Teoria de Ramsey

Dado um grafo G, um seu subgrafo é nada mais do que um grafo cujos vértices formam um subconjunto do conjunto dos vértices de G e cujas arestas formam igualmente um subconjunto do conjunto das arestas de G.

Dado um grafo completo K_n considerar uma sua coloração a duas cores, significa colorir de azul ou verde cada uma das suas arestas. Sejam r e s dois naturais maiores ou iguais a 2. Dizemos que a propriedade $\mathrm{Pint}(r, s)$ se verifica numa coloração de K_n se uma de duas coisas acontece: ou existe um subgrafo completo K_r totalmente azul ou existe um subgrafo completo K_s totalmente verde.

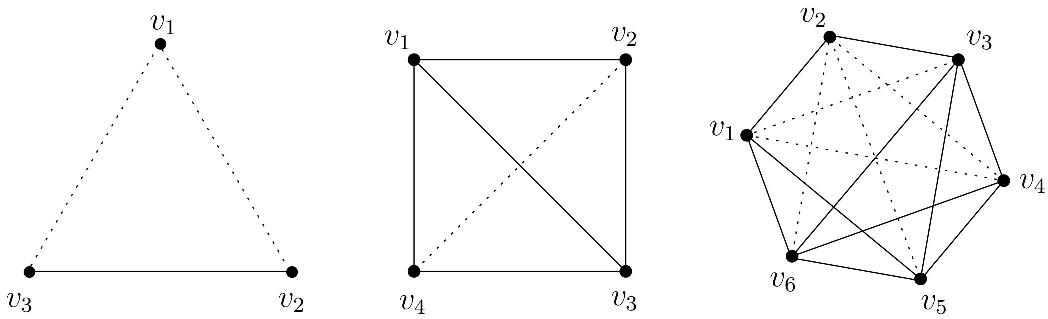

Figura 3: Grafos em azul e verde

Nesta figura usamos uma linha sólida para a cor azul e uma linha tracejada para a cor verde. Na coloração de K_3 verifica-se $\mathrm{Pint}(2, 3)$, pois existe um subgrafo K_2 azul. Também se verifica $\mathrm{Pint}(3, 2)$ pois existe um subgrafo K_2 verde; (também existem triângulos azuis). No grafo K_4, verifica-se $\mathrm{Pint}(3, 3)$ e $\mathrm{Pint}(3, 2)$ pois existe pelo menos um triângulo azul. Finalmente no grafo K_6 verifica-se $\mathrm{Pint}(4, s)$ para qualquer s pois existe um subgrafo K_4 azul. Uma vez que não existem subgrafos K_5 azuis nem subgrafos K_3 verdes $\mathrm{Pint}(5, 3)$ não se verifica e logo $\mathrm{Pint}(5, 4)$ e $\mathrm{Pint}(5, 5)$ também não. De facto, a verde, o único subgrafo completo que há é K_2. Logo, é fácil concluir que se verificam $\mathrm{Pint}(r, 2)$ para qualquer r.

As colorações de grafos são motivadas por situações do tipo da seguinte. Suponhamos que numa festa existem n pessoas. Para cada par de pessoas podemos perguntar se elas se conhecem ou não. Se considerarmos um grafo com n vértices (um vértice para cada pessoa) dizer que se pode fazer aquela pergunta para qualquer par de pessoas e que a resposta é uma de duas possíveis (sim ou não) significa que esse grafo é completo e que estamos a colorir cada aresta com uma de duas cores, por exemplo, azul para “sim” e verde para “não”. A título de exemplo, na festa que corresponderia à coloração de

K_3 no lado esquerdo da Figura 3, v_2 e v_3 conhecem-se mas v_1 e v_2 não se conhecem nem v_1 e v_3. Mais adiante veremos que é possível generalizar a teoria a colorações a mais do que duas cores, e portanto é possível concretizá-la em contextos para os quais a resposta a uma determinada pergunta pode tomar mais do que duas formas.

Sejam r e s dois naturais maiores ou iguais a 2. O número de Ramsey $R(r, s)$ é o mínimo de vértices n para o qual qualquer coloração do grafo K_n verifica $\mathrm{Pint}(r, s)$.

É fácil constatar que se $\mathrm{Pint}(r, s)$ se verifica qualquer coloração de K_n então $\mathrm{Pint}(r, s)$ verifica-se para qualquer coloração de K_m para qualquer $m \geq n$ (simplesmente tomamos um subgrafo K_n de K_m qualquer.) Mais adiante, mostraremos que os números de Ramsey estão bem definidos, i.e., que existe sempre o mínimo invocado na nossa definição. Nota que se nalguma coloração de K_n a propriedade $\mathrm{Pint}(r, s)$ não se verfica, então necessariamente $R(r, s) \geq n$. Por exemplo, da coloração de K_6 na Figura 3 deduz-se que $R(5, 4) \geq 4$.

EXERCÍCIOS

(5) Mostra que $R(r, s) = R(s, r)$.

(6) Mostra que $R(s, r) \geq R(s - 1, r)$

(7) Mostra que se $s' \leq s$ e $r' \leq r$ então $R(s, r) \geq R(s', r')$.

(8) Mostra que $R(2, r) = r$.

(9) Mostra que $R(3, 3) \geq 6$, construindo uma coloração em K_5 que não contém nenhum subgrafo completo K_3 totalmente azul ou verde.