

Sobre galinhas e homens (mas sobretudo galinhas)



*Bem vindos ao maravilhoso mundo do *Gallus Domesticus*, o mais extraordinário, superlativo e fascinante animal do universo, pelo menos durante as próximas duas horas e meia. Sabiam que existem cerca de 26 mil milhões de galinhas no mundo? Sabiam que as galinhas foram domesticadas pela primeira vez há cerca de 8000 anos? Sabiam que um estudo de 2008 na Science mostrou que as galinhas são o parente vivo mais próximo do tiranossauro? Agora que sabem, vamos prontamente esquecer tudo isso e mergulhar em mais uma jornada da nossa excelsa Liga, uma jornada galinácea em que, como sempre, não aprenderemos nada com quaisquer implicações no mundo real, a não ser por engano.*

Parte I (e única)

Vamos falar no que se segue de bandos de galinhas (ou de grafos completos orientados, também conhecidos por torneios, mas é mais engraçado falar de galinhas). No nosso hipotético bando de galinhas há uma hierarquia clara: entre cada duas galinhas, ou A bica B , ou B bica A . É o mundo cruel dos animais que em nada se assemelha à paz e harmonia humanas. No que se segue vamos estudar o comportamento social dos bandos de galinhas, usando para isso este nosso modelo rigoroso e extremamente realista.

1. Prova que num qualquer bando de galinhas, podemos sempre ordenar todas as galinhas em fila de forma a que cada galinha bique a galinha que está à sua frente.
2. Dizemos que uma galinha A é uma Rainha Galinha se e só se para toda a outra galinha B , ou A bica B ou A bica uma galinha C que por sua vez bica B . Mostra que todos os bandos têm pelo menos uma Rainha Galinha.

Sugestão: Seja $s(i)$ o número de galinhas que a galinha i bica, então...

3. Uma galinha diz-se uma Imperatriz Galinha se bicar todas as outras galinhas. Mostra que um bando tem uma Imperatriz Galinha se e só se tiver uma só Rainha Galinha.
4. Para que valores de $n \geq 3$ existem bandos de n galinhas em que todas são Rainhas?

Os problemas 2, 3 e 4 são parte do corpus dos chamados *King Chicken Theorems*. Uma leitura recomendada é *The King Chicken Theorems* por Stephen B. Maurer, em *Mathematics Magazine*, Vol. 53, No. 2 (Mar., 1980), pp. 67-80. Encontram-no facilmente na internet. Claramente foi este artigo que inspirou esta liga, mas estão lá muitos mais resultados que os que aqui foram revisitados, vale a pena dar uma espreitadela.

5. Um bando de galinhas tem uma propriedade interessante. Existe um número inteiro k positivo tal que para quaisquer k delas há uma que as bica todas. Mais ainda sabemos que o bando tem o menor número possível de galinhas de qualquer bando com esta propriedade para esse k . Mostra que é possível organizar todas as galinhas do bando num círculo tal que cada galinha tenha por vizinhas uma que a bica e uma que é bicada por ela.

6. Num bando de n galinhas, a cada dia um grupo vai para o poleiro, e o resto para o chão, e apenas se permite às galinhas do poleiro bicarem as que estão no chão, não podendo haver bicadas dentro de cada grupo nem do chão para o poleiro. Qual o número mínimo de dias necessários para que todas as bicadas devidas possam ser dadas?

Nota: Este mínimo é entre todas as hierarquias possíveis dentro do bando e entre todas as distribuições possíveis de galinhas no poleiro...

7. Um grupo de quatro galinhas num bando diz-se tolo se três delas se bicarem em ciclo (A bica B bica C bica A) e as três bicarem a quarta. Suponhamos que não há grupos tolos num bando com $n \geq 4$ galinhas e sejam B_i e b_i o número de galinhas que, respetivamente, é bicada por e bica a galinha i . Mostra que

$$\sum_{i=1}^n (B_i - b_i)^3 \geq 0.$$