

*Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.*

1. Num tabuleiro  $3n$  por  $3n$ , qual é o número máximo de torres que se podem colocar de forma a que cada torre seja atacada no máximo por uma outra torre?
2. Determine as funções  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tais que

$$h(x + y) + h(xy) = h(x)h(y) + 1$$

para quaisquer  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

3. Num triângulo  $[ABC]$ , a bissetriz do ângulo  $\hat{A}$  intersesta  $[BC]$  no ponto  $D$ . A reta perpendicular a  $[AD]$  que passa por  $B$  intersesta  $[AD]$  no ponto  $E$ . A reta paralela a  $[AC]$  que passa por  $E$  intersesta  $[BC]$  em  $G$ . Supondo que  $|AB| = 26$ ,  $|BC| = 28$  e  $|AC| = 30$ , qual é o comprimento do segmento  $DG$ ?
4. Num retângulo  $[ABCD]$  de área 1 consideram-se 5 pontos (que podem estar na sua fronteira). Sabendo que quaisquer 3 desses pontos são não colineares, determine o menor número de triângulos que se podem construir com vértices nos 5 pontos dados e área quando muito igual a  $1/4$ .
5. Seja  $a_1$  um número natural dado que não é divisível por 5. Definimos a sucessão  $(a_n)$  por
$$a_{n+1} = a_n + b_n, n = 1, 2, \dots,$$
onde  $b_n$  é, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o algarismo das unidades de  $a_n$ . Mostre que a sucessão  $(a_n)$  contém um número infinito de potências de 2.