Hoje vão de Herão a Napoleão

A Liga Delfos é uma actividade ***farol*** *do Projecto Delfos. A palavra farol tem a sua raiz no nome da ilha de* ***Pharos****, que albergava uma das sete maravilhas do mundo antigo, o farol da grandiosa capital de Cleópatra, a Alexandria do Egipto. E como estamos no ano do vigésimo aniversário do Delfos, deduzimos (de forma mui forçada, porventura) que é mais oportuno do que é habitual lembrarmos alguns matemáticos ligados a Alexandria. Invoquemos os nomes dos helenísticos Herão e Ptolomeu de Alexandria...*

O farol de Alexandria

Teorema de Herão. *Consideremos um triângulo de lados a, b, c, e denotemos por s o* semiperímetro $\frac{a+b+c}{2}$ *do triângulo. A área do triângulo é $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.*

1. (a) Provem o Teorema de Herão.
   (b) Determinem a maior área possível dum triângulo $[ABC]$ tal que $|AB| = 5$ e $|AC| + |BC| = 7$.

2. Um triângulo de comprimentos inteiros tem uma circunferência inscrita de raio 1. Determinem os comprimentos do triângulo.

Teorema de Ptolomeu. *Se $[ABCD]$ é um quadrilátero cíclico, então*

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|.$$

3. (a) Provem o Teorema de Ptolomeu.
   (b) Mostrem que se $[ABCDEFG]$ é um heptágono regular, então $|AC|^{-1} + |AD|^{-1} = |AB|^{-1}$.

4. No triângulo $[ABC]$, os pontos E, F estão nos lados $[AC]$ e $[AB]$, respectivamente, com BE e CF bissectando $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente. Os pontos P e Q estão no arco menor $\overset{\frown}{AC}$ da circunferência circunscrita de $[ABC]$ de tal modo que $AC//PQ$ e $BQ//EF$. Mostrem que $|PA| + |PB| = |PC|$.

5. Dado um paralelogramo $[ABCD]$ com centro S, denotem por O o incentro do triângulo $[ABD]$ e por T o ponto de contacto do incentro do triângulo $[ABD]$ com a diagonal BD. Provem que as rectas OS e CT são paralelas.

6. Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo tendo O como circuncentro. A recta AO intersecta BC em D. Os pontos E e F pertencem respectivamente a $[AB]$ e $[AC]$ e são tais que A, E, D e F são concíclicos. Provem que o comprimento da projecção do segmento $[EF]$ no lado $[BC]$ não depende das posições de E e F.

Continuemos agora com Napoleão Bonaparte. Sim, Napoleão esteve em Alexandria do Egipto! O Ptolomeu matemático não deve ser confundido com nenhum dos soberanos do Egipto helenístico que reinaram com o nome de Ptolomeu. Porém, o teorema seguinte foi mesmo frequentemente atribuído a Napoleão Bonaparte. Sabe-se, sem margem para dúvidas, que o Imperador dos Franceses era um entusiasta da Matemática.

Teorema de Napoleão. *Sobre os lados do triângulo $[ABC]$, e exteriores a ele, constroem-se três triângulos equiláteros $[ABF]$, $[ACE]$ e $[CBD]$. Então o triângulo formado pelos circuncentros desses três triângulos é equilátero.*

Napoleão Bonaparte (1769-1821)

7. (a) Provem o Teorema de Napoleão.
   (b) Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em A. Na hipotenusa BC constrói-se no exterior um triângulo equilátero $[BCD]$. Provem que os comprimentos dos segmentos $[AB]$, $[AC]$ e $[AD]$ não podem ser todos racionais.