mathrm{t}_{2k}(e) u\, \mathrm{i}_{2k}(f)) \cdot \bar{g}(f)\big] \\ &= \hat{\delta}_{\mathcal{Y}}\bar{g}(euf). \end{aligned}$$

Para $x \in A^{\mathbb{Z}^-}$, seja $\bar{g}(x) = (g(x_{i-k,i+k}))_{i<-k} \in A^{\mathbb{Z}^-}$; e para $x \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$, seja $\bar{g}(x) = (g(x_{i-k,i+k}))_{i\geq k} \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$. Consideremos uma família $\mathcal{F} = (v_q)_{q\in \operatorname{Im}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} e_0uf_0}$ de elementos de $A^{\mathbb{Z}^-}$ tais que $q = \mathfrak{f}(v_q)\cdot e_0uf_0$. Consideremos a seguinte função:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathcal{F}} : \operatorname{Im}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} e_0uf_0 &\to \operatorname{Im}_{\mathfrak{K}(\mathcal{Y})} \bar{g}(e_0uf_0)\\ q &\mapsto \mathfrak{f}[\bar{g}(v_qe_0uf_0)].\end{aligned}$$

A função $\psi_{\mathcal{F}}$ está bem definida, pois $\mathfrak{f}[\bar{g}(v_qe_0uf_0)] = \mathfrak{f}[\bar{g}(v_q\,\mathrm{i}_{2k}(e_0uf_0))]\cdot\bar{g}(e_0uf_0)$. Uma vez que $\delta_{\mathcal{Y}}\bar{g}(e_0uf_0) = \hat{\delta}_{\mathcal{Y}}\bar{g}(euf) \in G^s(K)$, a demonstração da desigualdade $\operatorname{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} K \leq \operatorname{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{Y})} G^s(K)$ ficará portanto concluída assim que mostrarmos que $\psi_{\mathcal{F}}$ é injectiva. Suponhamos que q e r são elementos distintos de $\operatorname{Im}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} K$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que existe $s \in A^{\mathbb{Z}^+}$ verificando as seguintes condições:

$$v_qe_0uf_0.s \in \mathcal{X}, \quad v_re_0uf_0.s \notin \mathcal{X}. \tag{6.19}$$

Logo

$$\bar{g}(v_qe_0uf_0).\bar{g}(\mathrm{t}_{2k}(v_qe_0uf_0)s) \in \mathcal{Y}. \tag{6.20}$$

Queremos provar o seguinte:

$$\bar{g}(v_re_0uf_0).\bar{g}(\mathrm{t}_{2k}(v_qe_0uf_0)s) \notin \mathcal{Y}. \tag{6.21}$$

Suponhamos o contrário. Então para todo o $i \geq 1$ temos

$$\bar{g}\big((v_r)_{[-i-k-l,-1]}e_0uf_0s_{[0,i+1+k+l]}\big) \in L(\mathcal{Y}). \tag{6.22}$$

Notemos que $(v_r)_{[-i-k-l,-1]}e_0uf_0 \in L(\mathcal{X})$ (pois $\mathfrak{f}(v_re_0uf_0) = r \neq \emptyset$) e que $f_0s_{[0,i+1+k+l]} \in L(\mathcal{X})$ (pois $v_qe_0uf_0.s \in \mathcal{X}$). Logo, como f_0 tem comprimento maior do que $2k+2l$, temos $(v_r)_{[-i-k-l,-1]}e_0uf_0s_{[0,i+1+k+l]} \in \mathscr{M}_{2k+2l+1}(\mathcal{X})$. Do Corolário 3.32 deduzimos que

$$(v_r)_{[-i,-1]}e_0uf_0s_{[0,i+1]} = \bar{h}\bar{g}\big((v_r)_{[-i-k-l,-1]}e_0uf_0s_{[0,i+1+k+l]}\big).$$

Portanto $(v_r)_{[-i,-1]}e_0uf_0s_{[0,i+1]} \in L(\mathcal{X})$, por (6.22). Uma vez que i pode ser tomado arbitrariamente grande, isto implica $v_re_0uf_0.s \in \mathcal{X}$, o que contradiz (6.19). Logo a condição (6.21) é verdadeira. Comparando (6.20) e (6.21), concluímos que $\psi_{\mathcal{F}}(q) \neq \psi_{\mathcal{F}}(r)$. Logo $\psi_{\mathcal{F}}$ é injectiva. Conforme já observámos, fica assim provado que $\operatorname{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} K = \operatorname{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{Y})} G^s(K)$. Daqui se conclui que ψ_F é de facto bijectiva.

Novamente, para provarmos que $\operatorname{rank}_{\mathfrak{F}(\mathcal{X})} K = \operatorname{rank}_{\mathfrak{F}(\mathcal{Y})} G^s(K)$ basta-nos provar a desigualdade $\operatorname{rank}_{\mathfrak{F}(\mathcal{X})} K \leq \operatorname{rank}_{\mathfrak{F}(\mathcal{Y})} G^s(K)$. Seja r um vértice de $\mathfrak{F}(\mathcal{Y})$. Como $\mathfrak{F}(\mathcal{Y})$ é fortemente conexo, existe $z \in B^+$ tal que $r\cdot z = r$, o que implica $r\cdot z^\omega = r$ e $z^\omega \in \overline{L(\mathcal{Y})}$. Seja $z' = \mathrm{i}_{k+l}(z^\omega)\,z^\omega\,\mathrm{t}_{k+l}(z^\omega)$. Pelo Lema 1.62, as pseudopalavras z^ω e z' são $\mathcal{J}$-equivalentes, logo z' é limitado por idempotentes. Por outro lado, pela Proposição 3.6 o conjunto $\overline{L(\mathcal{Y})}$ é factorial, pelo que $z' \in \overline{L(\mathcal{Y})}$. Logo $\bar{h}(z')$ é um elemento de $\overline{L(\mathcal{X})}$ limitado por idempotentes e $\bar{g}\bar{h}(z') = z^\omega$, pelo Corolário 3.32. Podemos portanto considerar uma função $\psi_{\mathcal{G}} : \operatorname{Im}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} \bar{h}(z') \to \operatorname{Im}_{\mathfrak{K}(\mathcal{Y})} z^\omega$ para alguma família $\mathcal{G}$. Como $\psi_{\mathcal{G}}$ é sobrejectiva, temos $r = \mathfrak{f}[\bar{g}(x)]$ para algum elemento x de $A^{\mathbb{Z}^-}$ tal que $\mathfrak{f}(x) \neq \emptyset$. Para cada $q \in \operatorname{Im}_{\mathfrak{F}(\mathcal{X})} e_0uf_0$, seja $v_q \in A^{\mathbb{Z}^-}$ tal que $\mathfrak{f}(v_q)$ é um vértice de $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$ e $q = \mathfrak{f}(v_q)\cdot e_0uf_0$. Como $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$ é a única componente terminal fortemente conexa de $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$, existe $w_q \in A^+$ tal que $\mathfrak{f}(v_q) = \mathfrak{f}(x)\cdot w_q = \mathfrak{f}(xw_q)$. Já mostrámos que a função

$$\begin{aligned}\varphi : \operatorname{Im}_{\mathfrak{F}(\mathcal{X})} e_0uf_0 &\to \operatorname{Im}_{\mathfrak{K}(\mathcal{Y})} \bar{g}(e_0uf_0)\\ q &\mapsto \mathfrak{f}[\bar{g}(xw_qe_0uf_0)].\end{aligned}$$

é injectiva. Por outro lado, $\varphi(q) = \mathfrak{f}[\bar{g}(x)] \cdot \bar{g}(\mathrm{t}_{2k}(x) w_q e_0 u f_0))$ e $\mathfrak{f}[\bar{g}(x)]$ é um vértice de $\mathfrak{F}(\mathcal{Y})$. Como $\mathfrak{F}(\mathcal{Y})$ é um subgrafo etiquetado terminal de $\mathfrak{K}(\mathcal{Y})$, isto mostra que $\varphi(q) \in \mathrm{Im}_{\mathfrak{F}(\mathcal{Y})}\, \bar{g}(e_0 u f_0)$. □

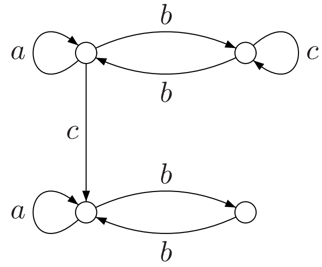
As Proposições 2.19 e 2.22 fornecem-nos condições suficientes para que $\mathrm{rank}_{\mathfrak{K}(\mathcal{X})} K$ (e $\mathrm{rank}_{\mathfrak{F}(\mathcal{X})} K$ se $\mathcal{X}$ é irredutível) seja igual a 1; tal acontece nomeadamente quando K é uma $\mathcal{J}$-classe 0-minimal de $S(\mathcal{X})$.

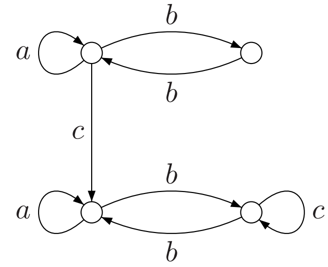
Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico sófico. Consideremos uma $\mathcal{J}$-classe J contida em $\delta_{\mathcal{X}}(L(\mathcal{X}))$ limitada por idempotentes. Vamos acrescentar à etiqueta $(\epsilon_J, \mathscr{G}_J)$ de J no CECLIIS de $\mathcal{X}$ um terceiro elemento, o rank de J em $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$. Ao CPO etiquetado resultante vamos chamar *CECLIIS de Krieger* de $\mathcal{X}$. Se $\mathcal{X}$ é irredutível, então acrescentamos uma quarta coordenada, o rank de J em $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$, e denominamos de *CECLIIS de Fischer* o CPO resultante. A invariância do CECLIIS e a Proposição 6.27 estão resumidas no seguinte teorema:

Teorema 6.28. *O CECLIIS de Krieger é um invariante de conjugação de sistemas simbólicos sóficos, e o CECLIIS de Fischer é um invariante de conjugação de sistemas simbólicos sóficos irredutíveis.*

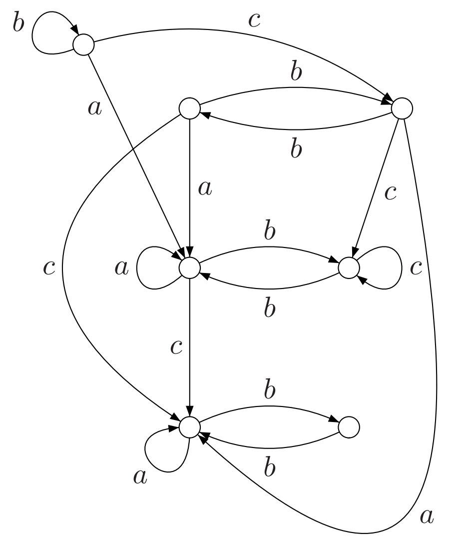
É claro que se eliminarmos as $\mathcal{J}$-classes não regulares nos CECLIIS de Krieger e de Fischer ainda temos um invariante de conjugação. A existência destes invariantes mais fracos foi provada em [BFP06]. Com eles não é possível mostrar que os sistemas simbólicos do Exemplo 6.24 não são conjugados. Os autores de [BFP06] usaram uma abordagem substancialmente diferente, baseada no Teorema de Classificação de Nasu (Teorema B.8). A nossa abordagem também permitiu de uma forma unificada obter um resultado — o Teorema 6.23 — válido para sistemas simbólicos arbitrários, isto é, não necessariamente sóficos.

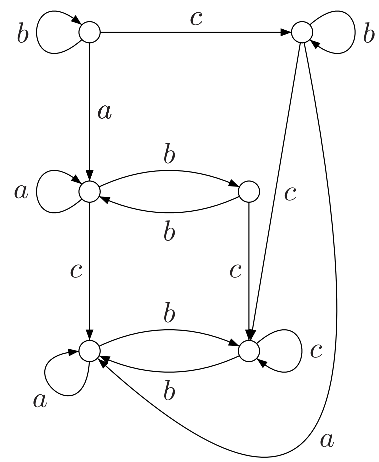
Exemplo 6.29. Vamos considerar um par de susbshifts presente num exemplo de [Jon98]. Consideremos os sistemas simbólicos sóficos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ com as seguintes respectivas apresentações (o sistema simbólico $\mathcal{X}$ é o da Figura 2.2):





A seguir estão representadas as apresentações de Krieger de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$.





Os semigrupos sintácticos de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ têm o mesmo diagrama de Green, o qual aparece na Figura 2.2, na página 62. O rank de b na apresentação de Krieger de $\mathcal{X}$ é sete, e na de $\mathcal{Y}$ é seis. Como (a classe sintáctica de) b é um elemento regular $\mathcal{J}$-máximo de ambos os semigrupos sintácticos, concluímos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ não são conjugados.

Parece ser difícil encontrar exemplos em que o CECLIIS de Krieger ou o de Fischer permite a detecção de pares de sistemas simbólicos não conjugados com o mesmo CECLIIS ou com a mesma função zeta. O par do Exemplo 6.29 encontra-se nessa situação, mas em [Jon98], de onde ele provém, é utilizado um outro invariante, que não distingue sistemas simbólicos irredutíveis não conjugados.

6.6 Conjugação ulterior

Consideremos um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$. Dado $u \in A^+$, o elemento $\delta_{\mathcal{X}}(u)$ de $S(\mathcal{X})$ foi definido como sendo a classe de equivalência de u em A^+ para a congruência sintáctica de $L(\mathcal{X})$. Consideremos um inteiro $l \geq 1$. Podemos naturalmente mergulhar $(A^l)^+$ em A^+. Facilmente se verifica que se $u \in (A^l)^+$ então $\delta_{\mathcal{X}^l}(u) = \delta_{\mathcal{X}}(u) \cap (A^l)^+$, pelo que a função que envia $\delta_{\mathcal{X}^l}(u)$ em $\delta_{\mathcal{X}}(u)$ está bem definida e é um homomorfismo injectivo de $S(\mathcal{X}^l)$ em $S(\mathcal{X})$. Por essa razão podemos considerar $S(\mathcal{X}^l)$ como sendo um subsemigrupo de $S(\mathcal{X})$.

O lema seguinte isola e generaliza um argumento que se encontra na demonstração do último teorema de [BFP06].

Lema 6.30. *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico sófico de $A^{\mathbb{Z}}$ e consideremos um inteiro positivo l. Seja E o conjunto dos idempotentes de $S(\mathcal{X})$. Para cada e em E seja w_e um elemento de A^+ tal que $\delta_{\mathcal{X}}(w_e) = e$. Consideremos o inteiro $l' = l \times \prod_{e\in E} |w_e| + 1$. Seja s um elemento de $S(\mathcal{X})$ para o qual existe um idempotente f tal que $s = sf$ ou $fs = s$. Então $s \in S(\mathcal{X}^{l'})$.*

Demonstração. Suponhamos que $s = sf$ (o outro caso é análogo). Seja $v \in A^+$ tal que $\delta_{\mathcal{X}}(v) = s$. Seja $k = |v|\frac{(l'-1)}{|w_f|}$. Consideremos a palavra $u = v(w_f)^k$. Então $|u| = |v| \times l'$ e $\delta_{\mathcal{X}}(u) = \delta_{\mathcal{X}}(v)\delta_{\mathcal{X}}(w_f)^k = sf = s$. □

Proposição 6.31. *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico sófico. Dado um inteiro positivo l, seja l' como no Lema 6.30. Então $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}^{l'}$ têm o mesmo CECLIIS.*

Demonstração. Sejam $P = S(\mathcal{X})$ e $Q = S(\mathcal{X}^{l'})$. Pelo Lema 6.30, o conjunto dos elementos de P que são limitados por idempotentes iguala o conjunto dos elementos de Q que são limitados por idempotentes. Denotamos este conjunto por $\mathscr{B}$. Para $\mathcal{K} \in \{\mathcal{J}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{H}\}$ designemos por $\mathcal{K}_S$ a relação de Green $\mathcal{K}$ num certo semigrupo S. Sejam $u, v \in \mathscr{B}$. É claro que se $u \leq_{\mathcal{L}_Q} v$ então $u \leq_{\mathcal{L}_P} v$. Vamos mostrar o recíproco. Suponhamos que $u \leq_{\mathcal{L}_P} v$. Então $u = xv$ para algum $x \in P^1$. Uma vez que v é limitado por idempotentes, existe um idempotente f em P tal que $v = fv$. O elemento xf de P pertence a Q, pelo Lema 6.30. Então $u \leq_{\mathcal{L}_Q} v$, uma vez que $u = (xf)v$. Analogamente, $u \leq_{\mathcal{R}_Q} v$ se e só se $u \leq_{\mathcal{R}_P} v$. Portanto, as relações de Green $\mathcal{K}_P$ e $\mathcal{K}_Q$ coincidem em $\mathscr{B}$. Em particular $P^\dagger = Q^\dagger$.

Seja U uma $\mathcal{H}$-classe contida em $\mathscr{B}$. A demonstração ficará completa assim que mostrarmos que o grupo de Schützenberger Γ^P de U em P é isomorfo ao grupo de Schützenberger Γ^Q de U em Q. Para $R \in \{P, Q\}$, seja T^R o estabilizador direito de U em R, e seja ξ^R o homomorfismo quociente $T^R \to \Gamma^R$. Suponhamos que U está $\mathcal{L}$-abaixo do idempotente f de P. O conjunto $Z = \{s \in T^P : s = fs\}$ é um subsemigrupo de P. Se $s \in T^P$ então $fs \in Z$ e $\xi^P(s) = \xi^P(fs)$, pelo que $\Gamma^P = \xi^P(Z)$. Pelo Lema 6.30 temos $Z \subseteq Q$, donde $Z \subseteq T^Q$. Podemos portanto definir a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \Gamma^P & \to & \Gamma^Q \\ & \xi^P(s) & \mapsto & \xi^Q(s), \ s \in Z. \end{array}$$

A função φ é claramente um homomorfismo injectivo. E como Γ^P e Γ^Q têm o mesmo cardinal que H, a função φ é de facto um isomorfismo. □

Seja $\mathfrak{G}$ um grafo etiquetado sobre o alfabeto A e com homomorfismo de transição τ. Dado um inteiro $l \geq 1$, denotemos por $\mathfrak{G}^l$ o grafo etiquetado com o mesmo conjunto de vértices de $\mathfrak{G}$, com alfabeto A^l e cujo homomorfismo de transição é a restrição de τ a $(A^l)^+$. Reparemos que se $u \in (A^l)^+$ então $\tau(u)$ tem o mesmo rank em $\mathfrak{G}$ e em $\mathfrak{G}^l$. Não é difícil verificar que se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico sófico então $\mathfrak{K}(\mathcal{X}^l) = \mathfrak{K}(\mathcal{X})^l$ e que, no caso de $\mathcal{X}$ ser irredutível, $\mathfrak{F}(\mathcal{X}^l) = \mathfrak{F}(\mathcal{X})^l$. A partir deste facto, da Proposição 6.31 e do Teorema 6.28, deduzimos o seguinte teorema:

Teorema 6.32. *O CECLIIS de Krieger é um invariante de conjugação ulterior de sistemas simbólicos sóficos, e o mesmo se passa com o CECLIIS de Fischer no caso dos sistemas simbólicos sóficos irredutíveis.*

O resultado análogo foi provado em [BFP06] para os invariantes que se obtêm do CECLIIS de Krieger e de Fischer pela remoção das $\mathcal{J}$-classes não regulares.

Capítulo 7

Um invariante de equivalência fraca

A noção de equivalência fraca foi introduzida por M.-P. Béal e D. Perrin em [BP02]. Trata-se de um enfraquecimento da relação de conjugação. O adjectivo *fraca* justifica-se por dois sistemas simbólicos irredutíveis de tipo finito poderem ser fracamente equivalentes sob condições bastante gerais, como por exemplo terem um ponto fixo, podendo por isso até nem terem a mesma entropia. No entanto não se conhece nenhum algoritmo que decida se dois sistemas simbólicos irredutíveis de tipo finito são fracamente equivalentes ou não. Em [BP02] dá-se uma prova construtiva da existência de um tal algoritmo para a classe muito restrita dos sistemas simbólicos de arestas de autómatos de pétalas.

Este capítulo baseia-se em partes do artigo do autor [Cos07] e do artigo [CC06] produzido em colaboração com L. Chaubard. Em [Cos07] apenas foram consideradas as relações de conjugação e de conjugação ulterior. Os resultados sobre equivalência fraca presentes na tese de Mestrado [Cha03] forneceram a motivação adicional para o artigo [CC06].

7.1 Equivalência fraca

Para cada alfabeto A, seja \$ um símbolo que não pertence a A. Denotamos por $A_\$$ o alfabeto $A \cup \{\$\}$. Dizemos que um sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ *divide* um sistema simbólico $\mathcal{Y}$ de $B^{\mathbb{Z}}$ se existe uma codificação $G : A^{\mathbb{Z}} \to {B_\$}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\mathcal{X} = G^{-1}(\mathcal{Y})$; também dizemos que $\mathcal{X}$ é um *divisor* de $\mathcal{Y}$. A divisão entre sistemas simbólicos é uma relação reflexiva e transitiva. Os sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dizem-se *fracamente equivalentes* se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ se dividem mutuamente.

A necessidade da letra adicional \$ para a definição de divisão de sistemas simbólicos deve-se a que de outro modo haveria uma dependência em relação ao alfabeto que conduziria a que sistemas simbólicos conjugados pudessem não ser fracamente equivalentes. Vejamos um exemplo do que acabamos de afirmar. Seja A o alfabeto de três letras $A = \{a, b, c\}$ e seja $B = \{a, b\}$. Consideremos um qualquer sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $B^{\mathbb{Z}}$ que contenha a^∞ e b^∞. Seja G uma codificação de $A^{\mathbb{Z}}$ em $B^{\mathbb{Z}}$. Então $G(c^\infty) \in \{a^\infty, b^\infty\}$, pelo que $\mathcal{X} \neq G^{-1}(\mathcal{X})$. Portanto, uma definição de divisão sem o símbolo adicional \$ implicaria que $\mathcal{X}$ como um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ não dividiria $\mathcal{X}$ como um sistema simbólico de $B^{\mathbb{Z}}$.

Em contrapartida, a definição de divisão que apresentámos é adequada na medida em que o próximo teorema é verdadeiro. A sua demonstração é devida a M.-P. Béal (comunicação pessoal a L. Chaubard [Cha03]).

Teorema 7.1. *Se dois sistemas simbólicos são conjugados então são fracamente equivalentes.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{X} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{Y} \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ dois sistemas simbólicos conjugados e seja $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma conjugação. Claramente, existe uma codificação $\hat{G} : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$ que estende G: basta considerar a mesma função de blocos, memória e antecipação de G, apenas mudando o domínio. Pela Proposição 2.1, existem subconjuntos $W(\mathcal{X})$ e $W(\mathcal{Y})$ de A^+ e de B^+, respectivamente, tais que

$$L(\mathcal{X}) = A^+ \setminus A^* W(\mathcal{X}) A^* \quad \text{e} \quad L(\mathcal{Y}) = A^+ \setminus A^* W(\mathcal{Y}) A^*.$$

Para cada inteiro positivo n, seja $W_n(\mathcal{X})$ o conjunto $W(\mathcal{X}) \cap A^{\leq n}$, e denotemos por $\mathcal{X}_n$ o sistema simbólico de tipo finito dado por $L(\mathcal{X}) = A^+ \setminus A^* W_n(\mathcal{X}) A^*$. Note-se que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_n$.

Afirmamos que existe uma infinidade de inteiros positivos n tais que a restrição de $\hat{G}$ a $\mathcal{X}_n$ é injectiva. Suponhamos o contrário. Então existe uma sucessão estritamente crescente de inteiros positivos $(m_n)_{n\geq 1}$ tal que para cada n existe um par $(x^{(n)}, y^{(n)})$ de elementos distintos de $\mathcal{X}_{m_n}$ tais que $\hat{G}(x^{(n)}) = \hat{G}(y^{(n)})$. Uma vez que os conjuntos da forma $\mathcal{X}_m$ contêm as órbitas dos seus elementos, podemos escolher $x^{(n)}$ e $y^{(n)}$ com coordenadas em zero distintas. Então $d(x^{(n)}, y^{(n)}) = 1$, onde d é a métrica definida em (1.6.2) (Subseccção 1.6.2). Como $A^{\mathbb{Z}}$ é compacto, as sucessões $(x^{(n)})_n$ e $(y^{(n)})_n$ têm subsucessões convergindo para alguns elementos x e y de $A^{\mathbb{Z}}$, respectivamente. Seja e_n o maior número par menor do que m_n. O factor central $(x^{(n)})_{[-e_n/2, e_n/2]}$ de comprimento $e_n + 1$ pertence a $L(\mathcal{X})$, uma vez que $x^{(n)} \in \mathcal{X}_{m_n}$ e $e_n + 1 \leq m_n$. Portanto existe em $\mathcal{X}$ um elemento $\tilde{x}^{(n)}$ tal que $d(\tilde{x}^{(n)}, x^{(n)}) < 2^{-e_n/2}$. Como $\mathcal{X}$ é compacto, considerando subsucessões se necessário, podemos supor que $\tilde{x}^{(n)}$ converge para um elemento $\tilde{x}$ de $\mathcal{X}$. Como a métrica d é contínua, temos

$$d(\tilde{x}, x) = \lim_{n\to+\infty} d(\tilde{x}^{(n)}, x^{(n)}) \leq \lim_{n\to+\infty} 2^{-e_n/2} = 0,$$

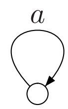
donde $\tilde{x} = x$. Logo $x \in \mathcal{X}$, e analogamente $y \in \mathcal{X}$. Como $\hat{G}(x^{(n)}) = \hat{G}(y^{(n)})$ para qualquer n, pela continuidade de $\hat{G}$ temos $G(x) = G(y)$. Por outro lado, uma vez que $d(x^{(n)}, y^{(n)}) = 1$ para qualquer n, também temos $d(x, y) = 1$, donde $x \neq y$. Isto contradiz a hipótese de que G é uma conjugação, o que prova a afirmação que inicia este parágrafo.

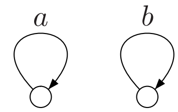
Suponhamos que G tem janela k. Consideremos um inteiro positivo N maior do que k tal que a restrição de $\hat{G}$ a $\mathcal{X}_N$ é injectiva. Como $N > k$, a codificação G tem uma função de blocos $g : A^N \to B$. Sejam r e s as respectivas memória e antecipação. Consideremos a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} h: & A^N & \to & B_{\$} \\ & u & \mapsto & \begin{cases} h(u) = g(u) & \text{se } u \notin W_N(\mathcal{X}), \\ h(u) = \$ & \text{se } u \in W_N(\mathcal{X}). \end{cases} \end{array}$$

Seja H a codificação $A^{\mathbb{Z}} \to {B_{\$}}^{\mathbb{Z}}$ tendo h como função de blocos, com memória r antecipação s. Afirmamos que $\mathcal{X} = H^{-1}(\mathcal{Y})$. Claramente, $H(\mathcal{X}) = \hat{G}(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{X} \subseteq H^{-1}(\mathcal{Y})$. Reciprocamente, seja $x \in H^{-1}(\mathcal{Y})$. Uma vez que $\$ \notin L(\mathcal{Y})$, todos os factores de x com comprimento N não pertencem a $W_N(\mathcal{X})$, pelo que $x \in \mathcal{X}_N$. Logo $H(x) = \hat{G}(x)$. Por outro lado, como $\mathcal{Y} = \hat{G}(\mathcal{X})$, existe $x' \in \mathcal{X}$ tal que $\hat{G}(x) = \hat{G}(x')$. Como a restrição de $\hat{G}$ a $\mathcal{X}_N$ é injectiva, temos $x = x'$. Portanto $\mathcal{X} = H^{-1}(\mathcal{Y})$, pelo que $\mathcal{X}$ é um divisor de $\mathcal{Y}$. Por simetria, concluímos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são fracamente equivalentes. $\square$

Consideremos os seguintes sistemas simbólicos de tipo finito:

$\mathcal{X}$: 

$\mathcal{Y}$: 

Sejam $A = \{a\}$ e $B = \{a, b\}$. Consideremos as funções $g : A \to B_\$$ e $h : B^2 \to A_\$$ definidas por

$$g(a) = a, \quad h(aa) = h(bb) = a, \quad h(ab) = h(ba) = \$.$$

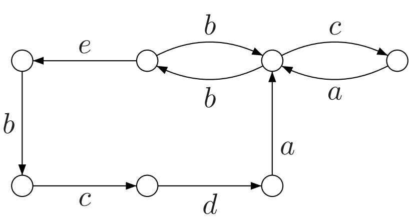
Sejam $G : A_\$ \to B_\$$ e $H : B_\$ \to A_\$$ as codificações $G = g^{[0,0]}$ e $H = h^{[0,1]}$. Então $\mathcal{X} = G^{-1}(\mathcal{Y})$ e $\mathcal{Y} = H^{-1}(\mathcal{X})$. Logo $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são fracamente equivalentes. No entanto, $\mathcal{X}$ é irredutível e $\mathcal{Y}$ não, e as entropias de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ são distintas. Logo a equivalência fraca merece o seu nome, na medida em que podemos dizer que é um invariante de conjugação muito grosseiro. A proposição seguinte também justifica esta afirmação.

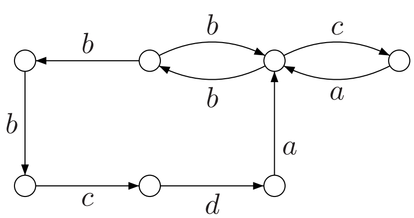
Proposição 7.2 ([BP02])**.** *Seja $\mathcal{X}$ um sistema simbólico irredutível de tipo finito com um elemento de período n tal que todos os períodos de elementos periódicos de $\mathcal{X}$ são múltiplos de n. Seja u uma palavra primitiva de comprimento n. Então $\mathcal{X}$ e $\mathcal{O}(u^\infty)$ são sistemas simbólicos fracamente equivalentes.*

Em particular, os sistemas simbólicos irredutíveis de tipo finito com um ponto fixo — isto é, um elemento x do sistema simbólico tal que $\sigma(x) = x$ — são fracamente equivalentes entre si.

Convém dizer que a relação de divisão entre sistemas simbólicos não pode ser reduzida a uma relação similar entre as correspondentes linguagens de factores. Sejamos mais precisos. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sistemas simbólicos de $A^{\mathbb{Z}}$ e $B^{\mathbb{Z}}$, respectivamente. Escrevamos $\mathcal{X} \lhd \mathcal{Y}$ se existe um inteiro n e uma função $f : A^n \to B_\$$ tal que $L(\mathcal{X}) \setminus A^{<n} = \bar{f}^{-1}(L(\mathcal{Y}))$. Então temos o seguinte resultado:

Proposição 7.3. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ os seguintes sistemas simbólicos sóficos irredutíveis:*

$\mathcal{X}$: 

$\mathcal{Y}$: 

Então $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são conjugados mas não é verdade que $\mathcal{X} \lhd \mathcal{Y}$.

Demonstração. Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = A \setminus \{e\}$. Consideremos a função $h : A \to B$ que envia e em b e deixa as restantes letras inalteradas. Seja H a codificação de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ que tem h como função de blocos com memória e antecipação zero. Vamos mostrar que H é uma conjugação. É claro que H é sobrejectiva. Suponhamos que não é injectiva. Então existem $z, t \in \mathcal{X}$ tais que $z_0 \neq t_0$ e $H(z) = H(t)$. Ora $h(z_0) = h(t_0)$ e $z_0 \neq t_0$ implica que $\{z_0, t_0\}$ seja igual a $\{b, e\}$. Suponhamos sem perda de generalidade que $z_0 = b$ e $t_0 = e$. A única palavra de $L(\mathcal{X})$ de comprimento quatro que tem e como primeira letra é $ebcd$, pelo que $t_{[0,3]} = ebcd$. Então,

$$H(z) = H(t) \Rightarrow \bar{h}(z_{[0,3]}) = \bar{h}(t_{[0,3]}) \Rightarrow \bar{h}(z_{[0,3]}) = bbcd \Rightarrow z_{[0,3]} \in \{bbcd, becd\}.$$

Mas $\{bbcd, becd\} \cap L(\mathcal{X}) = \emptyset$. Logo H é uma conjugação.

Suponhamos que existem $n \geq 1$ e $f : A^n \to B_\$$ tais que $L(\mathcal{X}) \setminus A^{<n} = \bar{f}^{-1}(L(\mathcal{Y}))$. Consideremos as letras $\alpha = \bar{f}(ab^{n-1})$, $\gamma = \bar{f}(b^{n-1}c)$ e $\beta = \bar{f}(b^n)$. Então $\bar{f}(b^{2n}) = \beta^{n+1}$. Como $b^{2n} \in L(\mathcal{X})$, temos $\beta^{n+1} \in L(\mathcal{Y})$. Isto implica que $\beta = b$.

Seja $N > n$. Então $\alpha b = \bar{f}(ab^n)$, $b\gamma = \bar{f}(b^n c)$ e $\bar{f}(ab^N c) = \alpha b^{N-(n-1)}\gamma$. Uma vez que $ab^n, b^n c \in L(\mathcal{X})$, temos $\alpha b, b\gamma \in L(\mathcal{Y})$, o que implica que $\alpha \in \{a, b\}$ e $\gamma \in \{b, c\}$. Então $\alpha b^i \gamma \in L(\mathcal{Y})$ para qualquer $i \geq 2$, e portanto $ab^N c \in \bar{f}^{-1}(L(\mathcal{Y}))$ para qualquer $N > n$. Como $\bar{f}^{-1}(L(\mathcal{Y})) \subseteq L(\mathcal{X})$, chegamos à conclusão absurda de que existe um inteiro ímpar N tal que $ab^N c \in L(\mathcal{X})$. $\square$

7.2 Pseudovariedades de semigrupos ordenados

Dizemos que um semigrupo ordenado S é um *divisor* do semigrupo ordenado T se existir um subsemigrupo ordenado R de T para o qual existe um homomorfismo de semigrupos ordenados sobrejectivo $\varphi : R \to S$.

Uma *pseudovariedade de semigrupos ordenados* é uma classe não vazia de semigrupos ordenados finitos que contém os divisores e os produtos directos finitos dos seus elementos, onde a ordem é definida componente a componente [Pin97]. Tendo em conta a convenção de que consideramos os semigrupos como sendo semigrupos ordenados cuja ordem é a igualdade, as pseudovariedades de semigrupos são pseudovariedades de semigrupos ordenados. A teoria das pseudovariedades de semigrupos ordenados tem muitos paralelismos em relação às correspondentes estruturas não ordenadas. Várias definições são inteiramente análogas, e podem ser desde já admitidas de forma implícita, como é o caso da noção de pseudovariedade de semigrupos ordenados gerada por uma classe de semigrupos ordenados.

A versão da próxima proposição para pseudovariedades de monóides surge na literatura sobre semigrupos ordenados [Pin97, Secção 5], mas o autor desconhece qualquer referência ao caso dos semigrupos. Por isso a sua demonstração é aqui incluída.

Proposição 7.4. *A pseudovariedade de semigrupos ordenados gerada por $\mathscr{U}^-$ é a pseudovariedade $\mathsf{Sl} \cap [\![x \leq xy]\!]$.*

Demonstração. Por cálculo directo, é claro que $\mathscr{U}^-$ pertence a $\mathsf{Sl} \cap [\![x \leq xy]\!]$. Logo a proposição ficará demonstrada assim que provarmos que qualquer elemento de $\mathsf{Sl} \cap [\![x \leq xy]\!]$ é um divisor de uma potência finita de $\mathscr{U}^-$.

Seja S um elemento de $\mathsf{Sl} \cap [\![x \leq xy]\!]$, e seja $\varphi : A \to S$ uma função geradora de S em que A é finito (por exemplo, $A = S$ e φ é a identidade em S). Vamos munir o semi-reticulado $\mathcal{P}'(A)$ da ordem de inclusão. Uma vez que S é um semigrupo comutativo, a função

$$\begin{array}{rrcl} \varphi' : & \mathcal{P}'(A) & \to & S \\ & B & \mapsto & \prod_{a \in B} \varphi(b) \end{array}$$

está bem definida. E como todos os elementos de S são idempotentes, φ é um homomorfismo sobrejectivo de semigrupos. Como S satisfaz a condição $x \leq xy$, se $B \subseteq C$ então $\varphi(B) \leq \varphi(C)$. Logo S é um divisor de $\mathcal{P}'(A)$.

Facilmente se verifica que a função

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & \mathcal{P}'(A) & \to & \mathscr{U}^A \\ & B & \mapsto & \chi_{A \setminus B}, \end{array}$$

é um homomorfismo de semigrupos. Temos a seguinte cadeia de equivalências:

$$B \subseteq C \Leftrightarrow [\chi_B(a) = 1 \Rightarrow \chi_C(a) = 1] \Leftrightarrow [\chi_{A \setminus B}(a) = 0 \Rightarrow \chi_{A \setminus C}(a) = 0].$$

Como $1 \leq 0$, concluímos que

$$B \subseteq C \Leftrightarrow [\chi_{A\setminus B}(a) \leq \chi_{A\setminus C}(a),\ \text{para qualquer } a \in A] \Leftrightarrow \psi(B) \leq \psi(C).$$

Portanto ψ é um homomorfismo fiel de semigrupos ordenados. Logo $\mathcal{P}'(A)$ é um divisor de $\mathscr{U}^A$, e portanto S também é um divisor de $\mathscr{U}^A$. □

Alterações na noção de pseudovariedade reflectem-se naturalmente na noção de variedade. Uma *variedade positiva de linguagens* é uma correspondência $\mathcal{W}$ que associa a cada alfabeto finito A um conjunto $\mathcal{W}A^+$ de linguagens racionais de A^+ com as seguintes propriedades, para quaisquer alfabetos finitos:

1. o conjunto $\mathcal{W}A^+$ contém A^+ e o conjunto vazio e a união e a intersecção de uma qualquer família finita não vazia dos seus elementos;
2. se $L \in \mathcal{W}A^+$ e $a \in A$ então as linguagens $\{w \in A^+ : aw \in L\}$ e $\{w \in A^+ : wa \in L\}$ pertencem a $\mathcal{W}A^+$;
3. se $\varphi : A^+ \to B^+$ é um homomorfismo e se $L \in \mathcal{W}B^+$ então $\varphi^{-1}(L) \in \mathcal{W}A^+$.

As condições 2 e 3 coincidem com a noção de variedade de linguagens introduzida na Secção 1.5. Uma variedade positiva de linguagens $\mathcal{V}$ é uma variedade de linguagens se e só se o conjunto $\mathcal{V}A^+$ contém o complemento em A^+ de cada um dos seus elementos.

Dada uma pseudovariedade de semigrupos ordenados V, seja $\mathcal{V}$ a correspondência $A \to \mathcal{V}A^+$ tal que $\mathcal{V}A^+$ é o conjunto das linguagens de A^+ cujo semigrupo sintáctico ordenado pertence a V, onde A é um alfabeto finito. O Teorema de Eilenberg (Teorema 1.32) admite a seguinte generalização, considerando as ordens parciais óbvias para pseudovariedades de semigrupos ordenados e variedades positivas de linguagens:

Teorema 7.5 ([Pin95])**.** *Para qualquer pseudovariedade V de semigrupos ordenados a classe $\mathcal{V}$ é uma variedade positiva de linguagens. A correspondência $\mathsf{V} \to \mathcal{V}$ é um isomorfismo de classes parcialmente ordenadas. Uma pseudovariedade de semigrupos ordenados é uma pseudovariedade de semigrupos se e só se a correspondente variedade positiva de linguagens é uma variedade de linguagens.*

O produto em coroa $S \circ T$ entre os dois semigrupos ordenados S e T é o produto em coroa de S e T enquanto semigrupos (sem ordem) munido da seguinte ordem parcial:

$$(f_1, t_1) \leq (f_2, t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 \leq f_2, \\ t_1 \leq t_2, \end{cases}$$

onde naturalmente $f_1 \leq f_2$ se e só se $f_1(t) \leq f_2(t)$ para qualquer $t \in T^1$.

Sejam V e W pseudovariedades de semigrupos ordenados. De forma semelhante ao caso não ordenado, o *produto semidirecto* de V e W é a classe $\mathsf{V} * \mathsf{W}$ dos divisores dos semigrupos ordenados da forma $S \circ T$ com $S \in \mathsf{V}$ e $T \in \mathsf{W}$. A classe $\mathsf{V} * \mathsf{W}$ é uma pseudovariedade de semigrupos ordenados. Mais geralmente, as propriedades enunciadas na Subsecção 1.7.1 também são válidas neste contexto, com as óbvias alterações.

Teorema 7.6 ([PW02])**.** *Seja V uma pseudovariedade de semigrupos ordenados tal que $\mathsf{V} \nsubseteq \mathscr{L}\mathsf{I}$. Denotemos por $\mathcal{V}$ e por $\mathcal{W}_k$ as variedades positivas de linguagens que correspondem a V e $\mathsf{V} * \mathsf{D}_k$, respectivamente. Uma linguagem L de A^+ pertence a $\mathcal{W}_k A^+$ se e só é uma união finita de linguagens da forma $\{u\}$ com $u \in A^{<k}$, ou da forma $pA^* \cap \Phi_k^{-1}(K) \cap A^*s$, onde $K \in \mathcal{V}(A^{k+1})^+$ e $p, s \in A^k$.*

J.-E. Pin e P. Weil demonstraram em [PW02] uma versão do Teorema 1.33 para semigrupos ordenados. Uma linguagem de A^+ diz-se *localmente e negativamente testável* se puder ser exprimida através de um número finito de intersecções e de uniões de linguagens da forma $A^+ \setminus A^*wA^*$, $A^+ \setminus wA^*$, $A^+ \setminus A^*w$ e $A^+ \setminus \{w\}$, com $w \in A^+$.

Teorema 7.7 ([PW02])**.** *A variedade positiva de linguagens correspondente a* $\mathscr{L}\mathsf{SI}^-$ *é a classe das linguagens localmente e negativamente testáveis.*

Os ingredientes principais na demonstração do Teorema 7.7 consistem no Teorema 7.6 e na igualdade $\mathscr{L}\mathsf{SI}^- = \mathsf{SI}^- * \mathsf{D}$ [PPW02].

Consideremos um alfabeto. Uma *pseudoinequação* sobre um alfabeto A é uma fórmula da forma $u \leq v$ em que $u, v \in \overline{\Omega}_A\mathsf{S}$. Uma pseudoinequação $u \leq v$ sobre o alfabeto A é satisfeita por um semigrupo ordenado S se para qualquer função $\varphi : A \to S$ tivermos $\hat{\varphi}(u) \leq \hat{\varphi}(v)$, onde $\hat{\varphi}$ é o único homomorfismo contínuo de semigrupos de $\overline{\Omega}_A\mathsf{S}$ em S cuja restrição a A coincide com φ. Uma pseudoidentidade $u = v$ pode ser encarada como o conjunto $\{u \leq v, v \leq u\}$, na medida em que um semigrupo ordenado satisfaz $u = v$ se e só se satisfaz $u \leq v$ e $v \leq u$.

O Teorema de Reiterman (Teorema 1.43) admite a seguinte generalização para semigrupos ordenados, onde $[\![\Sigma]\!]$ denota a classe dos semigrupos ordenados que satisfazem todas as pseudoinequações de Σ:

Teorema 7.8 ([PW96b, Mol95])**.** *Para qualquer conjunto* Σ *de pseudoinequações, a classe* $[\![\Sigma]\!]$ *é uma pseudovariedade de semigrupos ordenados, e todas as pseudovariedades de semigrupos ordenados são desta forma.*

7.3 Classes de sistemas simbólicos sóficos definidas por pseudovariedades de semigrupos ordenados

O teorema seguinte é uma instância particular de um resultado mais geral sobre as chamadas *funções sequenciais* [Eil76, Capítulo IX, Proposição 1.1].

Teorema 7.9. *Dados dois alfabetos* A *e* B *e um inteiro positivo* k*, consideremos uma função* $g : A^k \to B$*. Se* Y *é uma linguagem racional de* B^+ *então o semigrupo* $S(\bar{g}^{-1}(Y))$ *divide o semigrupo* $S(Y)$*.*

Vamos em seguida demonstrar o análogo do Teorema 7.9 para a imagem recíproca de um sistema simbólico por uma codificação. Note-se que não é possível uma redução imediata ao Teorema 7.9, em virtude da Proposição 7.3.

Por convenção $\Omega_A\mathsf{D}_0$ é o semigrupo trivial. Note-se ainda que se considerarmos $\Omega_A\mathsf{D}_n$ como semigrupo ordenado então a ordem que lhe atribuímos é a igualdade.

Teorema 7.10. *Consideremos uma codificação* $G : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$ *e um sistema simbólico* $\mathcal{Y}$ *de* $B^{\mathbb{Z}}$*. Se* G *tem janela* k *então o semigrupo ordenado* $S_{A^+}(G^{-1}(\mathcal{Y}))$ *divide o semigrupo ordenado* $S_{B^+}(\mathcal{Y}) \circ \Omega_A\mathsf{D}_{k-1}$*.*

A demonstração do Teorema 7.10 será feita com recurso a uma caracterização muito útil da noção de divisão entre semigrupos sintácticos (ordenados), que mencionamos de seguida. Um morfismo relacional de semigrupos $\tau : S \multimap T$ é uma *divisão de semigrupos ordenados* se S e T forem semigrupos ordenados e se, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$, tivermos $s_1 \leq s_2$ sempre que existam $t_1 \in \tau(s_1)$ e $t_2 \in \tau(s_2)$ tais que $t_1 \leq t_2$. Facilmente se prova que um semigrupo ordenado S é um divisor do semigrupo ordenado T se e só se existe uma divisão $S \multimap T$ [PPW02].

Demonstração do Teorema 7.10. Recordemos a identificação que fizemos entre $\Omega_A \mathsf{D}_{k-1}$ e o conjunto dos elementos de A^+ de comprimento menor ou igual a $k-1$.

Vamos denotar por $\mathcal{X}$ o sistema simbólico $G^{-1}(\mathcal{Y})$. Seja g uma função de blocos de G com janela k. Consideremos a seguinte função:

$$\begin{aligned}\theta : \quad S_{A^+}(\mathcal{X}) \quad &\to \quad \mathcal{P}(S_{B^+}(\mathcal{Y}) \circ \Omega_A \mathsf{D}_{k-1})\\ s \quad &\mapsto \quad \big\{(f, \mathrm{t}_{k-1}(u)) \,:\, u \in A^+,\, s = \delta_{\mathcal{X}}(u) \text{ e } w \in A^{k-1} \Rightarrow f(w) = \delta_{\mathcal{Y}} \bar{g}(wu)\big\}.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que θ é uma divisão entre $S_{A^+}(\mathcal{X})$ e $S_{B^+}(\mathcal{Y}) \circ \Omega_A \mathsf{D}_{k-1}$.

Comecemos por verificar que θ é um morfismo relacional. É claro que $\theta(s) \neq \emptyset$ para qualquer $s \in S_{A^+}(\mathcal{X})$. Dados $s_1, s_2 \in S_{A^+}(\mathcal{X})$, sejam $(f_1, v_1) \in \theta(s_1)$ e $(f_2, v_2) \in \theta(s_2)$. Então existem $u_1, u_2 \in A^+$ tais que $\delta_{\mathcal{X}}(u_i) = s_i$ e $\mathrm{t}_{k-1}(u_i) = v_i$. Temos

$$(f_1, v_1) \cdot (f_2, v_2) = (f_1 \cdot {}^{u_1} f_2, \mathrm{t}_{k-1}(v_1 v_2)).$$

Ora $\mathrm{t}_{k-1}(u_1 u_2) = \mathrm{t}_{k-1}(v_1 v_2)$, $\delta_{\mathcal{X}}(u_1 u_2) = s_1 s_2$ e para qualquer $w \in A^{k-1}$, temos

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot {}^{u_1} f_2)(w) &= f_1(w) \cdot {}^{u_1} f_2(w)\\ &= f_1(w) \cdot f_2(\mathrm{t}_{k-1}(wu_1))\\ &= \delta_{\mathcal{Y}} \bar{g}(wu_1) \cdot \delta_{\mathcal{Y}} \bar{g}(\mathrm{t}_{k-1}(wu_1) u_2)\\ &= \delta_{\mathcal{Y}} \bar{g}(wu_1 u_2).\end{aligned}$$

Logo $(f_1, v_1) \cdot (f_2, v_2) \in \theta(s_1 s_2)$, pelo que θ é efectivamente um morfismo relacional.

Suponhamos agora que $(f_1, v_1) \leq (f_2, v_2)$. Então $f_1 \leq f_2$ e $v_1 = v_2$, pelo que

$$w \in A^{k-1} \Rightarrow \delta_{\mathcal{Y}} \bar{g}(wu_1) \leq \delta_{\mathcal{Y}} \bar{g}(wu_2), \tag{7.1}$$

$$\mathrm{t}_{k-1}(u_1) = \mathrm{t}_{k-1}(u_2). \tag{7.2}$$

Queremos mostrar que $s_1 \leq s_2$. Suponhamos que $x, y \in A^*$ são tais que $xu_2 y \in L(\mathcal{X})$. Então existem $p \in A^{\mathbb{Z}^-}$, $q \in A^{\mathbb{Z}_0^+}$ tais que $px.u_2 yq \in \mathcal{X}$. Logo $G(px.u_2 yq) \in \mathcal{Y}$. Portanto

$$G(px.u_2 yq)_{[-(n+|x|), |u_2 y|+n]} \in L(\mathcal{Y})$$

para todo o inteiro positivo n. Temos a seguinte factorização:

$$G(px.u_2 yq)_{[-(n+|x|), |u_2 y|+n]} = \bar{g}(p_{[-n,-1]} x) \cdot \bar{g}(\mathrm{t}_{k-1}(p_{[-n,-1]} x) u_2) \cdot \bar{g}(\mathrm{t}_{k-1}(p_{[-n,-1]} x u_2) y q_{[0,n]}).$$

Se $n \geq k-1$ então $|\mathrm{t}_{k-1}(p_{[-n,-1]} x)| = k-1$, pelo que invocando as condições (7.1) e (7.2) concluímos que se $n \geq k-1$ então

$$\bar{g}(p_{[-n,-1]} x) \cdot \bar{g}(\mathrm{t}_{k-1}(p_{[-n,-1]} x) u_1) \cdot \bar{g}(\mathrm{t}_{k-1}(p_{[-n,-1]} x u_1) y q_{[0,n]}) \in L(\mathcal{Y}),$$

isto é, $G(px.u_1 yq)_{[-(n+|x|), |u_2 y|+n]} \in L(\mathcal{Y})$. Ou seja, $G(p.xu_1 yq) \in \mathcal{Y}$. Então $p.xu_1 yq \in \mathcal{X}$, pelo que $xu_1 q \in L(\mathcal{X})$. Logo $s_1 \leq s_2$. Portanto θ é efectivamente uma divisão de semigrupos ordenados. □

Antes de avançarmos é conveniente recordar algumas observações que já fizemos, nomeadamente na Subsecção 2.2.2, na página 61. Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ então $S_{A^+}(\mathcal{X})$ denota o semigrupo sintáctico ordenado de $L(\mathcal{X})$ enquanto linguagem de A^+. Se $\mathcal{X}$ não é um sistema simbólico pleno então o alfabeto A é irrelevante, o que justifica que se defina $S(\mathcal{X})$ como sendo $S_{A^+}(\mathcal{X})$. Mas se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico pleno então $S_{A^+}(\mathcal{X})$ é o semigrupo trivial ou é $\mathscr{U}^-$, conforme se tenha $\mathcal{X} = A^{\mathbb{Z}}$ ou $\mathcal{X} \subsetneqq A^{\mathbb{Z}}$, respectivamente. Por razões que serão apresentadas mais tarde, neste capítulo vamos adoptar a convenção de que o semigrupo sintáctico ordenado $S(\mathcal{X})$ de um sistema simbólico pleno $\mathcal{X}$ é trivial.

No enunciado do Teorema 7.10 é de facto preciso que se tenha $S_{B^+}(\mathcal{Y})$ no lugar de $S(\mathcal{Y})$, para salvaguardar o caso em que $\mathcal{Y}$ é pleno. Com efeito, um sistema simbólico pleno pode ser conjugado com um sistema simbólico que não é pleno (por exemplo, se C for um alfabeto com duas letras então $(C^{\mathbb{Z}})^{[0,1]}$ não é pleno e é conjugado de $(C^{\mathbb{Z}})$). Logo, pelo Teorema 7.1, existe alguma codificação $G : A^{\mathbb{Z}} \to {B_\$}^{\mathbb{Z}}$ de janela k e um sistema simbólico pleno $\mathcal{Y}$ contido em $B^{\mathbb{Z}}$ tal que $G^{-1}(\mathcal{Y})$ não é pleno e é conjugado de $\mathcal{Y}$. Ora, se é verdade que $S_{A^+}(G^{-1}(\mathcal{Y}))$ divide $S_{(B_\$)^+}(\mathcal{Y}) \circ \Omega_A \mathsf{D}_{k-1}$, por outro lado já não é verdade que $S(G^{-1}(\mathcal{Y}))$ divide $S(\mathcal{Y}) \circ \Omega_A \mathsf{D}_{k-1}$. Com efeito $S(\mathcal{Y}) \circ \Omega_A \mathsf{D}_{k-1} = \Omega_A \mathsf{D}_{k-1}$, porque $S(\mathcal{Y})$ é trivial, logo se $S(G^{-1}(\mathcal{Y}))$ divide $\Omega_A \mathsf{D}_{k-1}$ então $S(G^{-1}(\mathcal{Y})) \in \mathsf{D}$ ou seja, todos os idempotentes de $S(G^{-1}(\mathcal{Y}))$ são zeros à direita, pelo que 0 é o único idempotente de $S(G^{-1}(\mathcal{Y}))$ (pois $0 = 0f = f$ para qualquer idempotente f); mas tal contradiz a Proposição 2.17.

O Teorema 7.10 está demonstrado em [CC06] para o caso em que $\mathcal{Y}$ é sófico. A abordagem aí usada consistiu em considerar certos ζ-semigrupos (uma generalização dos ω-semigrupos [PP04]) como estruturas de reconhecimento de sistemas simbólicos sóficos. Por razões combinatórias, para se aplicar essa abordagem torna-se necessário considerar sistemas simbólicos sóficos. A demonstração do Teorema 7.10 que aqui apresentamos além de ser mais abrangente é mais simples e directa. De agora em diante vamos restringir-nos ao âmbito dos sistemas simbólicos sóficos, por termos mais exemplos sugestivos neste caso. Para o caso geral poderíamos recorrer à teoria das *variedades de semigrupos* (as quais são uma forma algébrica de classificar classes de semigrupos não necessariamente finitos) e que serve de inspiração à teoria das pseudovariedades de semigrupos [Alm95].

Dada uma pseudovariedade de semigrupos ordenados V, denotamos por $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ a classe constituída pelos sistemas simbólicos $\mathcal{X}$ cujo semigrupo sintáctico ordenado $S(\mathcal{X})$ pertence a V.

Teorema 7.11. *Se V é uma pseudovariedade de semigrupos ordenados que contém $\mathscr{U}^-$ então a classe $\mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D})$ contém os divisores dos seus elementos.*

Demonstração. Seja $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D})$. Se $\mathcal{Y}$ não é um sistema simbólico pleno então $S(\mathcal{Y}) = S_{(B_\$)^+}(\mathcal{Y})$, caso contrário $S_{(B_\$)^+}(\mathcal{Y}) = \mathscr{U}^-$. Em qualquer dos casos, como $\mathscr{U}^- \in \mathsf{V}$, o semigrupo $S_{(B_\$)^+}(\mathcal{Y})$ pertence a $\mathsf{V} * \mathsf{D}$. Pelo Teorema 7.10, se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico divisor de $\mathcal{Y}$ então $S(\mathcal{X})$ divide $S_{(B_\$)^+}(\mathcal{Y}) \circ \Omega_A \mathsf{D}_n$, para algum inteiro positivo n. Ora $S_{(B_\$)^+}(\mathcal{Y}) \circ \Omega_A \mathsf{D}_n \in (\mathsf{V} * \mathsf{D}) * \mathsf{D}_n = \mathsf{V} * \mathsf{D}$, pelo que $\mathcal{X} \in \mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D})$. $\square$

Portanto, se V é uma pseudovariedade de semigrupos ordenados que contém $\mathscr{U}^-$ então a classe $\mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D})$ define um invariante algébrico para a equivalência fraca. Um outro corolário imediato do Teorema 7.11 é que a classe dos sistemas simbólicos sóficos é fechada para tomarmos os seus divisores.

Para qualquer pseudovariedade de semigrupos ordenados, tem-se $\mathscr{L}\mathsf{V} = (\mathscr{L}\mathsf{V}) * \mathsf{D}$, pelo que se $\mathscr{U}^- \in \mathsf{V}$ então $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{V})$ contém os divisores dos seus elementos.

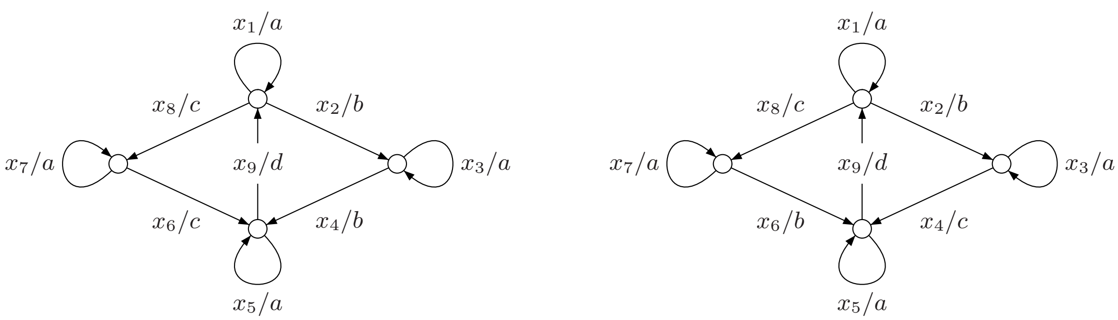
Exemplo 7.12. As classes $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI})$, $\mathcal{S}(\mathsf{Com}*\mathsf{D})$ e $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{Com})$ são fechadas para tomarmos divisores. Verifiquemos que são todas distintas. Consideremos os seguintes sistemas simbólicos sóficos:

É possível decidir se um sistema simbólico pertence a $\mathsf{Com}*\mathsf{D}$, uma vez que Thérien e Weiss mostraram que $\mathsf{Com}*\mathsf{D} = [\![y^\omega x_1 z^\omega x_2 y^\omega x_3 z^\omega = y^\omega x_3 z^\omega x_2 y^\omega x_1 z^\omega]\!]$ [TW85]. Efectuando alguns cálculos, concluímos que $\mathcal{X} \in \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{Com}) \setminus \mathcal{S}(\mathsf{Com}*\mathsf{D})$ e que $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}(\mathsf{Com}*\mathsf{D}) \setminus \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI})$. Em particular $\mathcal{X}$ não é um divisor de $\mathcal{Y}$.

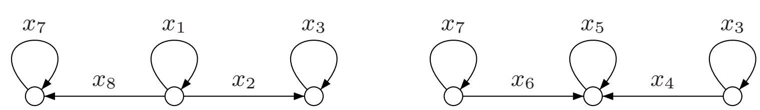
Uma versão mais fraca do Teorema 7.11 foi demonstrada em [Cos07]: no lugar da equivalência fraca, estava a conjugação. Essa versão serviu como uma das motivação para o artigo [CC06], onde se mostrou o Teorema 7.11. A abordagem utilizada foi [Cos07] diferente das utilizadas em [CC06] ou nesta monografia: recorreu-se à descrição de uma base de pseudoidentidades para $\mathsf{V}*\mathsf{D}$.

7.3.1 Comparação com outros invariantes de conjugação

Consideremos os sistemas simbólicos sóficos irredutíveis $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ cujas apresentações direitas de Fischer são respectivamente os seguintes grafos etiquetados, onde e/ε significa que a aresta e tem a etiqueta ε:



Os sistemas simbólicos $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ são misturados e de tipo quase finito (cf. Teorema 2.30). Têm a mesma função zeta. Os domínios das coberturas direitas e esquerdas de Krieger/Fischer são respectivamente iguais. O próximo invariante a ser testado é a cobertura de multiplicidade. Os sistemas simbólicos de multiplicidade de $\mathcal{Y}_1$ e de $\mathcal{Y}_2$ são iguais ao seguinte sistema simbólico $\mathcal{X}$:



Denotemos por π_i a cobertura de Fischer de $\mathcal{Y}_i$. Vamos provar que as codificações $\pi_1|_\mathcal{X}$ e $\pi_2|_\mathcal{X}$ não são conjugadas. Para isso vamos utilizar o seguinte lema:

Lema 7.13 ([BK88, Lema 2.3])**.** *Suponhamos que as codificações $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ têm o mesmo domínio. Então φ e ψ são conjugadas se e só se existe um automorfismo F de $\mathcal{X}$ tal que $\psi \circ F$ e φ têm o mesmo núcleo.*

Seja F um automorfismo de $\mathcal{X}$, com função de blocos f e janela n. Uma vez que F permuta sequências constantes, existe $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ tal que $F(x_i^\infty) = x_1^\infty$. Suponhamos que

$i \neq 1$. Então existem k, j tais que $k \neq i$ e $x_k^{-\infty}.x_j x_i^{+\infty} \in \mathcal{X}$. Uma vez que $f(x_i^n) = x_1$, temos $F(x_k^{-\infty}.x_j x_i^{+\infty}) \sim_\sigma y.x_1^{+\infty}$ para algum $y \in A^{\mathbb{Z}^-}$. Como $x_l x_1 \in L(\mathcal{X})$ implica $l = 1$, temos $F(x_k^{-\infty}.x_j x_i^{+\infty}) = x_1^\infty = F(x_i^\infty)$, o que contradiz a injectividade de F. Logo $F(x_1^\infty) = x_1^\infty$. Analogamente, $F(x_5^\infty) = x_5^\infty$, pelo que $\{F(x_3^\infty), F(x_7^\infty)\} = \{x_3^\infty, x_7^\infty\}$. Sejam $z = x_1^{-\infty}.x_2 x_3^{+\infty}$ e $t = x_3^{-\infty}.x_4 x_5^{+\infty}$. Então $z, t \in \mathcal{X}$ e $\pi_1(z) = \pi_1(t) = a^{-\infty}.ba^{+\infty}$. Suponhamos que $F(x_3^\infty) = x_7^\infty$ e que $F(x_7^\infty) = x_3^\infty$. Então $F(z) \sim_\sigma x_1^{-\infty}.x_8 x_7^{+\infty}$ e $F(t) \sim_\sigma x_7^{-\infty}.x_6 x_5^{+\infty}$, pelo que $\pi_2(F(z)) \sim_\sigma a^{-\infty}.ca^{+\infty}$ e $\pi_2(F(t)) \sim_\sigma a^{-\infty}.ba^{+\infty}$. Logo $\pi_2(F(z)) \neq \pi_2(F(t))$, e a mesma conclusão é válida se $F(x_3^\infty) = x_3^\infty$ e $F(x_7^\infty) = x_7^\infty$. Portanto as codificações $\pi_1|_\mathcal{X}$ e $\pi_2|_\mathcal{X}$ não são conjugadas, pelo Lema 7.13. Logo as codificações π_1 e π_2 também não são conjugadas. Portanto $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ não são conjugados, pelo Teorema 2.28.

Os argumentos anteriores para provar que $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ não são conjugados são algo ad-hoc, e dependem do conhecimento do grupo de automorfismos de um sistema simbólico, o que é um problema muito difícil em geral [LM96, Capítulo 13]. Por outro lado, se V for a pseudovariedade $[\![x^3 = x^2]\!]$ então $\mathcal{Y}_1 \notin \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{V})$ (uma vez que $\delta_{\mathcal{Y}_1}(aba)^3 = 0 \neq \delta_{\mathcal{Y}_1}(aba)^2$ e $\delta_{\mathcal{Y}_1}(a) S(\mathcal{Y}_1)\, \delta_{\mathcal{Y}_1}(a)$ é um monóide local de $S(\mathcal{Y}_1)$) e $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{V})$. Deduzimos do Teorema 7.11 que $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ não são fracamente equivalentes. Logo o Teorema 7.11 fornece uma forma expedita de mostrar não só que $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ não são conjugados, mas também que estão longe de o ser, no sentido em que a equivalência fraca é considerada um invariante de conjugação muito fraco.

7.4 Determinação das classes invariantes para a conjugação

Dizemos que uma classe $\mathcal{K}$ de sistemas simbólicos é um invariante de conjugação se contiver os sistemas simbólicos conjugados dos seus elementos. Convenção análoga se pode fazer a respeito de outras relações, como a conjugação ulterior e a equivalência fraca. Nesta subsecção vamos determinar todos os invariantes de conjugação da forma $\mathcal{S}(\mathsf{V})$, onde V é uma pseudovariedade de semigrupos ordenados.

Proposição 7.14. *Suponhamos que $\mathcal{V}$ é uma variedade positiva de linguagens. Se $\mathcal{V}$ contém todas as linguagens da forma A^*wA^* onde $w \in A^+$ e A é um alfabeto finito, então $\mathcal{V}$ também contém as linguagens da forma wA^*, A^*w ou $\{w\}$.*

Demonstração. Seja V a pseudovariedade de semigrupos ordenados que corresponde a $\mathcal{V}$. Se Σ é uma base de pseudoinequações para V, então $\mathsf{V} = \bigcap_{(\pi \leq \rho) \in \Sigma} [\![\pi \leq \rho]\!]$. Basta-nos portanto supor que $\mathsf{V} = [\![\pi \leq \rho]\!]$ para algumas pseudopalavras π, ρ sobre um alfabeto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Seja b uma letra que não pertence a X, e seja $B = X \cup \{b\}$. Consideremos a linguagem $L = B^* b\, \mathrm{i}_k(\rho) B^*$. Então $L \in \mathcal{V}B^+$. Logo o semigrupo sintáctico de L satisfaz a pseudoidentidade $\pi \leq \rho$. Em particular, $\hat{\delta}_L(\pi) \leq \hat{\delta}_L(\rho)$. Logo $\hat{\delta}_L(b\pi) \leq \hat{\delta}_L(b\rho)$. Como $b\rho \in \overline{L}$, resulta da Proposição 6.3 que $b\pi \in \overline{L}$. Então existem $z, t \in (\overline{\Omega}_B \mathsf{S})^1$ tais que $b\pi = zb\, \mathrm{i}_k(\rho) t$. Suponhamos que $z \neq 1$. Então existe $z' \in (\overline{\Omega}_B \mathsf{S})^1$ tal que $b\pi = bz'\, b\mathrm{i}_k(\rho) t$. Logo $\pi = z'\, b\mathrm{i}_k(\rho) t$, pela Proposição 1.60. Mas tal é impossível, uma vez que b não é um factor de π. Portanto $z = 1$ e $b\pi = b\mathrm{i}_k(\rho) t$, pelo que $\mathrm{i}_k(\pi) = \mathrm{i}_k(\rho)$. Analogamente, $\mathrm{t}_k(\pi) = \mathrm{t}_k(\rho)$. Como k é arbitrário, deduzimos que $\pi = \rho$, ou que π e ρ são ambas pseudopalavras infinitas.

Dado um alfabeto A e um elemento w de A^+, seja K uma das linguagens $\{w\}$, wA^* ou A^*w. O fecho de K em $\overline{\Omega}_A \mathsf{S}$ é respectivamente igual a $\{w\}$, $w(\overline{\Omega}_A \mathsf{S})^1$ ou $(\overline{\Omega}_A \mathsf{S})^1 w$. Sejam $z_1, \ldots, z_n \in A^+$ e $x, y \in (\overline{\Omega}_A \mathsf{S})^1$. Sejam $u = x\pi(z_1, \ldots, z_n) y$ e $v = x\rho(z_1, \ldots, z_n) y$. Então $u = v$ ou u e v são ambas pseudopalavras infinitas tais que $\mathrm{i}_k(u) = \mathrm{i}_k(v)$ e $\mathrm{t}_k(u) = \mathrm{t}_k(v)$

para qualquer $k \geq 1$. Portanto $u \in \overline{K}$ se e só se $v \in \overline{K}$. Então, pela Proposição 6.3,

$$\delta_K(\pi(z_1, \ldots, z_n)) = \delta_K(\rho(z_1, \ldots, z_n)),$$

ou seja,

$$\pi(\hat{\delta}_K(z_1), \ldots, \hat{\delta}_K(z_n)) = \rho(\hat{\delta}_K(z_1), \ldots, \hat{\delta}_K(z_n)).$$

Como as palavras z_i são arbitrárias, isto significa que o semigrupo sintáctico de K satisfaz a pseudoidentidade $\pi = \rho$, e portanto $K \in \mathcal{V}$. $\square$

A restrição da Proposição 7.14 às variedades de linguagens foi demonstrada em [Cos00], com argumentos que dependem do facto de que tais variedades positivas são fechadas para a operação de tomar o complemento.

Consideremos no semigrupo B_n a ordem em que o zero é máximo e os restantes elementos não são comparáveis entre si quando são distintos. Denotamos por B_n^- o semigrupo ordenado assim definido.

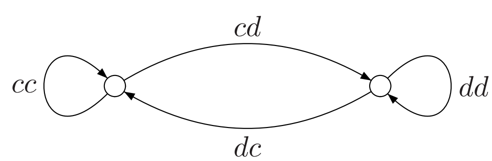
Observação 7.15. Seja n um inteiro. Se G é um grafo fortemente conexo com n vértices então o semigrupo sintáctico ordenado de X_{G} é B_n^-.

Justificação. De acordo com a Observação 2.23, o semigrupo sintáctico de $L(X_{\mathrm{G}})$ é B_n. Sejam $p, q \in L(X_{\mathrm{G}})$ tais que $\delta_{X_{\mathrm{G}}}(q) \leq \delta_{X_{\mathrm{G}}}(p)$. Existem arestas x e y de X_{G} tais que xpy é um caminho de X_{G}. Como $C_{X_{\mathrm{G}}}(p) \subseteq C_{X_{\mathrm{G}}}(q)$, a sequência xqy também é um caminho de X_{G}. Logo p e q são caminhos co-terminais. Tal implica $C_{X_{\mathrm{G}}}(p) = C_{X_{\mathrm{G}}}(q)$, ou seja, $\delta_{X_{\mathrm{G}}}(p) = \delta_{X_{\mathrm{G}}}(q)$. $\square$

Proposição 7.16. *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos ordenados. Se* $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ *é um invariante de conjugação então* $\mathscr{L}\mathsf{SI}^- \subseteq \mathsf{V}$. *Adicionalmente, se* V *é uma pseudovariedade de semigrupos então* $\mathscr{L}\mathsf{SI} \subseteq \mathsf{V}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ a variedade positiva de linguagens que corresponde a V. Pelo Teorema 7.7 e pelo dual da Proposição 7.14, para mostrar que $\mathscr{L}\mathsf{SI}^- \subseteq \mathsf{V}$ é suficiente mostrar que as linguagens da forma $A^+ \setminus A^*wA^*$ pertencem a $\mathcal{V}A^+$.

Seja $C = \{c, d\}$ um alfabeto com duas letras. Consideremos o alfabeto D das palavras de comprimento dois sobre C. Seja $\mathcal{Y}$ o sistema simbólico de $D^{\mathbb{Z}}$ com a seguinte apresentação:



Então $\mathcal{Y} = (C^{\mathbb{Z}})^{[0,1]}$. Em particular $\mathcal{Y}$ é conjugado de $C^{\mathbb{Z}}$. Como os sistemas simbólicos plenos pertencem a $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ — pois por convenção os seus semigrupos sintácticos são triviais — e $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ contém os conjugados dos seus elementos, concluímos que o semigrupo sintáctico ordenado de $\mathcal{Y}$ pertence a V. Ora esse semigrupo é B_2^-, de acordo com a Observação 7.15. Seja n um inteiro positivo. Tal como é observado em [PPW02], não é difícil mostrar que B_n^- é um divisor de um produto de um número finito de cópias de B_2^-. Logo $B_n^- \in \mathsf{V}$.

Um sistema simbólico irredutível de tipo finito é um conjugado de um sistema simbólico das arestas de um grafo fortemente conexo, pela Proposição 2.9. De acordo com a Observação 7.15, o semigrupo sintáctico ordenado de um tal sistema simbólico de arestas é B_n^-. Portanto $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ contém todos os sistemas simbólicos irredutíveis de tipo finito.

Consideremos um alfabeto finito A e um elemento w de A^+. Seja b uma letra que não pertence a A. Consideremos o alfabeto $B = A \cup \{b\}$. Denotemos por φ o homomorfismo de inclusão $A^+ \to B^+$. A linguagem $L = B^+ \setminus B^*wB^*$ é claramente factorial, e é prolongável uma vez que se $u \in L$ então $bub \in L$. Além do mais, se u e v são elementos de L então $ubv \in L$. Logo L define um sistema simbólico irredutível de tipo finito, pelo que $L \in \mathcal{V}$. Uma vez que $A^+ \setminus A^*wA^* = \varphi^{-1}(L)$, temos $A^+ \setminus A^*wA^* \in \mathcal{V}$. Portanto $\mathscr{L}\mathsf{SI}^- \subseteq \mathsf{V}$, de acordo com a observação feita no primeiro parágrafo desta demonstração.

As variedades de linguagens são fechadas para a complementação. Resulta então dos Teoremas 1.33 e 7.7 que se uma pseudovariedade de semigrupos contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}^-$ então também contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}$. $\square$

Lema 7.17. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos ordenados V que contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}^-$. Seja k um inteiro positivo. Se L pertence à variedade positiva de linguagens definida por $\mathsf{V} * \mathsf{D}_k$ então $\Phi_k(L) \setminus \{1\}$ pertence à variedade positiva de linguagens definida por V.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ a variedade positiva de linguagens definida por V.

$$L \setminus A^{\leq k} = L \cap \left(\bigcap_{u \in A^{\leq k}} A^+ \setminus \{u\} \right).$$

Os conjuntos da forma $A^+ \setminus \{u\}$ são localmente e negativamente testáveis, e portanto $L \setminus A^{\leq k}$ pertence à variedade positiva de linguagens definida por $\mathsf{V} * \mathsf{D}_k$. Pelo Teorema 7.6, a linguagem $L \setminus A^{\leq k}$ é a união de uma família finita $(R_i)_{i \in I}$ de linguagens da forma $R_i = p_iA^* \cap A^*s_i \cap \Phi_k^{-1}(K_i)$, com $p_i, s_i \in A^{k+1}$ e $K_i \in \mathcal{V}(A^{k+1})^+$. Podemos verificar facilmente que

$$\Phi_k(L) \setminus \{1\} = \bigcup_{i \in I} \big[(\Phi_k(A^+) \setminus \{1\}) \cap p_i(A^{k+1})^* \cap (A^{k+1})^*s_i \cap K_i \big].$$

A linguagem $\Phi_k(A^+) \setminus \{1\}$ é localmente e negativamente testável, pois se $W = (A^{k+1})^2 \setminus \{\Phi_k(A^2)\}$ então

$$\Phi_k(A^+) \setminus \{1\} = (A^{k+1})^+ \setminus (A^{k+1})^*W(A^{k+1})^*.$$

Os conjuntos $p_i(A^{k+1})^*$ e $(A^{k+1})^*s_i$ também são linguagens localmente e negativamente testatáveis de $(A^{k+1})^+$. Portanto as linguagens $\Phi_k(A^+) \setminus \{1\}$, $p_i(A^{k+1})^*$, $(A^{k+1})^*s_i$ pertencem a $\mathcal{V}(A^{k+1})^+$. Logo $\Phi_k(L) \setminus \{1\} \in \mathcal{V}(A^{k+1})^+$, uma vez que $K_i \in \mathcal{V}(A^{k+1})^+$ e $\mathcal{V}(A^{k+1})^+$ é fechado para uniões e intersecções finitas. $\square$

Teorema 7.18. *Consideremos uma pseudovariedade de semigrupos ordenados V. Então $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ é um invariante de conjugação se e só se V contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}^-$ e $\mathcal{S}(\mathsf{V}) = \mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D})$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ é um invariante de conjugação. Então V contém $\mathscr{L}\mathsf{SI}^-$, pela Proposição 7.16. Suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ pertencente a $\mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D})$. Como $\mathsf{V} * \mathsf{D} = \bigcup_{k \geq 1} \mathsf{V} * \mathsf{D}_k$, existe $k \geq 1$ tal que $\mathcal{X} \in \mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D}_k)$. O conjunto $\Phi_k(L(\mathcal{X})) \setminus \{1\}$ é a linguagem de um sistema simbólico $\mathcal{Y}$ de $(A^{k+1})^{\mathbb{Z}}$ conjugado com $\mathcal{X}$. Pelo Lema 7.17 temos $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}(\mathsf{V})$. Logo $\mathcal{X} \in \mathcal{S}(\mathsf{V})$, uma vez que $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ é um invariante de conjugação. Portanto $\mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D}) \subseteq \mathcal{S}(\mathsf{V})$. É claro que $\mathcal{S}(\mathsf{V}) \subseteq \mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D})$.

A implicação recíproca é uma consequência imediata dos Teoremas 7.1 e 7.11. $\square$

Se não definíssemos o semigrupo sintáctico de um sistema simbólico pleno como sendo o semigrupo trivial então por exemplo $\mathcal{S}(\mathsf{I})$ e $\mathcal{S}(\mathsf{D})$ seriam vazios, pelo que o Teorema 7.18 seria falso.

7.5 Bestiário de classes de sistemas sóficos com caracterizações sintácticas

As linguagens de sistemas simbólicos de tipo finito são localmente negativamente testáveis. Portanto, da Proposição 7.16 deduz-se que não é possível usar um invariante da forma $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ para detectar pares de sistemas simbólicos de tipo finito não conjugados, onde V é uma pseudovariedade de semigrupos ordenados.

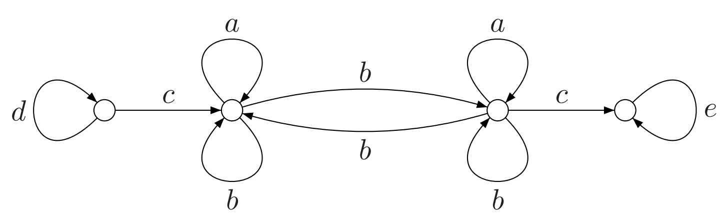
A classe dos sistemas simbólicos de tipo finito está estritamente contida em $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI}^-)$. Com efeito, se A for o alfabeto de duas letras $\{a, b\}$ então a linguagem $L = (A^+ \setminus A^*abA^*) \cup (A^+ \setminus A^*baA^*)$ é factorial e prolongável, pelo que existe um único sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ tal que $L(\mathcal{X}) = L$. A linguagem $L(\mathcal{X})$ é localmente testável, donde $\mathcal{X} \in \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI}^-)$. Por outro lado, para qualquer inteiro positivo n temos $ab^n \in L(\mathcal{X})$, $b^n a \in L(\mathcal{X})$ mas $ab^n a \notin L(\mathcal{X})$, pelo que $\mathcal{X}$ não é de tipo finito, pela Proposição 2.5.

Uma questão que decorre naturalmente da Proposição 7.16 é a de sabermos qual é a relação entre as classes $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI}^-)$ e $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI})$. Pela Proposição 7.4 temos $\mathscr{L}\mathsf{SI}^- = \mathscr{L}\mathsf{SI} \cap \mathscr{L}[\![x \leq xy]\!]$, pelo que $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI}^-) = \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI}) \cap \mathcal{S}(\mathscr{L}[\![x \leq xy]\!])$.

Proposição 7.19. *As classes* $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI}^-)$, $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI})$ *e* $\mathcal{S}(\mathscr{L}[\![x \leq xy]\!])$ *são distintas.*

Demonstração. Está demonstrado em [PW97] que o semigrupo sintáctico ordenado de uma linguagem L de A^+ pertence a $\mathscr{L}[\![x \leq xy]\!]$ se e só se L é a intersecção finita de linguagens da forma $A^+ \setminus u_0A^*u_1A^* \cdots u_{k-1}A^*u_k$, onde $k \geq 0$ e $u_i \in A^*$. Portanto, se A é o alfabeto de duas letras $\{a, b\}$ então o sistema simbólico $\mathcal{X}$ de $A^{\mathbb{Z}}$ definido pela linguagem factorial prolongável $A^+ \setminus A^*abA^*a^2bA^*$ pertence a $\mathcal{S}(\mathscr{L}[\![x \leq xy]\!])$. Como para quaisquer $v, w \in A^*$ temos $vbw \in A^*abA^*a^2bA^*$ se e só se $vb^2w \in A^*abA^*a^2bA^*$, sabemos que $\delta_{\mathcal{X}}(b) = \delta_{\mathcal{X}}(b)^2$. Uma vez que $ba^2ba^2b \notin L(\mathcal{X})$ e $ba^2b \in L(\mathcal{X})$, temos $\delta_{\mathcal{X}}(b)^\omega\delta_{\mathcal{X}}(a^2)\delta_{\mathcal{X}}(b)^\omega\delta_{\mathcal{X}}(a^2)\delta_{\mathcal{X}}(b)^\omega \neq \delta_{\mathcal{X}}(b)^\omega\delta_{\mathcal{X}}(a^2)\delta_{\mathcal{X}}(b)^\omega$, pelo que $\mathcal{X} \notin \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI})$.

Por outro lado, seja $\mathcal{Y}$ o sistema simbólico com a seguinte apresentação:

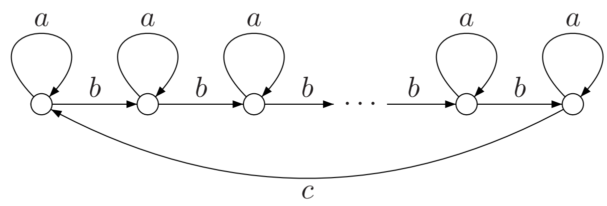


Temos $cabac \in L(\mathcal{Y})$ e $cac \notin L(\mathcal{Y})$, pelo que $\delta_{\mathcal{Y}}(a) \not\leq \delta_{\mathcal{Y}}(aba)$. Como $\delta_{\mathcal{Y}}(a) = \delta_{\mathcal{Y}}(a)^2$, deduzimos que $\mathcal{Y} \notin \mathcal{S}(\mathscr{L}[\![x \leq xy]\!])$. Por outro lado $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI})$, por cálculo directo. $\square$

Uma consequência das Proposições 7.16 e 7.19 é que não existe uma pseudovariedade de semigrupos V tal que $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI}^-) = \mathcal{S}(\mathsf{V})$.

Dada uma pseudovariedade de semigrupos ordenados V, seja $\mathcal{S}_I(\mathsf{V})$ a classe dos sistemas simbólicos irredutíveis pertencentes a $\mathcal{S}(\mathsf{V})$. Se $\mathsf{SI}^- \subseteq \mathsf{V}$ então $\mathcal{S}_I(\mathscr{L}\,\mathsf{V})$ é uma classe fechada para tomarmos divisores irredutíveis, pelo Teorema 7.11. Existe uma infinidade de tais classes.

Exemplo 7.20. Consideremos a sequência $(\mathcal{X}_n)_{n\geq 1}$ de sistemas simbólicos sóficos irredutíveis com as seguintes apresentações:

$\mathcal{X}_n$:  (n b's)

Então $\mathcal{X}_n \in \mathscr{S}_I(\mathscr{L}[\![x^{n+2} = x^{n+1}]\!]) \setminus \mathscr{S}_I(\mathscr{L}[\![x^{n+1} = x^n]\!]$, pelo que

$$\mathscr{S}_I(\mathscr{L}[\![x^2 = x]\!]) \subsetneqq \mathscr{S}_I(\mathscr{L}[\![x^3 = x^2]\!]) \subsetneqq \mathscr{S}_I(\mathscr{L}[\![x^4 = x^3]\!]) \subsetneqq \cdots .$$

Vamos proceder à descrição de algumas classes relevantes de sistemas simbólicos sóficos da forma $\mathcal{S}_I(\mathsf{V})$.

Proposição 7.21. *A classe dos sistemas simbólicos irredutíveis de tipo finito é a classe $\mathcal{S}_I(\mathscr{L}\mathsf{Com})$.*

Demonstração. Qualquer sistema simbólico de tipo finito pertence a $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{SI}^-)$, logo pertence a $\mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{Com})$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ pertence a $\mathcal{S}_I(\mathscr{L}\mathsf{Com})$. Consideremos elementos u, v, w de A^+ tais que $uv, vw \in L(\mathcal{X})$ e v tem comprimento maior do que o cardinal de $S(\mathcal{X})$. Pela Proposição 1.42 existem $v_1, e, v_2 \in A^+$ tais que $v = v_1ev_2$ e $\delta_{\mathcal{X}}(e)$ é um idempotente. Como $e, uv_1e, ev_2w \in L(\mathcal{X})$ e $\mathcal{X}$ é irredutível, existem $x, y \in A^+$ tais que $ev_2w{\cdot}x{\cdot}e{\cdot}y{\cdot}uv_1e \in L(\mathcal{X})$. Isto significa que $\delta_{\mathcal{X}}(ev_2wxeyuv_1e) \neq 0$. Como o submonóide local $\delta_{\mathcal{X}}(e)S(\mathcal{X})\,\delta_{\mathcal{X}}(e)$ é comutativo, temos

$$\delta_{\mathcal{X}}(eyuvwxe) = \delta_{\mathcal{X}}(eyuv_1e)\delta_{\mathcal{X}}(ev_2wxe) = \delta_{\mathcal{X}}(ev_2wxe)\delta_{\mathcal{X}}(eyuv_1e) \neq 0.$$

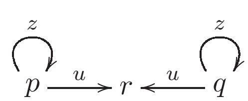
Portanto $eyuvwxe \in L(\mathcal{X})$, donde $uvw \in L(\mathcal{X})$. Graças à Proposição 2.5 concluímos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico irredutível de tipo finito. □

Seja Inv a pseudovariedade gerada pelos semigrupos de transformações parciais injectivas em conjuntos finitos. Ash mostrou que $\mathsf{Inv} = [\![x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega]\!]$ [Ash87].

Teorema 7.22. *A classe dos sistemas simbólicos de tipo quase finito é a classe $\mathcal{S}_I(\mathscr{L}\mathsf{Inv})$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico de $A^{\mathbb{Z}}$ de tipo quase finito. Então $\mathcal{X}$ é conjugado de um sistema simbólico $\mathcal{Y}$ de $B^{\mathbb{Z}}$ com uma apresentação (G, λ) bi-resolvente, para algum alfabeto B (cf. Teorema 2.24). É claro que os elementos do semigrupo de transição de qualquer grafo etiquetado bi-resolvente são funções parciais injectivas. Portanto o semigrupo de transição de (G, λ) pertence a Inv. Logo $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}(\mathsf{Inv})$, pela Proposição 1.15. Como $\mathscr{U}^- \in \mathsf{Inv} \subseteq \mathscr{L}\mathsf{Inv}$, aplicando o Teorema 7.11 concluímos que $\mathcal{X} \in \mathcal{S}(\mathscr{L}\mathsf{Inv})$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{X} \in \mathcal{S}_I(\mathscr{L}\mathsf{Inv})$ e que $\mathcal{X}$ não é de tipo quase finito. Então a sua apresentação direita de Fischer $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$ não é co-fechante (cf. Teorema 2.24), pelo que nela existem caminhos etiquetados de acordo com a seguinte disposição:



p, q, r estados, $p \neq q$, $u, z \in A^+$.

Como $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$ é fortemente conexo, existem caminhos $r \to p$ e $r \to q$ etiquetados v e w. Então $p \cdot (z^\omega uvz^\omega)^\omega (z^\omega uwz^\omega)^\omega = q$ e $p \cdot (z^\omega uwz^\omega)^\omega (z^\omega uvz^\omega)^\omega = p$. O monóide local de $S(\mathcal{X})$ em $\hat{\delta}_{\mathcal{X}}(z)^\omega$ pertence a $\mathsf{Inv} = [\![x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega]\!]$, logo $(z^\omega uvz^\omega)^\omega (z^\omega uwz^\omega)^\omega$ e $(z^\omega uwz^\omega)^\omega (z^\omega uvz^\omega)^\omega$ têm a mesma acção nos estados de $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$. Deduz-se então que $p = q$, o que é contraditório. □

O facto de que a classe dos sistemas simbólicos de tipo quase finito está contida em $\mathcal{S}_I(\mathscr{L}\mathsf{Inv})$ foi provado em [BFP05], usando outras ideias. A inclusão oposta foi demonstrada em [Cos07]. Está provado em [Béa93, Proposição 4.1] que a classe dos sistemas simbólicos de tipo quase finito é fechada para a conjugação. Esse facto é agora um corolário do seguinte resultado, que se deduz imediatamente dos Teoremas 7.11 e 7.22:

Teorema 7.23. *A classe dos sistemas simbólicos de tipo quase finito é fechada para tomarmos divisores irredutíveis.*

Uma codificação $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ diz-se *aperiódica* se para qualquer $x \in \mathcal{X}$ se verifica a condição

$$\{n \in \mathbb{Z}^+ : \sigma^n(x) = x\} \neq \emptyset \Rightarrow \min\{n \in \mathbb{Z}^+ : \sigma^n(x) = x\} = \min\{n \in \mathbb{Z}^+ : \sigma^n(G(x)) = G(x)\}.$$

Um sistema simbólico *aperiódico* é um sistema simbólico que é a imagem de um sistema simbólico de tipo finito através de uma codificação aperiódica. A classe $\mathcal{S}_I(\mathsf{A})$ foi caracterizada em [BFP06] como sendo a classe dos sistemas simbólicos aperiódicos. Também foi provado em [BFP06] que $\mathcal{S}_I(\mathsf{A})$ é um invariante de conjugação, usando uma versão mais fraca do Teorema 6.23. Mas como $\mathsf{A} = \mathscr{L}\mathsf{A}$, aplicando o Teorema 7.11 obtemos um resultado melhor:

Teorema 7.24. *A classe dos sistemas simbólicos aperiódicos é fechada para tomarmos divisores irredutíveis.*

7.6 Conjugação ulterior

Para que se compreenda a necessidade desta secção, é preciso que se diga que não sabemos se é verdade que quaisquer dois sistemas simbólicos (sóficos) ulteriormente conjugados são fracamente equivalentes.

Um *semigrupóide ordenado* é um semigrupóide S munido de uma ordem parcial (usual-mente denotada por $\leq$) definida no conjunto das arestas de S e que é uma congruência sobre S. Os homomorfismos entre semigrupóides ordenados são os homomorfismos de semigrupóides que respeitam a ordem. Dizemos que um semigrupóide ordenado S é um *divisor* do semigrupóide ordenado T se existir um subsemigrupóide ordenado R de T para o qual existe um homomorfismo quociente de semigrupóides ordenados $\varphi : R \to S$. Uma *pseudovariedade de semigrupóides ordenados* é uma classe não vazia de semigrupóides ordenados finitos que contém os divisores e os produtos directos finitos dos seus elementos, onde a ordem é definida componente a componente. Note-se que as pseudovariedades de semigrupóides são pseudovariedades de semigrupóides ordenados. Tal como no caso em que não se supõe a existência de uma ordem, o *global* de uma pseudovariedade V de semigrupos ordenados define-se como a menor pseudovariedade de semigrupóides ordenados que contém V, e denota-se por gV. Todos estes conceitos são introduzidos em [PPW02].

Dado um semigrupo ordenado S, a *categoria dos idempotentes de* S é a categoria ordenada denotada por S_E definida do seguinte modo:

- os vértices de S_E são os idempotentes de S;
- dados dois idempotentes e e f de S, as arestas de S_E que começam em e e acabam em f são os triplos (e, s, f) tais que $s \in S$ e $s = esf$;
- a composição de duas arestas consecutivas (e, s, f) e (f, t, g) é a aresta (e, st, g);
- dadas duas arestas co-terminais (e, s, f) e (e, t, f), temos $(e, s, f) \leq (e, t, f)$ se e só se $s \leq t$.

Teorema 7.25 (Teorema do Atraso)**.** *Consideremos uma pseudovariedade* V *de semigrupos ordenados que contém algum monóide não trivial. Seja* S *um semigrupo ordenado finito. Então* $S \in \mathsf{V} * \mathsf{D}$ *se e só se* $S_E \in \mathsf{gV}$.

O Teorema 7.25 está demonstrado em [PPW02].[1] Trata-se de uma adaptação da versão "não ordenada" que apareceu em [Til87, Teorema 17.1] como uma reformulação de um resultado de [Str85].

Teorema 7.26. *Suponhamos que* V *é uma pseudovariedade de semigrupos ordenados. Se* $\mathcal{S}(\mathsf{V})$ *é um invariante de conjugação então também é um invariante de conjugação ulterior.*

Demonstração. Pelo Teorema 7.18, temos $\mathcal{S}(\mathsf{V}) = \mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D})$, e V contém algum monóide não trivial. Pelo Teorema do Atraso temos

$$\mathcal{S}(\mathsf{V} * \mathsf{D}) = \{\mathcal{Z} : \mathcal{Z} \text{ é sófico e } S(\mathcal{Z})_E \in \mathsf{gV}\}.$$

Suponhamos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são sistemas simbólicos ulteriormente conjugados. Consideremos um inteiro l tal que $\mathcal{X}^l$ e $\mathcal{Y}^l$ são conjugados. Seja l' como no Lema 6.30. Como $l' > l$, os sistemas simbólicos $\mathcal{X}^{l'}$ e $\mathcal{Y}^{l'}$ são conjugados. Portanto

$$S(\mathcal{X}^{l'})_E \in \mathsf{gV} \Leftrightarrow S(\mathcal{Y}^{l'})_E \in \mathsf{gV}.$$

Ora $S(\mathcal{X})_E = S(\mathcal{X}^{l'})_E$ e $S(\mathcal{Y})_E = S(\mathcal{Y}^{l'})_E$. □

[1] De facto em [PPW02] o Teorema do Atraso está enunciado para pseudovariedades de monóides ordenados, mas *mutatis mutandis* a demonstração é a mesma para pseudovariedades de semigrupos ordenados.

Apêndice A

Entropia de pseudopalavras

Este capítulo em apêndice é constituído por uma selecção de material de [AV06] sobre a entropia de pseudopalavras. Os resultados aqui exibidos não serão todos provados, mas podemos dizer que são todos de demonstração deveras curta e elegante, com excepção da parte relativa à iteração de endomorfismos contínuos.

Consideremos uma pseudovariedade V de semigrupos que contém $\mathscr{L}\mathsf{Sl}$.

Se $(t_n)_n$ é uma sequência de números reais não negativos tal que $t_{r+s} \leq t_r + t_s$, então a sucessão $(\frac{t_n}{n})_n$ é convergente [LM96, Lema 4.1.7]. Seja w um elemento de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V} \setminus A^+$, onde A é um alfabeto com mais do que uma letra. Como $F_{r+s}(w) \subseteq F_r(w)F_s(w)$, temos

$$\log_{|A|} |F_{r+s}(w)| \leq \log_{|A|}(|F_r(w)| \cdot |F_s(w)|) = \log_{|A|} |F_r(w)| + \log_{|A|} |F_s(w)|.$$

Logo existe o seguinte limite

$$h_A(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_{|A|} |F_n(\mathcal{X})|}{n},$$

o qual se designa por *entropia de* w.

Ao contrário do que acontece com os sistemas simbólicos, a definição de entropia de uma pseudopalavra depende do alfabeto que se está a considerar. Se $A \subseteq B$, em geral $h_A(w) > h_B(w)$. A escolha da base é uma mera convenção. Estamos a seguir a definição de [AV06].

Por convenção, os elementos de A^+ têm entropia zero.

Existem outros elementos de entropia zero. Por exemplo, se $u \in A^+$ então $F_n(u^\omega) \leq |u|$, pelo que $h_A(u^\omega) = 0$. Mais geralmente, se $x^\nu \in \overline{\Omega}_1\mathsf{S}$ então $h_A(u^\omega) = h_A(u)$ para qualquer $u \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$.

Como $|F_n(w)| \leq |A|^n$, temos $h_A(w) \leq 1$. O ideal mínimo de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ é denotado por K_A.

Proposição A.1. *Um elemento de $\overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ tem entropia 1 se e só se pertence a K_A.*

Se $\mathcal{X}$ é um sistema simbólico irredutível de $A^{\mathbb{Z}}$, então para qualquer elemento u de $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ temos $h_A(u) = \frac{h(\mathcal{X})}{\ln|A|}$. Ainda sob a condição $|A| > 1$, D. Damanik e B. Solomyak [DS02] mostraram que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um sistema simbólico minimal $\mathcal{X}_\varepsilon$ tal que $h(\mathcal{X}_\varepsilon) > \ln|A| - \varepsilon$. Ou seja, de acordo com o Teorema 3.24, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma pseudopalavra infinita $\mathcal{J}$-maximal de entropia maior do que $1 - \varepsilon$. É interessante confrontar este facto com a Proposição A.1 e o Teorema 3.25.

Teorema A.2. *Além de A, consideremos um outro alfabeto B. Seja $w' = w(v_1, \ldots, v_{|B|})$ onde $v_i \in \overline{\Omega}_A\mathsf{V}$ ($i \in \{1, \ldots, |B|\}$) e $w \in \overline{\Omega}_B\mathsf{S}$. Tem-se*

$$h_A(w') \leq \max\{h_B(w) \log_{|A|} |B|, h_A(v_1), \ldots, h_A(v_{|B|})\}.$$

Corolário A.3. *Para quaisquer $u, v \in \overline{\Omega}_A \mathsf{V}$, tem-se $h_A(uv) = \max\{h_A(u), h_A(v)\}$.*

Demonstração. É claro que a entropia de uma pseudopalavra é maior ou igual à entropia de qualquer um dos seus factores. Logo $\max\{h_A(u), h_A(v)\} \leq h_A(uv)$. Seja $X = \{x, y\}$ um alfabeto de duas letras. Então $w = xy \in \overline{\Omega}_X \mathsf{V}$ e $uv = w(u, v)$. Logo, como $h_X(w) = 0$, segue que $h_A(uv) \leq \max\{h_A(u), h_A(v)\} \leq h_A(uv)$. □

Em particular, $\overline{\Omega}_A \mathsf{V} \setminus K_A$ é um subsemigrupo de $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$, graças à Proposição A.1.

Corolário A.4. *O semigrupo $\overline{\Omega}_A \mathsf{V} \setminus K_A$ é fechado para a composição dos seus elementos com pseudopalavras de $\overline{\Omega}_B \mathsf{V} \setminus K_B$, se $|B| \leq |A|$.*

Demonstração. Se $w \in \overline{\Omega}_B \mathsf{V} \setminus K_A$ então $h_B(w) < 1$, pela Proposição A.1. Como $\log_{|A|} |B| \leq 1$, o resultado segue imediatamente do Teorema A.2. □

Corolário A.5. *O semigrupo $\overline{\Omega}_A \mathsf{V} \setminus K_A$ é fechado para a composição dos seus elementos com pseudopalavras de $\overline{\Omega}_B \mathsf{V}$, se $|B| < |A|$.*

Demonstração. Se $w \in \overline{\Omega}_B \mathsf{V}$ então $h_B(w) \log_{|A|} |B| < 1$. □

Para que se aprecie o interesse da entropia de pseudopalavras, compare-se a demonstração do Corolário A.5 com a demonstração do Teorema 12.3.2 de [Alm95], um resultado muito mais fraco.

Em [Alm05b, Teorema 4.14] foi provado que se S é um semigrupo profinito gerado por um conjunto finito, então o monóide $End(S)$ dos seus endomorfismos contínuos é um semigrupo profinito para a topologia da convergência pontual, e a função de avaliação $(\varphi, s) \mapsto \varphi(s)$ de $End(S) \times S$ em S é contínua. Assim, por exemplo, se $\varphi \in End(S)$ então $\varphi^\omega(s) = \lim_{n \to +\infty} \varphi^{n!}(s)$. Pode-se dizer que φ^ω, e mais geralmente φ^ν com $x^\nu \in \overline{\Omega}_1 \mathsf{S}$, é uma iteração de φ. A exploração da dinâmica destas iterações constitui o paradigma de vários artigos de J. Almeida, em parte em co-autoria com M. Volkov. Por exemplo, em [Alm02b] e em [AV06] a iteração de endomorfismos contínuos num semigrupo profinito livre permitiu a definição de pseudopalavras de um tipo até então não estudado e com as quais foi possível deduzir propriedades sobre certas classes de pseudovariedades; em [Alm05a] o estudo da dinâmica dos endomorfismos contínuos do semigrupo profinito livre definidos por substituições (fracamente) primitivas permitiu o cálculo do grupo de Schützenberger de várias famílias de $\mathcal{J}$-classes maximais de pseudopalavras infinitas. A iteração de endomorfismos contínuos também não aumenta a entropia, conforme está enunciado no teorema seguinte.

Teorema A.6. *Seja φ um endomorfismo contínuo de $\overline{\Omega}_A \mathsf{V}$. Para qualquer $x^\nu \in \overline{\Omega}_1 \mathsf{S}$, tem-se*

$$\max_{a \in A} h_A(\varphi^\nu(a)) \leq \max_{a \in A} h_A(\varphi(a)).$$

Apêndice B

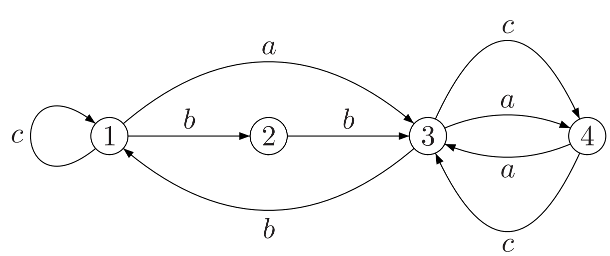
Matrizes simbólicas

Ao longo deste capítulo em apêndice, vamos poder constatar que as matrizes simbólicas estão para os sistemas simbólicos sóficos tal como as matrizes numéricas estão para os sistemas simbólicos de tipo finito.

Seja A um alfabeto. Como é habitual, o anel dos polinómios sobre A de coeficientes inteiros denota-se por $\mathbb{Z}[A]$. Uma *matriz simbólica* sobre A é uma matriz M cujas entradas são elementos de $\mathbb{Z}[A]$ de coeficientes não negativos. Se adicionalmente todas as entradas de M forem polinómios lineares então dizemos que M é uma *matriz simbólica linear*.

Seja $\mathfrak{G} = (\mathrm{G}, \lambda)$ um grafo etiquetado com n vértices. Ordenemos os vértices de $\mathfrak{G}$ de 1 até n. A *matriz simbólica de adjacência* da apresentação $\mathfrak{G}$ (ou da cobertura λ_*) é a matriz $n \times n$ simbólica linear $M_{\mathfrak{G}}$ tal que se $E(i,j)$ designar o conjunto das arestas de $\mathfrak{G}$ que começam no i-ésimo vértice e acabam no j-ésimo vértice então $(M_{\mathfrak{G}})_{i,j} = \sum_{x \in E(i,j)} \lambda(x)$ (se a soma for vazia então a entrada é 0).

Exemplo B.1. Um grafo etiquetado e a respectiva matriz simbólica de adjacência:



$$\begin{bmatrix} c & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a+c \\ 0 & 0 & a+c & 0 \end{bmatrix}$$

Reciprocamente, uma matriz simbólica linear quadrada M de dimensão n sobre A define naturalmente um grafo etiquetado $\mathfrak{G}_M$ com n vértices $v_1 \dots v_n$: se $M_{i,j} = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k$, então entre v_i e v_j existem k arestas, sendo a k-ésima aresta etiquetada a_i. A cobertura associada a $\mathfrak{G}_M$ é denotada por π_M.

Na Subsecção 2.3.2 vimos como calcular a função zeta de um sistema simbólico de tipo finito com o recurso a matrizes de inteiros não negativos. Em [LM96, Secção 6.4] encontra-se uma exposição de uma generalização desse procedimento para sistemas simbólicos sóficos, recorrendo às matrizes simbólicas, e que de seguida apresentamos resumidamente.

Suponhamos que $\mathfrak{G}$ é um grafo etiquetado resolvente sobre o alfabeto A e com n vértices $p_1, \dots, p_n$. Denotemos por τ o homomorfismo de transição de $\mathfrak{G}$, por τ_u a imagem por τ de uma palavra u. O alfabeto $-A$ é o alfabeto disjunto de A constituído pelos monómios de $\mathbb{Z}[A]$ da forma $-a$, com $a \in A$. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ seja $\mathfrak{G}_k$ o grafo etiquetado definido do seguinte modo: o conjunto dos vértices é o conjunto dos k-tuplos $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})_{i_1<i_2<\ldots<i_k}$; para cada $a \in A$, existe uma aresta etiquetada a (respectivamente $-a$) entre $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$ e $(p_{j_1}, \ldots, p_{j_k})$ se e só se $(p_{j_1}, \ldots, p_{j_k})$ é uma permutação par (respectivamente ímpar) de $(\tau_a(p_{i_1}), \ldots, \tau_a(p_{i_k}))$. Dizemos que $\mathfrak{G}_k$ é o *k-ésimo grafo dos subconjuntos de* $\mathfrak{G}$. Seja φ o único homomorfismo de anéis entre $\mathbb{Z}[A]$ e $\mathbb{Z}$ tal que $\varphi(a) = 1$ para todo $a \in A$. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ seja N_k a matriz simbólica de adjacência de $\mathfrak{G}_k$. Se N_k for uma matriz $m_k \times m_k$, seja M_k a matriz $m_k \times m_k$ tal que $(M_k)_{i,j} = \varphi((N_k)_{i,j})$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, m_k\}$. Dizemos que M_k é a *matriz numérica associada de* $\mathfrak{G}$.

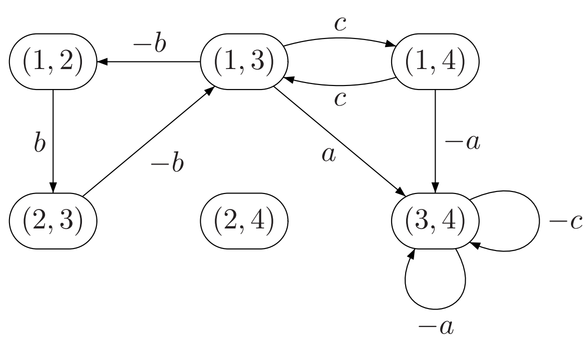
Teorema B.2 ([LM96, Teorema 6.4.8])**.** *Seja $\mathfrak{G}$ um grafo etiquetado resolvente com n vértices. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ seja M_k a matriz numérica associada a $\mathfrak{G}_k$. Então*

$$\zeta_{X_{\mathfrak{G}}}(t) = \prod_{k=1}^{n} [\det(I - tM_k)]^{(-1)^k}.$$

Exemplo B.3. Consideremos o sistema simbólico sófico apresentado pelo grafo etiquetado resolvente $\mathfrak{G}$ do Exemplo B.1. Então

$$N_1 = \begin{bmatrix} c & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a+c \\ 0 & 0 & a+c & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

O grafo etiquetado $\mathfrak{G}_2$ tem a seguinte representação gráfica:



As matrizes correspondentes são

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & c & 0 & 0 & a \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Por fim, $N_3 = [b]$ e $M_3 = [1]$. Logo,

$$\zeta_{X_{\mathfrak{G}}}(t) = \frac{\det(I_6 - tM_2)}{\det(I_4 - tM_1)\det(I_1 - tM_3)} = \frac{-1 - 2t + t^2 + 3t^3 + 2t^4}{-1 + 2t + 4t^2 - 8t^3 + 3t^4}.$$

Note-se que o método de cálculo da função zeta de um sistema simbólico de tipo finito descrito no Teorema 2.26 é um caso particular do Teorema B.2. Com efeito, se M é uma matriz essencial de inteiros não negativos então de entre os grafos dos subconjuntos de $\mathfrak{G}_M$, o próprio $\mathfrak{G}_M$ é o único com arestas, logo é o único que é relevante para o cálculo da função zeta. Ora a matriz numérica associada a $\mathfrak{G}_M$ é precisamente M.

O cálculo da entropia de um sistema simbólico sófico é em geral mais simples do que o cálculo da sua função zeta, graças ao próximo teorema. Uma função diz-se *finita-para-um* se existir um inteiro M para o qual todos elementos da sua imagem têm no máximo M pré-imagens. Se (G, λ) é um grafo etiquetado (co-)fechante então λ_* é finita-para-um.

Teorema B.4 ([LM96, Teorema 8.1.16 e Exercício 8.1.6])**.** *Suponhamos que $\mathcal{Y}$ é um sistema simbólico sófico apresentado por um grafo etiquetado (G, λ) tal que λ_* é finita-para-um. Então $h(\mathcal{Y}) = h(X_G)$.*

Duas matrizes quadradas (de dimensões eventualmente diferentes) M e N de inteiros não negativos são *elementarmente equivalentes* se existirem matrizes U e V de inteiros não negativos tais que $M = UV$ e $N = VU$. O fecho transitivo da relação de equivalência elementar é uma relação de equivalência denominada *equivalência forte para a translação*, ou mais abreviadamente *equivalência forte*.

Teorema B.5 ([Wil73], [LM96, Teorema 7.2.7])**.** *Sejam M e N duas matrizes essenciais de inteiros não negativos. Os sistemas simbólicos X_M e X_N são conjugados se e só se M e N são fortemente equivalentes para a translação.*

A Proposição 2.9 e o Teorema B.5 transformam o problema da classificação das classes de conjugação de sistemas simbólicos de tipo finito no problema da classificação das classes de equivalência forte de matrizes essenciais de inteiros não negativos. Um fenómeno semelhante ocorre com a conjugação ulterior, como vamos ver de seguida. Duas matrizes quadradas (de dimensões eventualmente diferentes) M e N de inteiros não negativos são *ulteriormente equivalentes* se existirem matrizes U e V de inteiros não negativos e um inteiro positivo l tais que $M^l = UV$, $N^l = VU$, $MU = UN$ e $VM = NV$.

Teorema B.6 ([Wil73, KR79])**.** *Sejam M e N duas matrizes essenciais de inteiros não negativos. Os sistemas simbólicos X_M e X_N são ulteriormente conjugados se e só se M e N são ulteriormente equivalentes.*

Vamos em seguida exibir teoremas sobre sistemas simbólicos sóficos semelhantes aos Teoremas B.5 e B.6.

Duas matrizes simbólicas M e N são *simbolicamente equivalentes*, e escrevemos $M \leftrightarrow N$ se M e N forem iguais módulo uma bijecção entre os monómios que ocorrem nas suas entradas. Por exemplo, podemos escrever,

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ b+c & 2a \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & y \\ x+y & 2z \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & bb \\ bb+bc & 2cb \end{bmatrix}.$$

Duas matrizes simbólicas M e N são *elementarmente equivalentes* se existirem matrizes simbólicas U e V sobre alfabetos disjuntos tais que $M \leftrightarrow UV$ e $N \leftrightarrow VU$. A relação de equivalência entre matrizes simbólicas gerada pela relação de shift equivalência forte elementar denomina-se *equivalência forte para a trasnlação*.

Teorema B.7 ([Nas86, HN88])**.** *Sejam M e N matrizes simbólicas. Então π_M e π_N são codificações conjugadas se e só se M e N são fortemente shift equivalentes.*

Seja $\mathscr{C}$ uma família de coberturas. Duas matrizes simbólicas M e N são *fortemente equivalentes* $\mathscr{C}$ se existir uma sequência de matrizes simbólicas de adjacência de elementos de $\mathscr{C}$

$$M = M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}, M_k = N$$

tal que M_i e M_{i+1} são elementarmente equivalentes, para todo $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Teorema B.8 ([Nas86, HN88]). *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois sistemas simbólicos sóficos. Sejam M e N as matrizes simbólicas de adjacência das suas coberturas direitas de Krieger. Então $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são conjugados se e só se M e N são fortemente equivalentes via coberturas direitas de Krieger. Suponhamos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são irredutíveis e que C e D são as matrizes simbólicas de adjacência das suas coberturas direitas de Fischer. Então $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são conjugados se e só se C e D são fortemente equivalentes via coberturas direitas de Fischer.*

Duas matrizes simbólicas M e N são *ulteriormente equivalentes* se existirem matrizes simbólicas U e V sobre alfabetos disjuntos e um inteiro positivo l tais que $M^l \leftrightarrow UV$, $N^l \leftrightarrow VU$, $MU \leftrightarrow UN$ e $VM \leftrightarrow NV$.

Teorema B.9 ([BK88, Teorema 1.9]). *Sejam M e N matrizes simbólicas tais que π_M e π_N são finitas-para-um. Então π_M e π_N são codificações ulteriormente conjugadas se e só se M e N são ulteriormente equivalentes.*

Teorema B.10 ([BK88, Proposição 1.10]). *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois sistemas simbólicos sóficos. Sejam M e N as matrizes simbólicas de adjacência das suas coberturas direitas de Krieger. Então $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são ulteriormente conjugados se e só se M e N são ulteriormente equivalentes. Suponhamos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são irredutíveis e que C e D são as matrizes simbólicas de adjacência das suas coberturas direitas de Fischer. Então $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são ulteriormente conjugados se e só se C e D são ulteriormente equivalentes.*

Apêndice C

As equações $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$ e $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$

Temos $\mathsf{A} \textcircled{m} (\mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}) = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$, para qualquer pseudovariedade de semigrupos V [Pin86, Exercício 5.10]. Logo as soluções da equação $\mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$ são precisamente as pseudovariedades da forma $\mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}$.

Conforme já se escreveu no último parágrafo da Subsecção 1.7.1, também temos $\mathsf{V} * \mathsf{D} = (\mathsf{V} * \mathsf{D}) * \mathsf{D}$ para qualquer pseudovariedade de semigrupos V, pelo que as soluções da equação $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$ são precisamente as pseudovariedades da forma $\mathsf{V} * \mathsf{D}$. Consideremos a sucessão $(\mathsf{C}_n)_n$ de pseudovariedades de semigrupos definida recursivamente do seguinte modo:

- $\mathsf{C}_0 = \mathsf{A}$;
- $\mathsf{C}_n = \mathsf{A} * \mathsf{G} * \mathsf{C}_{n-1}$ se $n \geq 1$.

Uma possível formulação do célebre Teorema de Krohn-Rhodes [KR65] consiste na igualdade $\mathsf{S} = \bigcup_{n \geq 0} \mathsf{C}_n$ (cf. [Alm95, Secção 10], nomeadamente Teorema 10.5.5). A *complexidade* de um semigrupo finito S é o menor inteiro n tal que $S \in \mathsf{C}_n$ [KR68]. O conhecido problema ainda em aberto da complexidade de Krohn-Rhodes consiste em saber se existe ou não um algoritmo que permite calcular a complexidade de um semigrupo finito.

Como $\mathsf{A} * \mathsf{D} = \mathsf{A}$, as pseudovariedades da forma C_n são soluções da equação $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$. Por outro lado, o Teorema Fundamental da Complexidade afirma que $\mathsf{C}_n = \mathsf{A} \textcircled{m} (\mathsf{G} * \mathsf{C}_{n-1})$ ([Rho68] e [Eil76, Capítulo XII]). Logo as pseudovariedades da forma C_n são de facto soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}, \\ \mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}. \end{cases} \tag{C.1}$$

Se H é uma pseudovariedade de grupos então a classe dos semigrupos finitos cujos subgrupos pertencem a H é uma pseudovariedade de semigrupos. Essa pseudovariedade é denotada por $\overline{\mathsf{H}}$. Facilmente se mostra que $\mathsf{A} = \overline{\mathsf{I}}$. As pseudovariedades da forma $\overline{\mathsf{H}}$ são soluções do seguinte sistema (cf. [Eil76, Proposição 10.6, Capítulo V] e [Pin97, Teorema 7.10]):

$$\begin{cases} \mathsf{V} = \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{V}, \\ \mathsf{V} = \mathscr{L} \mathsf{V}. \end{cases} \tag{C.2}$$

Note-se que as soluções do sistema (C.2) também são soluções do sistema (C.1), uma vez que $\mathscr{L} \mathsf{V} = (\mathscr{L} \mathsf{V}) * \mathsf{D}$ para qualquer pseudovariedade de semigrupos V. Por outro lado, se $n \geq 1$ então C_n é uma solução de (C.1) que não é solução de (C.2) [RS06]. Até ao final deste capítulo em apêndice vamos exibir um exemplo de uma outra solução do sistema C.2

(Proposição C.7), e de uma solução da equação $\mathsf{V} = \mathsf{A} \circledcirc\!\!\!{\scriptstyle m}\ \mathsf{V}$ que não é solução do sistema (C.1) (Corolário C.4).

Lema C.1. *Seja* V *uma pseudovariedade de semigrupos. Seja* u *uma pseudopalavra. Se* V *satisfaz a pseudoidentidade* $u^2 = u$ *então* $\mathsf{A} \,ⓜ\, \mathsf{V}$ *satisfaz a pseudoidentidade* $u^\omega = u^{\omega+1}$.

De facto o Lema C.1 é uma consequência imediata de um resultado muito mais geral que permite obter bases de pseudoidentidades para produtos de Mal'cev de pseudovariedades [PW96a]. De acordo com esse resultado, o conjunto das pseudoidentidades da forma $u^\omega = u^{\omega+1}$, em que u é uma pseudopalavra tal que V satisfaz a pseudoidentidade $u^2 = u$, é mesmo uma base de pseudoidentidades de $\mathsf{A} \,ⓜ\, \mathsf{V}$. Mas não precisaremos de usar este resultado em toda a sua força, pelo que vamos proceder à demonstração do Lema C.1, que é muito fácil.

Demonstração do Lema C.1. Suponhamos que u é uma pseudopalavra sobre um alfabeto de n letras. Seja S um elemento de $\mathsf{A} \,ⓜ\, \mathsf{V}$. Então existe um morfismo A-relacional θ de S num elemento T de V. Sejam $s_1, \ldots, s_n \in S$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, seja $t_i \in \theta(s_i)$. Pela definição de morfismo relacional de semigrupos, temos

$$u(t_1, \ldots, t_n) \in \theta(u(s_1, \ldots, s_n)).$$

Ora $u(t_1, \ldots, t_n)$ é um idempotente, pois V satisfaz a pseudoidentidade $u^2 = u$. Então, como θ é A-relacional, o semigrupo $\theta^{-1}(u(t_1, \ldots, t_n))$ é aperiódico. Logo

$$u(s_1, \ldots, s_n)^\omega = u(s_1, \ldots, s_n)^{\omega+1}.$$

Portanto S satisfaz a pseudoidentidade $u^\omega = u^{\omega+1}$. Sendo S um elemento arbitrário de $\mathsf{A} \,ⓜ\, \mathsf{V}$, concluímos que a pseudovariedade $\mathsf{A} \,ⓜ\, \mathsf{V}$ satisfaz a pseudoidentidade $u^\omega = u^{\omega+1}$. $\square$

Dado um alfabeto X e um conjunto de identidades Σ sobre X, denotamos por $\langle X \,|\, \Sigma \rangle$ o quociente de X^+ pela menor congruência que contém Σ. Dado $u \in X^+$, vamos denotar por $\overline{u}$ a classe de equivalência de u relativamente a essa congruência. Quando não há perigo de confusão, $\overline{u}$ representa-se simplesmente por u.

Seja $A = \{a, b\}$ um alfabeto de duas letras. Seja n um inteiro positivo. Vamos denotar por $\mathscr{T}_n$ o semigrupo

$$\langle A \,|\, a^2 = a,\, b^2 = b,\, ab = (ab)^{n+1},\, ba = (ba)^{n+1} \rangle$$

Note-se que $(ab)^n$ e $(ba)^n$ são idempotentes: se s é um elemento de um semigrupo S tal que $s^{n+1} = s$ então $(s^n)^2 = s^{2n} = s^{n+1}s^{n-1} = ss^{n-1} = s^n$. O diagrama de Green de $\mathscr{T}_3$ encontra-se representado na Figura C.1. Seja

$$P = \{b^i(ab)^j a^k \in A^+ \,:\, i, k \in \{0, 1\},\, 0 \leq j \leq n,\, i + j + k \neq n + 2\}.$$

Se $t \in \mathscr{T}_n$ então existe uma e uma só palavra u de A^+ pertencente a P tal que $t = \overline{u}$. Além disso,

$$b^{i_1}(ab)^{j_1}a^{k_1} = b^{i_2}(ab)^{j_2}a^{k_2} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = i_2, \\ j_1 \equiv j_2 \pmod{n}, \\ k_1 = k_2, \end{cases} \tag{C.3}$$

para quaisquer $i_1, i_2, k_1, k_2 \in \{0, 1\}$, $j_1, j_2 \geq 0$.

A pseudovariedade dos grupos Abelianos de expoente n denota-se por Ab_n.

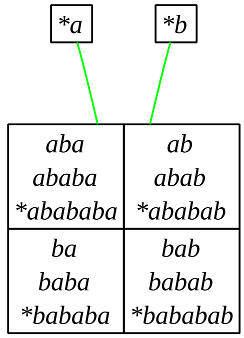


Figura C.1: Diagrama de Green do semigrupo $\mathscr{T}_3$.

Lema C.2. *O semigrupo* $\mathscr{T}_n$ *não pertence a* $\mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{Ab}_n$*, se* $n \geq 2$.

Demonstração. A pseudovariedade Ab_n satisfaz a pseudoidentidade $(x^n y^n)^2 = x^n y^n$. Portanto $\mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{Ab}_n$ satisfaz a pseudoidentidade $(x^n y^n)^\omega = (x^n y^n)^{\omega+1}$, pelo Lema C.1. Por outro lado, como em $\mathscr{T}_n$ temos

$$(a^n b^n)^\omega = (ab)^\omega = (ab)^n \neq (ab)^{n+1} = (ab)^{\omega+1} = (a^n b^n)^{\omega+1},$$

o semigrupo $\mathscr{T}_n$ não satisfaz a pseudoidentidade $(x^2 y^2)^\omega = (x^2 y^2)^{\omega+1}$. $\square$

Proposição C.3. *O semigrupo* $\mathscr{T}_n$ *pertence a* $(\mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{Ab}_n) * \mathsf{D}$*, para qualquer* $n \geq 1$.

Demonstração. Pelo Teorema do Atraso (Teorema 7.25), a proposição é equivalente à condição $(\mathscr{T}_n)_E \in \mathsf{g}(\mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{Ab}_n)$.

Consideremos o semigrupo

$$R_n = \langle x, y \mid x^2 = x, xy = y, yx = y, y^{n+1} = y \rangle$$

O diagrama de Green de R_3 encontra-se representado na Figura C.2. A $\mathcal{H}$-classe H de y em R_n é um grupo cíclico de ordem n.

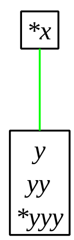


Figura C.2: Diagrama de Green do semigrupo R_3.

A função

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & R_n & \to & H \\ & x & \mapsto & y^n \\ & y^i & \mapsto & y^i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \end{array}$$

é um homomorfismo de R_n em H. Ou seja, a seguinte função é um morfismo relacional de R_n em H:

$$\begin{array}{rcl} R_n & \to & \mathcal{P}(H) \\ s & \mapsto & \{\varphi(s)\}. \end{array}$$

Como $\varphi^{-1}(y^n) = \{x, y^n\}$ é um subsemigrupo aperiódico de R_n, concluímos que $R_n \in \mathsf{A} \textcircled{m} \mathsf{Ab}_n$. Portanto, a proposição ficará demonstrada assim que provarmos que $(\mathscr{T}_n)_E$ é um divisor de R_n.

Para cada $u \in A^+$, vamos denotar por $|u|_a$ o número de vezes que a letra a surge em u. Dado $t \in \mathscr{T}_n$, se $u \in P$ é tal que $\overline{u} = t$, denotamos por $|t|_a$ o inteiro $|u|_a$. Dado um inteiro k, vamos representar por $[k]_n$ a classe de k módulo n.

Dados $u, v \in A^+$, seja

$$r(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in A^*a \text{ e } v \in aA^* \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por (C.3), temos

$$[|\overline{uv}|_a]_n = [|u|_a]_n + [|v|_a]_n - [r(u,v)]_n, \tag{C.4}$$

para quaisquer $u, v \in P$.

Consideremos o seguinte homomorfismo de grafos:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & (\mathscr{T}_n)_E & \to & S \\ & (a,a,a) & \mapsto & x, \\ & (b,b,b) & \mapsto & x, \\ & (v,u,w) & \mapsto & y^{n+|u|_a - r(w,w)}, \quad \text{se } u, v, w \in P,\ u \neq a, b. \end{array}$$

Sejam (v,u,w) e (w,u',w') duas arestas consecutivas de $(\mathscr{T}_n)_E$, onde $v, u, w, u', w \in P$. Se $u = a$ então $v = w = a$, pelo que $(v,u,w)(w,u',w') = (w,u',w')$ e

$$\varphi(v,u,w) \cdot \varphi(w,u',w') = x \cdot \varphi(w,u',w') = \varphi(w,u',w') = \varphi((v,u,w) \cdot (w,u',w')).$$

Do mesmo modo, se $u = b$ ou se $u' \in \{a, b\}$ então

$$\varphi(v,u,w) \cdot \varphi(w,u',w') = \varphi((v,u,w) \cdot (w,u',w')).$$

Suponhamos que $u, u' \notin \{a, b\}$. Então

$$\begin{aligned} \varphi(v,u,w) \cdot \varphi(w,u',w') &= y^{n+|u|_a - r(w,w)} y^{n+|u'|_a - r(w',w')} \\ &= y^{n+|u|_a - r(w,w) + |u'|_a - r(w',w')} \\ &= y^{n+|u|_a - r(u,u') + |u'|_a - r(w',w')} \quad (\text{pois } \overline{u} = \overline{uw} \text{ e } \overline{u'} = \overline{wu'}) \\ &= y^{n+|\overline{uu'}|_a - r(w',w')} \quad (\text{por (C.4)}) \\ &= \varphi(v, \overline{uu'}, w') \\ &= \varphi((v,u,w) \cdot (w,u',w')). \end{aligned}$$

Logo φ é um homomorfismo de semigrupóides.

Sejam (v,u,w) e (v,u',w) duas arestas co-terminais de $(\mathscr{T}_n)_E$ tais que $\varphi(v,u,w) = \varphi(v,u',w)$, onde $v, u, u', w \in P$. Então

$$y^{n+|u|_a - r(w,w)} = y^{n+|u'|_a - r(w,w)},$$

donde $|u|_a \equiv |u'|_a \pmod n$. Temos $a\mathscr{T}_n \cap b\mathscr{T}_n = \mathscr{T}_n a \cap \mathscr{T}_n b = \emptyset$, por (C.3). Logo, como $\overline{u} = \overline{vuw}$ e $\overline{u'} = \overline{vu'w}$, necessariamente $\mathrm{i}_1(u) = \mathrm{i}_1(u')$ e $\mathrm{t}_1(u) = \mathrm{t}_1(u')$. Então $u = u'$, por (C.3). Fica assim provado que φ é um homomorfismo fiel. Portanto $(\mathscr{T}_n)_E$ é um divisor de R_n. $\square$

Como consequência do Lema C.2 e da Proposição C.3, obtemos o seguinte resultado:

Corolário C.4. *A pseudovariedade* $\mathsf{A} ⓜ \mathsf{Ab}_n$ *é diferente de* $(\mathsf{A} ⓜ \mathsf{Ab}_n) * \mathsf{D}$*, se* $n \geq 2$*.*

Logo $\mathsf{A} ⓜ \mathsf{Ab}_n$ é um exemplo de uma solução da equação $\mathsf{V} = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{V}$ que não é solução da equação $\mathsf{V} = \mathsf{V} * \mathsf{D}$.

De seguida, vamos provar que existem outras soluções do sistema de equações (C.2) além das pseudovariedades da forma $\overline{\mathsf{H}}$ (em que H é uma pseudovariedade de grupos).

Consideremos a sucessão $(\mathsf{W}_{n,k})_k$ de pseudovariedades de semigrupos definida recursivamente do seguinte modo:

- $\mathsf{W}_{n,1} = \mathsf{Ab}_n$;
- $\mathsf{W}_{n,k} = \mathscr{L}(\mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_{n,k-1})$ se $k > 1$.

Lema C.5. *Seja* ρ *a pseudopalavra* $(z^\omega x)^n (z^\omega y)^n z^\omega$*. A pseudovariedade* $\mathsf{W}_{n,k}$ *satisfaz a pseudoidentidade* $\rho^\omega = \rho^{\omega+1}$*.*

Demonstração. Vamos demonstrar o lema por indução sobre k. Se S pertence a Ab_n então $\rho(s_1, s_2, s_3)$ é o elemento neutro de S, para quaisquer $s_1, s_2, s_3 \in S$. Portanto S satisfaz $\rho^\omega = \rho^{\omega+1}$. Fica assim demonstrado que $\mathsf{W}_{n,1}$ satisfaz $\rho^\omega = \rho^{\omega+1}$.

Suponhamos que $\mathsf{W}_{n,k}$ satisfaz $\rho^\omega = \rho^{\omega+1}$. Então $\mathsf{W}_{n,k}$ satisfaz $\rho^{\omega+1} = (\rho^{\omega+1})^2$. Logo $\mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_{n,k}$ satisfaz $(\rho^{\omega+1})^{\omega+1} = (\rho^{\omega+1})^\omega$, pelo Lema C.1. Se s é um elemento de um semigrupo compacto então $(s^{\omega+1})^{\omega+1} = s^{\omega+1}$ e $(s^{\omega+1})^\omega = s^\omega$. Portanto $\mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_{n,k}$ satisfaz $\rho^\omega = \rho^{\omega+1}$. Ou seja,

$$\mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_{n,k} \subseteq [\![((z^\omega x)^n (z^\omega y)^n z^\omega)^\omega = ((z^\omega x)^n (z^\omega y)^n z^\omega)^{\omega+1}]\!].$$

Ora facilmente se verifica que

$$[\![((z^\omega x)^n (z^\omega y)^n z^\omega)^\omega = ((z^\omega x)^n (z^\omega y)^n z^\omega)^{\omega+1}]\!] = \mathscr{L}[\![(x^n y^n)^\omega = (x^n y^n)^{\omega+1}]\!].$$

Logo $\mathsf{W}_{n,k+1} = \mathscr{L}(\mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_{n,k}) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{L}\,[\![(x^n y^n)^\omega = (x^n y^n)^{\omega+1}]\!])$. Ora $\mathscr{L}(\mathscr{L}\,\mathsf{V}) = \mathscr{L}\mathsf{V}$, para qualquer pseudovariedade V. Portanto

$$\mathsf{W}_{n,k+1} \subseteq \mathscr{L}[\![(x^n y^n)^\omega = (x^n y^n)^{\omega+1}]\!] = [\![((z^\omega x)^n (z^\omega y)^n z^\omega)^\omega = ((z^\omega x)^n (z^\omega y)^n z^\omega)^{\omega+1}]\!].$$

Ou seja, $\mathsf{W}_{n,k+1}$ satisfaz a pseudoidentidade $\rho^\omega = \rho^{\omega+1}$. $\square$

Como $\mathsf{W}_{n,1} \subseteq \mathsf{W}_{n,2} \subseteq \mathsf{W}_{n,3} \subseteq \mathsf{W}_{n,4} \subseteq \cdots$, a união $\bigcup_{k\geq 1} \mathsf{W}_{n,k}$ é uma pseudovariedade, que denotamos por W_n.

Observação C.6. O monóide $(\mathscr{T}_n)^1$ não pertence a W_n, se $n \geq 2$.

Justificação. Basta aplicar o Lema C.5, pois o monóide $(\mathscr{T}_n)^1$ não satisfaz a pseudoidentidade $\rho^{\omega+1} = \rho^\omega$. Com efeito, $\rho(a, b, 1) = ab$, e $(ab)^\omega \neq (ab)^{\omega+1}$. $\square$

Proposição C.7. *Tem-se* $\mathsf{W}_n = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_n = \mathscr{L}\,\mathsf{W}_n$*, e não existe nenhuma pseudovariedade de grupos* H *tal que* $\mathsf{W}_n = \overline{\mathsf{H}}$*, se* $n \geq 2$*.*

Demonstração. É claro que $\mathsf{W}_n \subseteq \mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_n \subseteq \mathscr{L}(\mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_n)$. Por outro lado,

$$\mathscr{L}(\mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_n) \subseteq \mathscr{L}\Big(\bigcup_{k\geq 1} \mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_{n,k}\Big) \subseteq \bigcup_{k\geq 1} \mathscr{L}(\mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_{n,k}) = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{W}_{n,k+1} = \mathsf{W}_n.$$

Logo $\mathsf{W}_n = \mathsf{A} ⓜ \mathsf{W}_n = \mathscr{L}\,\mathsf{W}_n$.

Suponhamos que H é uma pseudovariedade de grupos tal que $\mathsf{W}_n = \overline{\mathsf{H}}$. Então $\mathsf{Ab}_n \subseteq \overline{\mathsf{H}}$. É claro que tal implica $\overline{\mathsf{Ab}_n} \subseteq \overline{\mathsf{H}}$. O monóide $(\mathscr{T}_n)^1$ pertence a $\overline{\mathsf{Ab}_n}$, logo $(\mathscr{T}_n)^1$ pertence a $\overline{\mathsf{H}}$. Mas então a igualdade $\mathsf{W}_n = \overline{\mathsf{H}}$ contradiz a Observação C.6. $\square$

Bibliografia

[AA87] J. Almeida e A. Azevedo, *Implicit operations on certain classes of semigroups*, Semigroups and their applications (Dordrecht) (S. M. Goberstein e P. M. Higgins, eds.), D. Reidel, 1987, pp. 1–11.

[ACZ06] J. Almeida, J. C. Costa, e M. Zeitoun, *Complete reducibility of systems of equations with respect to* R, Pré-publicação CMUP 2006-31, Univ. Porto, 2006. Aparecerá na Portugaliae Mathematica.

[Alma] J. Almeida, *Comunicação pessoal*.

[Almb] ———, *Finite and profinite semigroups and symbolic dynamics*, Notas para um curso na Universidade Estatal dos Urais que decorreu durante o segundo semestre do ano lectivo 2004/2005.

[Alm89] ———, *Residually finite congruences and quasi-regular subsets in uniform algebras*, Portugal. Math. **46** (1989), 313–328.

[Alm95] ———, *Finite Semigroups and Universal Algebra*, World Scientific, Singapore, 1995, tradução inglesa.

[Alm02a] ———, *Dynamics of finite semigroups*, Semigroups, Algorithms, Automata and Languages (Singapore) (G. M. S. Gomes, J.-E. Pin, e P. V. Silva, eds.), World Scientific, 2002, pp. 269–292.

[Alm02b] ———, *Dynamics of implicit operations and tameness of pseudovarieties of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 387–411.

[Alm02c] ———, *Finite semigroups: an introduction to a unified theory of pseudovarieties*, Semigroups, Algorithms, Automata and Languages (Singapore) (G. M. S. Gomes, J.-E. Pin, e P. V. Silva, eds.), World Scientific, 2002, pp. 3–64.

[Alm03] ———, *Profinite structures and dynamics*, CIM Bulletin **14** (2003), 8–18.

[Alm05a] ———, *Profinite groups associated with weakly primitive substitutions*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika **11-3** (2005), Em Russo. A tradução inglesa aparecerá no J. Mathematical Sciences.

[Alm05b] ———, *Profinite semigroups and applications*, Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra (New York) (V. B. Kudryavtsev and I. G. Rosenberg, eds.), Springer, 2005, pp. 1–45.

[Ash87] C. J. Ash, *Finite semigroups with commuting idempotents*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A **43** (1987), 81–90.

[AT01] J. Almeida e P. G. Trotter, *The pseudoidentity problem and reducibility for completely regular semigroups*, Bull. Austral. Math. Soc. **63** (2001), 407–433.

[AV03] J. Almeida e M. V. Volkov, *Profinite identities for finite semigroups whose subgroups belong to a given pseudovariety*, J. Algebra Appl. **2** (2003), 137–163.

[AV06] ———, *Subword complexity of profinite words and subgroups of free profinite semigroups*, Int. J. Algebra and Computation **16** (2006), 221–258.

[AW98] J. Almeida and P. Weil, *Profinite categories and semidirect products*, J. Pure Appl. Algebra **123** (1998), 1–50.

[Bau65] G. Baumslag, *Residual nilpotence and relations in free groups*, J. Algebra **2** (1965), 271–282.

[Bea85] D. Beauquier, *Minimal automaton for a factorial transitive rational language*, Theoret. Comput. Sci. **67** (1985), 65–73.

[BFMS01] V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, e A. Siegel (eds.), *Introduction to finite automata and substitution dynamical systems*, 2001, http://iml.univ-mrs.fr/editions/preprint00/book/prebookdac.html.

[BFP05] M.-P. Béal, F. Fiorenzi, e D. Perrin, *A hierarchy of shift equivalent sofic shifts*, Theoret. Comput. Sci. **345** (2005), 190–205.

[BFP06] ———, *The syntactic graph of a sofic shift is invariant under shift equivalence*, Int. J. Algebra and Computation **16** (2006), no. 3, 443–460.

[BH86] F. Blanchard e G. Hansel, *Systèmes codés*, Theoret. Comput. Sci. **44** (1986), 17–49.

[BK88] M. Boyle e W. Krieger, *Almost markov and shift equivalent sofic systems*, Proceedings of Maryland Special Year in Dynamics 1986-87 (J. C. Alexander, ed.), Springer-Verlag Lect. Notes in Math., vol. 1342, 1988, pp. 33–93.

[BKM85] M. Boyle, B. Kitchens, e B. H. Marcus, *A note on minimal covers for sofic systems,*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 403–411.

[Boy00] M. Boyle, *Algebraic aspects of symbolic dynamics*, Topics in Symbolic Dynamics and Applications (Temuco, 1997) (Cambridge) (F. Blanchard, A. Maass, e A. Nogueira, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., no. 279, Cambridge Univ. Press, 2000.

[BP91] D. Beauquier e J. E. Pin, *Languages and scanners*, Theoret. Comput. Sci. **84** (1991), 3–21.

[BP02] M.-P. Béal e D. Perrin, *A weak equivalence between shifts of finite type*, Adv. in Appl. Math. **29** (2002), no. 2, 162–171.

[BPS85] J. Berstel, D. Perrin, e M. P. Schützenberger, *Theory of codes*, Academic Press, New York, 1985.

[BS73] J. A. Brzozowski e I. Simon, *Characterizations of locally testable events*, Discrete Math. **4** (1973), 243–271.

[BS81] S. Burris e H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Grad. Texts in Math., no. 78, Springer, Berlin, 1981.

[Béa93] M.-P. Béal, *Codage Symbolique*, Masson, 1993.

[CC06] L. Chaubard e A. Costa, *A new algebraic invariant for weak equivalence of sofic subshifts*, Pré-publicação 06-57, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 2006.

[CDFJ04] D. Clark, B. A. Davey, R. S. Freese, e M. Jackson, *Standard topological algebras: syntactic and principal congruences and profiniteness*, Algebra Universalis **52** (2004), 343–376.

[Cha03] L. Chaubard, *L'équivalence faible des systèmes sofiques*, Master's thesis, LIAFA, Université Paris VII, July 2003, Rapport de stage de DEA.

[CHK83] J. H. Carruth, J. A. Hildebrandt, e R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Marcel Dekker, New York, 1983.

[Cos99] J. C. Costa, *Free profinite R-trivial, locally idempotent and locally commutative semigroups*, Semigroup Forum **58** (1999), 423–444.

[Cos00] ______, *Some variations on the notion of locally testable language*, Proceedings of the International Conference on Semigroups (Singapore) (P. Smith, E. Giraldes, e P. Martins, eds.), World Scientific, 2000, pp. 54–68.

[Cos01] ______, *Free profinite locally idempotent and locally commutative semigroups*, J. Pure Appl. Algebra **163** (2001), 19–47.

[Cos02] ______, *Some pseudovariety joins involving locally trivial semigroups*, Semigroup Forum **64** (2002), 12–28.

[Cos03] A. Costa, *Relações entre a dinâmica de operadores implícitos e a estrutura de grupos finitos*, Master's thesis, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2003.

[Cos06] ______, *Conjugacy invariants of subshifts: an approach from profinite semigroup theory*, Int. J. Algebra Comput. **16** (2006), no. 4, 629–655.

[Cos07] ______, *Pseudovarieties defining classes of sofic subshifts closed under taking shift equivalent subshifts*, J. Pure Appl. Algebra **209** (2007), 517–530.

[CPS06] L. Chaubard, J.-E. Pin, e H. Straubing, *Actions, wreath products of $\mathcal{C}$-varieties and concatenation product*, Theoret. Comput. Sci. **356** (2006), 73–89.

[DS02] D. Damanik e B. Solomyak, *Some high-complexity hamiltonians with purely singular continuous spectrum*, Ann. Henri Poincare **3** (2002), 99–105.

[Eil76] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. B, Academic Press, New York, 1976.

[Eng89] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, no. 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989, Revised and completed edition.

[Fis75] R. Fischer, *Sofic systems and graphs*, Monatsh. Math. **80** (1975), 179–186.

[Fur67] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.

[GAP06] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*, 2006, (`http://www.gap-system.org`).

[Had98] J. Hadamard, *Les surfaces a courboures opposées et leurs lignes geodesiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–73.

[Hal74] P. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer, 1974.

[Hed69] G. A. Hedlund, *Endomorphims and automorphisms of the shift dynamical system*, Math. Syst. Theory **3** (1969), 320–375.

[HK67] F. Hahn e Y. Katznelson, *On the entropy of uniquely ergodic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **126** (1967), 335–360.

[HM38] G. A. Hedlund e M. Morse, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. **60** (1938), 815–866.

[HN88] T. Hamachi e M. Nasu, *Topological conjugacy for* 1*-block factor maps of subshifts and sofic covers*, Proceedings of Maryland Special Year in Dynamics 1986-87, Springer-Verlag Lect. Notes in Math., vol. 1342, 1988, pp. 251–260.

[Inc05] Wolfram Research Inc., *Mathematica, version 5.2*, Champaign, Illinois, 2005.

[IR82] K. Ireland e M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Grad. Texts in Math., no. 84, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Jon96a] Peter R. Jones, *Profinite categories, implicit operations and pseudovarieties of categories*, J. Pure Appl. Algebra **109** (1996), 61–95.

[Jon96b] N. Jonoska, *Constants in factorial and prolongable languages*, Pure Math. Appl. (1996), no. 7, 99–110.

[Jon96c] ______, *Sofic systems with synchronizing representations*, Theoret. Comput. Sci. (1996), no. 158, 81–115.

[Jon98] ______, *A conjugacy invariant for reducible sofic shifts and its semigroup characterizations*, Israel J. Math. (1998), no. 106, 221–249.

[Kle56] S. C. Kleene, *Representations of events in nerve nets and finite automata*, Automata Studies (Princeton, N.J.) (C. E. Shannon, ed.), vol. 3-41, Princeton University Press, 1956, reprinted in [Moo64].

[KR65] K. Krohn e J. Rhodes, *Algebraic theory of machines. I. Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines*, Trans. Amer. Math. Soc. **116** (1965), 450–464.

[KR68] ———, *Complexity of finite semigroups*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 128–160.

[KR79] K. H. Kim e F. W. Roush, *Some results on decidability of shift equivalence*, J. Comb. Inf. Syst. Sci. **4** (1979), 123–146.

[KR92] ———, *Williams conjecture is false for reducible subshifts*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 213–215.

[KR99] ———, *The Williams conjecture is false for irreducible subshifts*, Ann. of Math. **149** (1999), no. 2, 545–558.

[Kri84] W. Krieger, *On sofic systems. I*, Israel J. Math. **48** (1984), 305–330.

[Kun80] K. Kunen, *Set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[Lal79] G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial Applications*, Wiley, New York, 1979.

[LM96] Douglas Lind e Brian Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[Lot02] M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.

[Mac71] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Grad. Texts in Math., no. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

[McN74] R. McNaughton, *Algebraic decision procedures for local testability*, Math. Syst. Theory **8** (1974), 60–76.

[Mol95] V. A. Molchanov, *Nonstandard characterization of pseudovarieties*, Algebra Universalis **33** (1995), 533–547.

[Moo64] E. F. Moore (ed.), *Sequential Machines: Selected Papers*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1964.

[Myh57] J. Myhill, *Finite automata and the representation of events*, Tech. Report 57624, Wright Air Development Command, 1957.

[Nas85] M. Nasu, *An invariant for bounded-to-one factor maps between transitive sofic subshifts*, Ergodic Theory Dynamic. Systems **5** (1985), 89–105.

[Nas86] ———, *Topological conjugacy for sofic systems*, Ergodic Theory Dynamic. Systems **6** (1986), 265–280.

[Num57] K. Numakura, *Theorems on compact totally disconnetced semigroups and lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 623–626.

[Pin86] J.-E. Pin, *Varieties of Formal Languages*, Plenum, London, 1986, tradução inglesa.

[Pin95] ———, *Eilenberg's theorem for positive varieties of languages*, Russian Math. (Iz. VUZ) **39** (1995), 74–83.

[Pin97] ______, *Syntactic semigroups*, Handbook of Language Theory (G. Rozenberg e A. Salomaa, eds.), Springer, 1997.

[PP04] D. Perrin e J.-E. Pin, *Infinite Words*, Pure and Applied Mathematics, no. 141, Elsevier, London, 2004.

[PPW02] J.-E. Pin, A. Pinguet, e P. Weil, *Ordered categories and ordered semigroups*, Comm. Algebra **30** (2002), no. 12, 5651–5675.

[PW96a] J.-E. Pin e P. Weil, *Profinite semigroups, mal'cev products and identities*, J. Algebra **182** (1996), 604–626.

[PW96b] ______, *A Reiterman theorem for pseudovarieties of finite first-order structures*, Algebra Universalis **35** (1996), 577–595.

[PW97] ______, *Polynomial closure and unambiguous product*, Theory Comput. Syst. **30** (1997), 383–422.

[PW02] ______, *The wreath product principle for ordered semigroups*, Comm. Algebra **30** (2002), no. 12, 5677–5713.

[Rei82] J. Reiterman, *The Birkhoff theorem for finite algebras*, Algebra Universalis **14** (1982), 1–10.

[Rho68] J. Rhodes, *The fundamental lemma of complexity for arbitrary finite semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1104–1109.

[RS02] J. L. Rhodes e B. Steinberg, *Profinite semigroups, varieties, expansions and the structure of relatively free profinite semigroups*, Int. J. Algebra Comput. **11** (2002), 627–672.

[RS06] J. Rhodes e B. Steinberg, *Complexity pseudovarieties are not local; type II subsemigroups can fall arbitrarily in complexity*, Int. J. Algebra Comput. **16** (2006), no. 4, 739–748.

[RZ00] L. Ribes e P. A. Zalesskiĭ, *Profinite Groups*, Ergeb. Math. Grenzgebiete 3, no. 40, Springer, Berlin, 2000.

[Str79] H. Straubing, *Aperiodic homomorphisms and the concatenation product of recognizable sets*, J. Pure and Applied Algebra **15** (1979), 319–327.

[Str85] ______, *Finite semigroup varieties of the form* $V * D$, J. Pure and Applied Algebra **36** (1985), 53–94.

[SYT94] S. Satoh, K. Yama, e M. Tokizawa, *Semigroups of order 8*, Semigroup Forum **49** (1994), 7–30.

[Til87] B. Tilson, *Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids*, J. Pure e Applied Algebra **48** (1987), 83–198.

[TW85] D. Thérien e A. Weiss, *Graph congruences and wreath products*, J. Pure and Applied Algebra **36** (1985), 205–215.

[Wal82] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Grad. Texts in Math., no. 79, Springer-Verlag, New York, 1982, First softcover print 2000.

[Wei73] B. Weiss, *Subshifts of finite type and sofic systems*, Monats. Math. **77** (1973), 462–474.

[Wei02] P. Weil, *Profinite methods in semigroup theory*, Int. J. Algebra Comput. **12** (2002), 137–178.

[Wil70] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.

[Wil73] R. F. Williams, *Classification of subshifts of finite type*, Ann. of Math. **98** (1973), 120–153, Erratum, Ann. of Math. 99 (1974), 380-381.

[Zal72] Y. Zalcstein, *Locally testable languages*, J. Comput. Syst. Sci. **6** (1972), 151–167.

[Zal73] ———, *Locally testable semigroups*, Semigroup Forum **5** (1973), 216–227.

Índice alfabético

Índice notacional