OMCPLP + OIAM

Problemas oriundos de provas e bancos das Olimpíadas de Matemática da CPLP e das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, que os doutos délficos devem procurar resolver.

1. Sejam $ABCD$ um quadrado, E o ponto médio do lado BC, F o ponto médio do lado CD. Constroem-se os triângulos equiláteros ABG e BEH de forma que G está no interior do quadrado, e H no seu exterior. Determinem o ângulo agudo entre as retas BF e GH.

2. Considerem a sucessão $a_n = 3^{3^n} + 1 \quad (n \geq 1)$.
   (a) Mostrem que cada termo da sucessão divide o termo seguinte.
   (b) Mostrem que existe um termo da sucessão que possui pelo menos 2022 factores primos.

3. Determinem o maior número real k com a propriedade de que para todos os polinómios de grau quatro
$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$
cujos zeros são todos reais e positivos, se tem
$$(b - a - c)^2 \geq kd,$$
e determinem quando é que a igualdade é satisfeita.

4. Determinem os três últimos algarismos de $2015^{2014^{2013}}$.

5. Determinem as funções, $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, que satisfazem, para todos os a, b, c racionais, a equação:
$$f(a+b+c) + f(a) + f(b) + f(c) = f(a+b) + f(b+c) + f(c+a) + f(0)$$

6. Consideremos uma família $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$ de 30 conjuntos, cada um dos quais com 40 elementos, tal que $A_i \cap A_j$ tem apenas um elemento, sempre que $1 \leq i < j \leq 30$. Seja $A = \bigcup_{i=1}^{30} A_i$ a reunião desses 30 conjuntos. Para cada $a \in A$, define-se a *multiplicidade* de a como sendo o número m_a de índices $i \in \{1, \ldots, 30\}$ tais que $a \in A_i$. Determinem todos os valores possíveis para a soma dos quadrados das multiplicidades dos elementos de A, isto é, todos os valores possíveis de $\sum_{a \in A} m_a^2$.

7. Suponham que $[ABCD]$ é um quadrilátero convexo tal que $\angle CBD = 10$, $\angle CAD = 20$, $\angle ABC = 40$ e $\angle BAD = 50$. Determinem $\angle BDC$ e $\angle ACD$.