

Ordenando pessoas



Caríssimos confrades delficos. Um nova edição da nossa venerada liga se inicia, com novos desafios, matemática interessante, problemas arbitrários e tempos excessivos de correção (tudo como sempre). A todos aqueles que vão pela primeira vez embarcar nesta viagem, votos sinceros de boas vindas. A todos os veteranos de batalhas passadas, já sabem com o que contar, esperemos que honrem o bom nome e a extensa história das vossas recém criadas equipas. A todos, calorosas saudações delficas, e bom trabalho!

Parte I

Em que os nossos heróis se colocam no papel de burocratas profissionais, ordenando, reordenando, e baralhando arbitrariamente filas de pessoas (todas com o devido distanciamento, e cumprindo todas as indicações da DGS).

1. Sete pessoas estão numa fila. A certa altura, fartos de estar sempre atrás das mesmas pessoas, decidem reorganizar-se de forma a que ninguém tenha imediatamente à frente a mesma pessoa que tinha antes. De quantas formas o podem fazer?
2. Seis pessoas estão numa fila. De quantas formas podemos reordená-las de forma a que, para $k = 1, \dots, 5$, o conjunto das k primeiras pessoas seja diferente das primeiras k pessoas da ordem original?
3. Oito pessoas de alturas diferentes estão numa fila. Queremos reordená-las por ordem crescente de alturas, mas podemos apenas realizar dois tipos de operações: Chamar a última pessoa para o início da fila ou chamar a terceira pessoa para o início da fila. Mostra que independentemente da ordenação inicial podemos sempre colocá-la na forma pretendida com uma sequência bem escolhida destas operações.
4. Temos agora n pessoas ordenadas por ordem crescente de alturas. Infelizmente agora temos de novo restrições nos movimentos possíveis. Um movimento admissível é escolher um certo número de pares disjuntos de pessoas e fazer as pessoas de cada par trocarem de posição entre si. Por exemplo

$$A B C D E \longrightarrow B A E D C$$

é admissível. Mostra que para qualquer n podemos reordenar as pessoas com sucesso com recurso a somente dois movimentos admissíveis, se:

- (a) queremos reordenar as pessoas por ordem decrescente.
- (b) queremos reordenar as pessoas de modo a que em primeiro lugar fique a pessoa mais alta, e depois as restantes pessoas ficam ordenadas por ordem crescente.

Parte II

Em que os nossos heróis, felizes com o trabalho realizado até então, continuam alegremente a sua tarefa de ordenar pessoas segundo regras arbitrariamente complicadas e pouco claras, mas onde agora as pessoas têm camisolas numeradas, só para alegrar as coisas um bocadinho.

5. Numa corrida participam 14 atletas, com camisolas numeradas de 1 a 14. Não há empates e apenas um dos atletas termina numa posição maior que o número que tem na camisola. De quantas formas pode isto acontecer?
6. Temos agora n pessoas de novo, mas vestidas com camisolas vermelhas numeradas de 0 a $n - 1$. Ordenamo-las numa fila. De seguida a pessoa na posição i subtrai i ao valor que tem na camisola e calcula o valor absoluto desse número, vestindo de seguida uma camisola azul com o número final obtido. Miraculosamente obteve-se após esta operação uma nova fila em que todas as pessoas tinham camisolas diferentes numeradas de 0 a $n - 1$. Para que valores de n é isto possível?
7. Temos agora uma fila de 100 pessoas, com camisolas numeradas de 1 a 100. Começando do zero, as pessoas vão entrando uma a uma numa sala, e vai-se adicionando o número da camisola ao total. Sempre que a soma parcial for um quadrado perfeito toca um sino. Qual o máximo de vezes que o sino pode tocar?