

Álgebra I

Folha 2 : Subgrupos, Permutações e Isomorfismos

23. Prove que $\mathbb{Q}^+$ é um subgrupo de $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$.
24. Seja m um inteiro positivo e considere o conjunto $m\mathbb{Z} = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$ dos múltiplos inteiros de m . Prove que $m\mathbb{Z}$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.
25. Se m e n forem inteiros positivos, e se m for um factor de n , mostre que $\mathbb{Z}_n$ contém um subgrupo de ordem m . Será que $\mathbb{Z}_n$ contém mais do que um subgrupo de ordem m ?
26. Encontre o subgrupo de D_n gerado por r^2 e r^2s , distinguindo cuidadosamente os casos em que n é par daqueles em que é ímpar.
27. Sejam H um subgrupo de $(G, \cdot)$ e $x, y \in G$. Prove que se quaisquer dois elementos de $\{x, y, xy\}$ pertencem a H , então também o terceiro pertence a H .
28. Desenhe uma diagonal num hexágono regular. Identifique as simetrias do hexágono que fixam essa diagonal e aquelas que enviam a diagonal nela própria. Mostre que ambos os conjuntos de simetrias são subgrupos do grupo de todas as simetrias (no plano) do hexágono.
29. Determine os elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ que geram $\mathbb{Z}_{12}$. Responda à mesma questão para $\mathbb{Z}_5$ e para $\mathbb{Z}_9$ e procure encontrar um resultado geral a partir dos casos anteriores.
30. Prove que $\mathbb{Q}$ não é cíclico nem pode ser gerado por um número finito de elementos.
31. Determine o subgrupo de $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ gerado pelo conjunto $\{\frac{1}{p} : p \text{ é um inteiro primo}\}$.
32. Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Prove que o conjunto $\mathcal{C} = \{x \in G : xg = gx, \forall g \in G\}$, designado por *centro* de G , é um subgrupo abeliano de $(G, \cdot)$.
33. Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e S um subconjunto de G . Prove que o conjunto $\mathcal{N}(S) = \{g \in G : gS = Sg\}$, chamado *normalizador* de S , é um subgrupo de $(G, \cdot)$.
34. Sejam A e B subgrupos de um grupo $(G, \cdot)$.
 - (a) $A \cap B$ é um subgrupo de $(G, \cdot)$?
 - (b) Mostre que $A \cup B$ não é, em geral, um subgrupo de $(G, \cdot)$.
 - (c) Prove que $A \cup B$ é um subgrupo de $(G, \cdot)$ se e só se $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.
35. Prove que o conjunto dos números pares é o menor subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ que contém o número 2.
36. Construa a tabela multiplicativa do grupo S_3 .
37. Mostre que as permutações de S_9 que enviam os elementos do conjunto $\{2, 5, 7\}$ em elementos desse mesmo conjunto formam um subgrupo de S_9 . Qual é a ordem desse subgrupo?

38. Escreva cada um dos seguintes elementos de S_8 como produto de ciclos disjuntos e como produto de transposições:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $(4568)(1245)$

(d) $(624)(253)(876)(45)$

(e) $(123)(32)$

Quais destas permutações pertencem a A_8 ?

39. Mostre que S_n é gerado por $\{(12), (12\dots n)\}$

40. Seja H um subgrupo de S_n tal que H não está contido em A_n . Prove que exactamente metade dos elementos de H são permutações pares.

41. Mostre que, para n ímpar, $\{(123), (12\dots n)\}$ gera A_n e prove que, para n par, A_n é gerado por $\{(123), (23\dots n)\}$.

42. Prove que a ordem de um elemento $\alpha \in S_n$ é o menor múltiplo comum do comprimento dos ciclos obtidos quando α se escreve como produto de ciclos disjuntos.

43. Indique a ordem e a paridade da permutação $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)$ de S_6 .

44. Verifique que os números 1, 2, 4, 5, 7, 8 formam um grupo para a multiplicação módulo 9 e mostre que esse grupo é isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.

45. Mostre que o subgrupo $\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ de A_4 é isomorfo ao grupo de simetrias no plano de um tabuleiro de xadrez.

46. Seja G um grupo e $g \in G$. Mostre que a função $\varphi : G \rightarrow G$ definida por $\varphi(x) = gxg^{-1}$ é um isomorfismo. Determine esse isomorfismo quando G é igual a A_4 e g é permutação (123) .

47. H diz-se um *subgrupo próprio* do grupo G se H não for nem $\{e\}$ nem o grupo G . Encontre um grupo que seja isomorfo a um dos seus subgrupos próprios.

48. Mostre que dois grupos cíclicos da mesma ordem são isomorfos.

49. Prove que se G é um grupo não trivial sem subgrupos próprios, então G é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, para algum $p \in \mathbb{N}$ primo.

Cubo de Rubik:

<http://members.tripod.com/~dogschooll/rubikscube.html>

<http://www.schubart.net/rc/>

http://web.usna.navy.mil/~wdj/rubik_nts.htm