O derradeiro treino

Com as Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) mesmo à porta, dedicamos esta *Liga Delfos* à resolução de problemas que foram, ou poderiam ter sido, propostos em edições anteriores das IMO. Divirtam-se a resolvê-los!

1. **(IMO 1973, problema 3, Suécia)** Sejam a e b números reais tais que a equação $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ tem pelo menos uma solução real. Qual é o mínimo valor possível para a^2+b^2?

2. **(IMO 1979, problema 6, Alemanha Ocidental)** Sejam S e A dois vértices opostos de um octógono regular. Um sapo encontra-se no ponto S, e no ponto A está uma armadilha para prender o sapo. A cada segundo, o sapo salta, aleatoriamente, para um dos vértices adjacentes do octógono, terminando a sua jornada quando chega ao ponto A. Denotando por a_n o número de caminhos distintos com a duração de n segundos que o sapo pode fazer, mostra que, para $n \geq 1$, se tem

$$a_{2n-1} = 0 \qquad \text{e} \qquad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}),$$

   onde $x = 2+\sqrt{2}$ e $y = 2-\sqrt{2}$.

3. **(IMO 1987, problema 2, União Soviética)** Seja ABC um triângulo acutângulo, tal que o prolongamento da bissetriz AL (com $L \in BC$) intersecta a circunferência circunscrita no ponto N. Sejam LK e LM as perpendiculares aos lados AB e AC, respectivamente (com $K \in AB$ e $M \in AC$). Mostra que a área do triângulo ABC é um múltiplo inteiro da área do quadrilátero $AKNM$.

4. **(IMO 1993, *shortlist*, Índia)** Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ uma função que satisfaz $f(1) = 1$ e, para $n \geq 2$,

$$f(n) = \begin{cases} f(n-1) - n, & \text{se } f(n-1) > n; \\ f(n-1) + n, & \text{se } f(n-1) \leq n. \end{cases}$$

   Seja $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = 1993\}$.

   (a) Determina quantos elementos tem o conjunto S.

   (b) Determina, se existirem, o menor e o maior elementos de S.

   (c) Escrevendo os elementos de S por ordem crescente $\ldots < n_{-1} < n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, calcula

$$\lim_{i\to-\infty} \frac{n_i}{n_{i+1}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{i\to+\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i}.$$

   (Se o conjunto S tiver um elemento mínimo m, então supomos $n_0 = n_{-1} = \cdots = m$ e, analogamente, se S tiver um elemento máximo M, então supomos $n_1 = n_2 = \cdots = M$.)

5. **(IMO 1997, *shortlist*, Índia)** No bairro Norton de Matos há n rapazes e n raparigas, e cada rapariga conhece cada um dos rapazes. Mais a norte, no bairro das Saibreiras, existem n raparigas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ e $2n-1$ rapazes $m_1, m_2, \ldots, m_{2n-1}$ mas, para $i = 1, \ldots, n$, a rapariga f_i conhece apenas os rapazes $m_1, m_2, \ldots, m_{2i-1}$. Nas festas dos santos, é costume as raparigas dançarem com os rapazes do seu bairro, dois a dois, sendo que cada rapariga apenas dança com os rapazes que conhece. Para cada $r = 1, \ldots, n$, sejam $N(r)$ e $S(r)$ o número de formas de r raparigas do bairro Norton de Matos, respectivamente, do bairro das Saibreiras, formarem os seus pares. Mostra que $N(r) = S(r)$.

6. **(IMO 1999, *shortlist*, Bielorrússia)** Seja $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, X_3\}$ uma partição dos inteiros positivos em subconjuntos não vazios. Será que é possível escolher $\mathcal{P}$ de modo que, para todos os i, j, k tais que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, se $x \in X_i$ e $y \in X_j$, então $x^2 - xy + y^2 \in X_k$? Caso seja possível, exibe uma tal partição.

7. **(IMO 2003, *shortlist*, Roménia)** Seja b um inteiro maior que 5. Para cada inteiro positivo n, considera o número

$$x_n = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}5,$$

escrito na base b. Determina todos os valores de b para os quais existe um inteiro M tal que, para $n > M$, x_n é um quadrado perfeito.

Questão bónus: O que têm em comum todos os problemas propostos?