

*Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.*

1. Determine o número de números entre 2 e 1000 que têm pelo menos uma raiz (quadrada, cúbica ou de maior grau) inteira.
2. Determina os números primos  $p$  tais que  $5^p + 4p^4$  é um quadrado perfeito.
3. Resolva a seguinte equação por recorrência:

$$f(n) = 7f(n/2) - 6f(n/4),$$

com as condições iniciais  $f(1) = 2$  e  $f(2) = 7$ .

4. Dado um quadrilátero cíclico  $[ABCD]$ , seja  $M$  o ponto médio de  $[AB]$  e  $N$  a intersecção das diagonais. Sabendo que a recta  $MN$  é perpendicular a  $CD$  mas não a  $AB$ , prova que as diagonais são perpendiculares.
5. Seja  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função multiplicativa e estritamente crescente tal que  $f(2) = 2$ . Mostre que  $f(n) = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .