

Álgebra I

Folha 6 : Teorema do Isomorfismo, Teoremas de Sylow, Grupos Abelianos Finitamente Gerados

98. Sejam $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$, $G' = (\mathbb{R}^+, \times)$ e $\phi : G \rightarrow G'$ tal que $\phi(a) = |a|$
- (a) Verifique que ϕ é um homomorfismo.
 - (b) Qual é núcleo K de ϕ ?
 - (c) G/K é isomorfo a G' ?
99. Utilize o 1º Teorema do Isomorfismo e a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, com $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$, para mostrar que $\mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
100. Determine a ordem de
- (a) Um subgrupo-3 de Sylow de um grupo de ordem 24.
 - (b) Um subgrupo-3 de Sylow de um grupo de ordem 18.
101. Um grupo de ordem 24 tem um ou três subgrupos-2 de Sylow. Justifique.
102. Determine dois subgrupos-2 de Sylow de S_4
103. Prove que um subgrupo- p de Sylow de um grupo finito G é normal se e só se é o único subgrupo- p de Sylow de G .
104. Mostre que todo o grupo de ordem 15 tem um subgrupo normal de ordem 5.
105. Mostre que um grupo de ordem 126 tem de conter um subgrupo normal de ordem 7.
106. Sejam p e q números primos. Mostre que se p não for congruente com 1 módulo q então todo o grupo de ordem pq é cíclico.
107. Averigue se são verdadeiras as seguintes afirmações:
- (a) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_{12}$
 - (b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_{18}$
 - (c) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$ e a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30}$
108. Encontre os coeficientes de torsão dos seguintes grupos:
- (a) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}$
 - (b) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}$
 - (c) $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42}$
109. Seja G um grupo cíclico de ordem 24. Determine todos os pares de subgrupos H e K de G tais que $G \cong H \times K$.

110. Indique o número de grupos abelianos, não isomorfos, com ordem 45.
111. Prove que se $\mathbb{Z}^s$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^t$ então $s = t$.
112. Seja G um grupo abeliano de ordem 100. Mostre que G tem de conter um elemento de ordem 10. Quais são os coeficientes de torsão de G se nenhum elemento de G tiver ordem maior do que 10?
113. Prove que um subgrupo finitamente gerado (não trivial) de $\mathbb{R} - \{0\}$ tem de ser isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}^s$ ou $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$, para algum inteiro positivo s .
-