A recta de Euler tem este nome porque foi o Matemático suiço, do século XVIII, Leonhard Euler quem primeiro demonstrou que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são três *centros* colineares de um triângulo. Como já viste, existem muitos pontos que se podem determinar a partir de um dado triângulo e nesse tema a recta de Euler é particularmente prolífica. Contudo essa é uma história que não contaremos aqui. Convidamos-te a fazer uma pesquisa na "world wide web" sobre o tema dos centros dum triângulo contidos na recta de Euler. Verás que há muitos mais. Antes de deixarmos o tema dos triângulos vamos olhar para mais um teorema de Euler que relaciona 9 pontos de um triângulo.

Seja $[ABC]$ um triângulo qualquer. O teorema que vais demonstrar diz que existe uma circunferência (denominada por circunferência de Euler) que passa por 9 pontos que se determinam a partir de $[ABC]$.

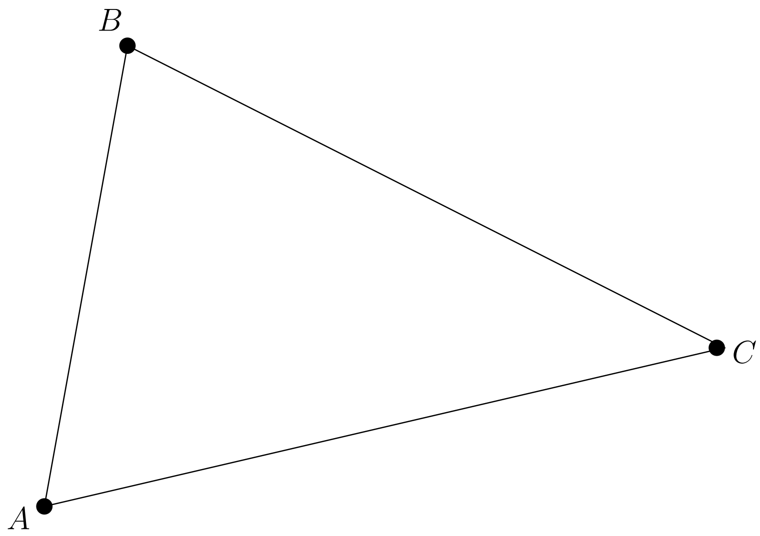

Figura 7: Triângulo $[ABC]$

Na figura acima, usando uma régua, desenha o seguinte:

1. Os pontos médios de cada lado A', B' e C' (A' no lado oposto a A, B' no lado oposto a B e C' no lado oposto a C).

2. H_A,H_B,H_C os pés das alturas de $[ABC]$.

3. H o ortocentro do triângulo $[ABC]$.

4. B^* o ponto médio de $[BH]$, A^* o ponto médio de $[AH]$ e C^* o ponto médio de $[CH]$.

Vamos mostrar que $A', B', C', H_A, H_B, H_C, A^*, B^*$ e C^* pertencem a uma circunferência. Em primeiro lugar, façamos algumas observações. $[A'B'C']$ é o triângulo medial e portanto a circunferência de Euler é a circunferência que o circunscreve. De facto, no caso do triângulo acima, quaisquer três dos pontos $A', B', C', A^*, B^*, C^*, H_A, H_B, H_C$ definem um triângulo cuja circunferência circunscrita é a circunferência de Euler associada a $[ABC]$.

No teu caderno, faz a demonstração dos seguintes factos:

1. $[C'B']$ é paralelo a $[CB]$.
2. $[C'B']$ é paralelo a $[C^*B^*]$.
3. $[C'B^*]$ é paralelo a $[C^*B']$.
4. $[AH_A]$ é perpendicular a $[C'B']$.
5. $[C'B^*]$ é perpendicular a $[C'B']$.

Concluimos que $[C'B^*C^*B']$ é um rectângulo. Usa o mesmo raciocínio para mostrar que $[C'A^*C^*A']$ é também um rectângulo. Dado um rectângulo qualquer, existe uma circunferência que contém todos os seus vértices, i.e., que o circunscreve; este é um caso particular de resultado mais geral que podes demonstrar no Ex. 20. Mas repara que as diagonais de um rectângulo são diâmetros da circunferência que o circunscreve e o diâmetro determina univocamente a circunferência. No nosso caso, sucede que $[C'A^*C^*A']$ e $[C'B^*C^*B']$ partilham uma diagonal, a saber $[C'C^*]$. Assim, estes rectângulos têm a mesma circunferência circunscrita. Conclui-se que, $A', A^*, B', B^*, C', C^*$ pertencem a uma mesma circunferência. Finalmente, resta-te mostrar que H_A, H_B e H_C também pertencem a esta circunferência.

EXERCÍCIOS

(20) Seja $[ABCD]$ um quadilátero. Mostra que existe uma circunferência que contém A, B, C e D (circunferência circunscrita) se e só se $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180º = \widehat{ABC} + \widehat{CDA}$.

(21) Seja $[ABC]$ um triângulo. Mostra que uma homotetia de centro em H (o ortocentro) e razão 2 envia a circunferência de Euler na circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$. Conclui que o raio da circunferência de Euler é metade do raio da circunferência circunscrita.

(22) Usando o exercício anterior, mostra que o centro da circunferência de Euler é o ponto médio do segmento $[HO]$ onde, para além de H denotar o ortocentro, O denota o circuncentro de $[ABC]$.

(23) Encontra na "world wide web" o enunciado do teorema de Feuerbach, que relaciona a circunferência de Euler com as circunferências tritangentes de um triângulo.