Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Ano lectivo 2005 / 2006

Álgebra I

Folha 5 : Partições, Teorema de Cauchy, Classes de Conjugação, Grupos quociente

79. Encontre um grupo G e um subgrupo H para o qual $R = \{(x, y)|xy \in H\}$ não é uma relação de equivalência em G.

80. Encontre um grupo G e um subgrupo H para o qual $R = \{(x, y)|xyx^{-1}y^{-1} \in H\}$ não é uma relação de equivalência em G.

81. Seja G um grupo finito e seja H um subgrupo de G que contém exactamente metade dos elementos de G. Mostre que $gH = Hg$ para todo o elemento g de G

    [*um subgrupo H nestas condições diz-se um* ***subgrupo normal*** *de G*].

82. Seja G um grupo e H um subrupo de G. Mostre que as classes laterais esquerdas de H em G formam uma partição de G.

83. Seja G um grupo abeliano de ordem igual a $p_1p_2...p_s$ (com p_1, p_2,..., p_s primos distintos). Mostre que G é um grupo cíclico.

84. Prove que um grupo de ordem 10 ou é isomorfo a $\mathbb{Z}_{10}$ ou isomorfo a D_5.

85. Verifique que todo o subgrupo próprio de $\mathbb{Q}$ é cíclico.

86. Determine as classes de conjugação de D_5.

87. Determine as classes de conjugação de S_4.

88. Sejam H e J subgrupos de G. Mostre que HJ é um subgrupo de G se e só se $HJ = JH$.

89. Seja H um subgrupo normal de G e seja J um sugrupo normal de H. Então, obviamente, J é um subgrupo de G. Encontre um exemplo que mostre que J não é necessariamente normal em G.

90. Sejam H, J subgrupos normais de um grupo G e com apenas um elemento em comum. Mostre que $xy = yx$ para todo o $x \in H$ e $y \in J$.

91. Seja H um subgrupo de índice finito de um grupo infinito G. Prove que G tem um subgrupo normal de índice finito que está contido em H.

92. Seja H um subgrupo normal cíclico de um grupo G. Mostre que qualquer subgrupo de H é também normal em G.

93. Mostre que se $Z(G)$ é o centro de G então $Z(G)$ é subgrupo normal de G.

94. Sejam M, N subgrupos normais de G. Mostre que $M \cap N$ é também subgrupo normal de G.

95. Seja K um subgrupo normal de $G \times H$ com apenas o elemento neutro em comum com $G \times \{e\}$ e com $\{e\} \times H$. Mostre que K é abeliano.

96. Mostre que todo o elemento do grupo quociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tem ordem finita mas que apenas um elemento de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tem ordem finita.

97. Um elemento de G da forma $xyx^{-1}y^{-1}$ é designado por *comutador*. Ao subgrupo gerado por todos os comutadores chama-se *subgrupo comutador* e denota-se por $[G, G]$. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

    (a) Cada comutador de S_n é uma permutação par.

    (b) O conjugado de um comutador é também um comutador.

    (c) Se o subgrupo comutador de um grupo G for igual a $\{e\}$ então G é abeliano.

Cauchy: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lagrange.html