1. Num tabuleiro 2013×2013 colocamos 2013 rainhas, de forma a que nenhum par de rainhas se ataque mutuamente. Prova que existirão sempre duas rainhas para as quais o rectângulo de lados paralelos ao tabuleiro que as tem por vértices opostos tem perímetro 4026. [Consideramos para efeitos do problema que as rainhas estão precisamente no ponto médio da casa em que se situam]

2. Seja $[ABCD]$ um quadrilátero cujos vértices estão sobre uma mesma circunferência (que designaremos de referência), com $AB = AD$. Sejam ainda M, N dois pontos pertencentes a BC e CD, respectivamente, tais que $BM + ND = MN$. Sabendo que as semi-rectas AM e AN intersectam a circunferência de referência nos pontos P e Q, respectivamente, mostra que o ortocentro do triângulo $[APQ]$ está sobre o segmento MN.

3. Resolve a equação Diofantina $x^4 - y^3 = 48$.

4. Decide se é possível colocar os subconjuntos de três elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ em cinco sacos de tal modo que em nenhum saco estejam dois conjuntos que têm mais que um elemento em comum.

5. Sejam a, b, r racionais não negativos tais que $a^2 - b^2 r$ é quadrado de um racional. Mostra que então $\sqrt{a + b\sqrt{r}}$ pode ser escrito na forma $(a_1 + b_1\sqrt{s_1})/(a_2 + b_2\sqrt{s_2})$ para certos racionais a_i, b_i, s_i, $i = 1, 2$, com s_1, s_2 não negativos.

v.s.f.f.

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C0. Expõe com provas um ou dois temas da tua escolha.

C1. Caracteriza as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que são periódicas tanto com período r, como com período s, sendo $r, s \in \mathbb{Z}$ com $r \perp s$.

C2. Pedem-te para encontrar uma fórmula para a função $p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^5$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Tens lápis e papel e mais nada. O que fazes?

C3. a. É dado um segmento de comprimento $h > 0$ no plano. Mencionámos recentemente como construir de forma simples $\sqrt{h}$. Lembras-te?

b. Mostra que a seguinte construção te permite construir de forma simples as soluções de uma equação quadrática $x^2 + sx - c^2 = 0$ onde $b, c > 0$ são dados segmentos no plano:

Construir na extremidade R do segmento FR de comprimento c uma perpendicular e nela encontrar um ponto O tal que $|OR| = s/2$. Traçar a circunferência $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, s/2)$. Intersectar $l =$ recta FO com $\mathcal{C}$. Sejam N, N' os pontos de intersecção de $l \cap \mathcal{C}$ tal que se tenha a colinearidade $F - N - N'$, digamos. Então $x = |FN|$ é solução da equação.

Quais os significados de $|FN'|$ e de $|FN||FN'|$?

C4. Num recente teste Delfos pediu-se a construção euclidiana de um triângulo, dados a medida do ângulo de um vértice e os comprimentos da mediana e da bissectriz relativamente ao mesmo vértice. Numa explicação parcial reduzimos a questão à seguinte: dada a corda CR numa circunferência $\mathcal{C}$, encontrar um ponto $A \in \mathcal{C}$ tal que o ângulo $C\hat{A}R$ tenha bissectriz de dado comprimento s.

Supondo, para garantir melhor visibilidade, que $C\hat{A}R$ é obtuso, denota os dois arcos definidos por C, R e $\mathcal{C}$ por arco$_1$ e arco$_2$, supõe $A \in$ arco$_1$, e procede assim:

Define F :=ponto médio do arco$_2$; H :=ponto em $\mathcal{C}$ diametralmente oposto a F; $G := FH \cap CR$; $O \in segmRH$ tal que $|OR| = s/2$; $N \in segmOF$ tal que $|ON| = s/2$; $S := \mathcal{C}(F, |FN|) \cap segmCR$; $A := FS^+ \cap \mathcal{C}$.

Mostra que A é o ponto procurado. (Os pontos G, H, são introduzidos para te dar uma pista. Definem vários triângulos semelhantes ...)

(Notações usadas: AB^+ :=semirecta com origem A passando por B; $|AB|$:=comprimento do segmento AB; $\mathcal{C}(A, r)$ circunferência de centro A, raio r; $segmAB$:=segmento AB.)

C5. (Independente de C3,C4.) De um triângulo $\triangle ABC$ sabes $|BC|, \hat{A}$, e o comprimento da bissectriz. Dá fórmulas que permitem determinar o triângulo. (Estas fórmulas também permitem a construção de tal triângulo, mas esta presumivelmente vai ser mais complicada que a indicada em C4.)