Como se pode constatar do cálculo de $R(3,3)$, o cálculo dos números de Ramsey compreende dois estágios. Numa primeira aproximação tenta-se calcular um limite superior para $R(r,s)$ (foi o que fizemos ao mostrar que $R(3,3) \leq 6$) numa segunda fase, quando já estamos saturados de tentar baixar este limite superior, determina-se uma coloração do grafo completo de número de vértices imediatamente inferior ao limite encontrado, para a qual não se verifica $\mathrm{Pint}(r,s)$ (foi o que fizeste ao resolver os Exercício 9). Do ponto de vista do nosso tratamento da teoria, estes dois estágios são de natureza completamente diferente. Para o primeiro (lembra-te!) ensinámos-te "o" truque. Por outras palavras, existe, ainda que não bem definido, um plano de ataque. Já no outro estágio, que corresponde a determinar um limite inferior (de facto, o que diz o Exercício 9 é que $R(3,3) \geq 5$) não falámos de nenhuma técnica ou truque aplicável. Nem o vamos fazer! Este panorama coincide com estado presente da investigação nesta área da teoria dos grafos. Ganha um prémio de 100 USD quem conseguir arranjar uma demonstração construtiva de que $R(k,k) > (1+c)^k$, para algum $c > 0$. [Cf. pág. 11 de *Chung, Fan; Graham, Ron; "Erdős on Graphs, His Legacy of Unsolved Problems"*.] Existem demonstrações de que $R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}$; uma delas usa a bela saída: "pintem-se *aleatoriamente* as arestas de uma de duas cores com probabilidade $\frac{1}{2}\ldots$"!! Este método (não-construtivo, pois dá apenas uma prova da existência) deve-se ao matemático Paul Erdős (Erdős Pál, em húngaro).

EXERCÍCIOS

(15) Mostra que se r e s são dois naturais maiores ou iguais a 2 então: $R(r,s) \leq \binom{r+s-2}{r-1}$. [Sugestão: Indução matemática.]

(16) Neste exercício far-se-á a demonstração de que $R(r,r) > 2^{\frac{r}{2}}$. A ideia é seguir a demonstração de Erdős, que usa um argumento de contagem.

(a) Começa por mostrar que a fórmula é válida para $k = 2$ e $k = 3$. [Este é um passo necessário na lógica da demonstação que estamos a esboçar, mas também pode ser um bom indicador do quão pouco preciso pode ser o limite $2^{\frac{r}{2}}$.]

(b) Mostra que o número de colorações a duas cores de K_n é $2^{\binom{n}{2}}$.

(c) Mostra que o número de colorações que contêm um subgrafo completo K_r cujas arestas têm a mesma cor é menor ou igual a $2\binom{n}{r}2^{\binom{n}{2}-\binom{r}{2}}$.

(d) Mostra que se $2 \leq n \leq 2^{\frac{r}{2}}$ (tal n existe sempre pois $k \geq 4$) então $2\binom{n}{r}2^{\binom{n}{2}-\binom{r}{2}} < 2^{\binom{n}{2}}$. Conclui que num grafo completo K_n, para um natural que satisfaça a $2 \leq n \leq 2^{\frac{r}{2}}$ existe pelo menos uma coloração que não contém nenhum subgrafo K_r cujas arestas sejam de uma só cor; portanto, $R(r,r) > 2^{\frac{r}{2}}$.

(17) Pensando no problema anterior, consideremos o caso $r = 4$. Queremos limitar inferiormente o número $R(4,4)$. O método ali descrito diz para considerarmos um grafo completo com $2^{\frac{r}{2}} = 4$ vértices. Considera pois, todas as colorações de duas cores possíveis do grafo K_4. Conta aquelas

que contêm um subgrafo K_4 (!) cujas arestas são de uma única cor. No exercício anterior demos a estimativa que há no máximo $2\binom{4}{4}2^{\frac{4}{2}-\frac{4}{2}} = 2$. Que tal, hem?

(18) No entanto, a estimativa para para o número de colorações de K_4 contendo um subgrafo K_3 com arestas de uma só cor é 64, exactamente o número total de colorações de um grafo completo K_4; logo a estimatativa está bem longe da verdade. Ora conta o número de colorações com um triângulo de uma só cor. . . [A mim, deu 42.]