Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Ano lectivo 2005 / 2006

Álgebra I

Folha 3 : Permutações e Grupos de Matrizes

50. Determine o sinal da permutação (124)(357) de S_7.

51. Determine permutações X e Y tais que $XA = B = AY$ com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

52. Quais dos seguintes conjuntos de matrizes reais $n \times n$ formam um grupo para a multiplicação de matrizes?

    (a) As matrizes diagonais cujas entradas da diagonal são todas diferentes de zero.

    (b) As matrizes simétricas.

    (c) As matrizes invertíveis com entradas inteiras.

    (d) As matrizes invertíveis com entradas racionais.

53. Seja $(GL_n(\mathbb{R}), .)$ o grupo multiplicativo das matrizes não singulares de ordem n sobre $\mathbb{R}$. Averigue quais dos seguintes conjuntos são subgrupos de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

    (a) $X = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : AA^T = I\}$; (b) $Y = \{B \in GL_n(\mathbb{R}) : B = -B^T\}$;

    (c) Para n par, o conjunto $Z = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix} : m = \frac{n}{2} \text{ e } A_i \in GL_2(\mathbb{R}), \text{ para } i = 1, \ldots, m \right\}$.

54. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine o subgrupo de $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ gerado por A e B.

55. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

pertencente ao grupo $GL_2(\mathbb{R})$. Determine a ordem de A e interprete geometricamente este facto. Qual será a ordem da matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}?$$

56. Determine os elementos do subgrupo

$$< \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} > \text{ do grupo } GL_2(\mathbb{R}).$$

57. Prove que os elementos de $GL_n(\mathbb{R})$ que têm entradas inteiras e determinante igual a $+1$ ou -1 formam um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$. [Este subgrupo denomina-se $GL_n(\mathbb{Z})$]

58. Complete as entradas em

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & * \end{bmatrix}$$

de modo a que a matriz:

(a) seja um elemento de SO_3.

(b) seja um elemento de $O_3 - SO_3$.

59. Verifique que as matrizes unitárias $n \times n$ formam um grupo para a multiplicação por matrizes e que o determinante de cada uma dessas matrizes é um número complexo de módulo igual a 1.

60. Verifique que

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

é um elemento de SO_2. Que interpretação geométrica lhe pode dar?

61. Diga se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações:

(a) Uma matriz M diz-se ortogonal se M^tM for a matriz $-I$.

(b) O_n é subgrupo de SO_n.

(c) $GL_5(\mathbb{C})$ é um grupo abeliano.

(d) $GL_2(\mathbb{R})$ tem ordem infinita.

62. Determine o normalizador (ver exercício $n^o 33$) de

$$S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}$$

no grupo $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

Grupo Linear Geral:
http://mathworld.wolfram.com/GeneralLinearGroup.html