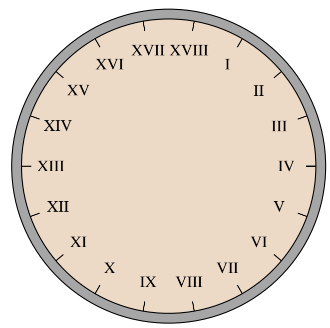
A grande comemoração dos 20 anos

Após mais uma grandiosa final das OPM (que este ano foi comemorada em formato XL), eis que o espírito olímpico chega à Liga Delfos. Assim, e para comemorar em grande os 20 anos de existência do Projeto Delfos, vamos resolver problemas das vigésimas edições de várias competições olímpicas à volta do mundo. Não sem antes desejar as boas-vindas aos novos délficos.

1. Com as *Olímpiadas de Maio* à porta, começamos por resolver um exercício desta competição. Trata-se de uma competição internacional, realizada anualmente em maio, e em que participam alunos da América Latina, Espanha e Portugal. Teve a sua primeira edição em 1995, embora Portugal apenas participe desde 2001. Na sua vigésima edição, foi proposta uma pequena variação do seguinte problema:

   Numa escavação na Roma Antiga encontrou-se um relógio pouco habitual com 18 divisões marcadas com números romanos, como mostra a figura.
   Infelizmente o relógio estava partido em 5 pedaços. A soma dos números em cada pedaço era a mesma.

   (a) *Qual era a soma dos números em cada um dos pedaços?*
   (b) *Mostra que esta informação não é suficiente para determinar de que forma os números ficaram distribuídos pelos cinco pedaços.*

2. Foi na Hungria que se realizou pela primeira vez, em 1894, uma competição olímpica de matemática, a *Eötvös Mathematical Competition*. Esta competição deve o seu nome ao físico Loránd Eötvös, que fundou, em 1885, a Sociedade Húngara de Matemática (renomeada, em 1891, para Sociedade Húngara de Matemática e Física). O segundo problema que vos propomos, apareceu na vigésima edição desta competição, realizada em 1913.

   Mostra que, para todo o $n > 2$, se tem $(1 \times 2 \times \cdots \times n)^2 > n^n$.

3. Por terras lusas, a tradição olímpica é um pouco mais recente. Em 1980, os matemáticos e membros da Sociedade Portuguesa de Matemática António Leal Duarte, Jaime Carvalho e Silva e João Filipe Queiró tomaram a iniciativa de organizar as chamadas *Mini-Olimpíadas de Matemática*. Em 1983, a competição foi realizada a nível nacional com o nome de *Olimpíadas Nacionais de Matemática*, tendo passado a chamar-se *Olimpíadas Portuguesas de Matemática* (OPM) em 1999. O problema que se segue foi proposto aos alunos da Categoria B no segundo dia da final nacional das XX OPM, em 2002.

   No dia 6 de Março de 2002 decorreram em Coimbra as comemorações dos 500 anos do nascimento do matemático Pedro Nunes. Nessa manhã entraram apenas dez pessoas na *livraria Viva a Ciência. Cada uma destas pessoas comprou exactamente 3 livros diferentes. Além disso, quaisquer duas pessoas compraram pelo menos um exemplar de um mesmo livro. As Aventuras Matemáticas de Pedro Nunes foi um dos livros que obteve o maior número de vendas nessa manhã. Qual é o menor valor que este número pode ter tomado?*

4. As *Olimpíadas Internacionais de Matemática*, também conhecidas por *IMO* (acrónimo para *International Mathematical Olympiad*), são a mais conhecida e prestigiada competição internacional de matemática, e foram as primeiras olimpíadas de ciência realizadas a um nível internacional. A sua primeira edição realizou-se na Roménia e, curiosamente, foi também na Roménia que, em 1978, se realizou a vigésima. A Roménia é ainda o país de origem de Ciprian Manolescu - o único aluno a ter conseguido por três vezes obter pontuação total (em todas as suas participações). Deixamo-vos uma pequena variação de um problema proposto na fase nacional da vigésima edição das *Olímpiadas Nacionais de Matemática da Roménia*, realizadas em 1969.

   Considera o polinómio de coeficientes inteiros $p(x) = x^5 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$, cujas raízes são inteiras. Mostra que se a raiz r divide outras três raízes do polinómio, então r^i divide a_i, para $i = 2, 3, 4, 5$.

5. Fazemos agora uma pequena homenagem à Bulgária, por ser o país que, até à data, que teve mais alunos a participar nas IMO: um total de 414! O próximo problema que vos propomos, apareceu, em 1972, no segundo dia da final nacional da vigésima edição das *Olímpiadas de Matemática da Bulgária*.

   Qual é o número máximo de pontos que se podem desenhar num círculo de raio R, de modo a que a distância entre quaisquer dois pontos seja maior do que $R\sqrt{2}$?

6. Na vigésima edição das IMO, foi a Roménia que conseguiu obter o maior número de pontos e de medalhas, seguida pelos Estados Unidos. O Vietname destacou-se por ter obtido o maior número de medalhas de bronze. Na vigésima edição das suas olimpíadas nacionais, realizadas em 1982, podemos encontrar o seguinte problema:

   Num triângulo ABC, considera pontos A' do mesmo lado de BC que A, e A'' no lado oposto, de tal forma que os triângulos $A'BC$ e $A''BC$ são equiláteros. Sejam B', B'', C', e C'' definidos de forma análoga. Sejam Δ e Δ' os triângulos cujos vértices são os centros dos triângulos equiláteros $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, e $A''BC$, $B''CA$, $C''AB$, respectivamente. Mostra que área do triângulo ABC é a diferença das áreas dos triângulos Δ e Δ'.

7. Para terminar em grande, e como não poderia deixar de ser, propomo-vos resolver um problema da vigésima edição das IMO.

   Seja $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ uma função injectiva. Mostra que, para todo o $n \geq 1$, se tem $\frac{f(1)}{1^2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(n)}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.