Mostremos que $R(3,3) \leq 6$.

Temos de mostrar que em qualquer grafo completo K_6 verifica-se $\mathrm{Pint}(3,3)$. Por outras palavras, temos de mostrar que ou existe um triângulo azul ou existe um triângulo verde. Como em K_6 cada vértice tem grau 5, isto é, incidem sobre ele 5 arestas, pelo menos 3 destas arestas são da mesma cor. Seja v_1 um vértice qualquer. Suponhamos, sem perda de generalidade, que sobre v_1 incidem pelo menos 3 arestas azuis. (Esta suposição serve apenas para mantermos a indentificação que fizemos quando dissemos que a linha contínua estava para o azul e a tracejada para o verde.) O raciocínio (ou truque!) mais importante envolvido no cálculo dos números de Ramsey vai ser explicado a seguir. É importante que o percebas bem, memorizes e o apliques nos exercícios que propomos, sempre que isso for possível.

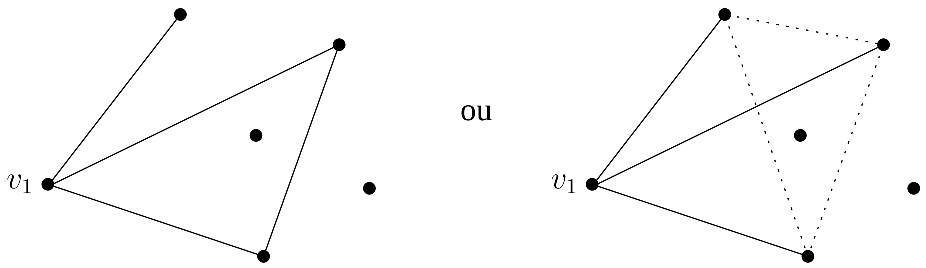

Figura 4: O único truque na teoria de Ramsey!

Tudo quanto sabemos é que v_1 se liga a três outros vértices por arestas azuis. (Pode suceceder que haja mais arestas azuis a incidir sobre v_1 e também pode suceder que não haja mais nenhuma.) O truque é o seguinte: uma de duas coisas tem de acontecer; ou uma das arestas entre os vértices que se ligam a v_1 por aquelas arestas azuis é azul e completa um triângulo azul com duas das arestas azuis a incidir sobre v_1 (V. lado esquerdo da Figura 4) ou todas as arestas entre aqueles vértices são verdes (V. lado direito da Figura 4) e tal quer dizer que elas formam um triângulo verde. ▲

No Exercício 9 mostraste que $R(3,3) \geq 6$ exibindo uma coloração de K_5 que não contém nenhum triângulo de arestas de uma única cor. Como acabámos de demonstrar que $R(3,3) \leq 6$, podemos pois concluir que $R(3,3) = 6$. Este é o primeiro número de Ramsey, não-trivial, que se pode calcular. A partir daqui, o cálculo de $R(r,s)$ torna-se muito difícil. O número de Ramsey, não-trivial, seguinte é $R(4,4) = 18$. O que é importante é que o truque que te acabámos de ensinar é útil em muitas situações, em particular, em estimativas de $R(r,s)$. Ele é também facilmente generalizável para colorações de grafos completos com mais que duas cores.

EXERCÍCIOS

(10) Mostra que $R(3,4) \leq 9$.

(11) Mostra que $R(5,3) \leq 14$.

(12) [**IMO 1964**] Seja K_{17} um grafo completo de 17 vértices. Mostra que em qualquer coloração de três cores (e.g. azul, verde e amarelo) existe um triângulo cujas arestas têm todas a mesma cor.

(13) Seja n um natural maior ou igual a 2. Sabendo que $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots$, mostra que $(n+1)\lfloor en! \rfloor = \lfloor e(n+1)! \rfloor - 1$. [Este exercício serve apenas para separar um pormenor técnico da resolução do exercício que segue. No caso de não estares familiarizado com somas infinitas podes, tão somente, usá-lo.]

(14) Seja k um natural maior ou igual a 2 e seja $n = \lfloor ek! \rfloor + 1$. Mostra que em qualquer grafo completo de n vértices, K_n, colorido com k cores existe um triângulo cujas arestas têm todas a mesma cor. [Trata-se de uma generalização do problema da IMO 1964 acima. Um à-parte: consegues arranjar nomes de 100 cores diferentes??]