Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. Seja $[ABCDEF]$ um hexágono convexo tal que
$$\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ \quad \text{e} \quad \frac{AB}{BC}\frac{CD}{DE}\frac{EF}{FA} = 1\,.$$
Mostra que $\dfrac{BC}{CA}\dfrac{AE}{EF}\dfrac{FD}{DB} = 1\,.$

2. Determina o número de soluções da equação $a+b+c+d = 20$, onde a, b, c e d são inteiros não negativos tais que a é par, b é um múltiplo de 6, $0 \leq c \leq 5$ e d pode ser 0 ou 1.

3. Dado $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, seja S_n a família das permutações em $\{1, 2, ..., n\}$, e F_n a família das aplicações $\{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow{f} \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tais que $f(i) < i$. Mostra que existe uma aplicação bijectiva $S_n \xrightarrow{\phi} F_n$ e constrói tal aplicação explicitamente.

4. Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $a, b \geq 1, n \geq 2$. Mostra que então $a^n - b^n \nmid a^n + b^n$.

5. Seja ABC um triângulo e $\mathcal{C}$ uma circunferência que interseta o lado BC em A_1 e A_2, o lado AC em B_1 e B_2 e o lado AB em C_1 e C_2. Sejam $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ as circunferências de diâmetros A_1A_2, B_1B_2 e C_1C_2 respetivamente. Seja P o centro de $\mathcal{C}$. Mostra que o conjugado isogonal de P em relação a ABC (isto é, o ponto em que concorrem as reflexões das retas PA, PB e PC em torno das bissetrizes de $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$, respetivamente) coincide com o centro radical de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

v.s.f.f.

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

Esta secção é para quem quer consolidar cultura matemática adquirida, e/ou quer preparar-se para questões do tipo que podem estar em testes universitários. Contém também problemas mais simples que mesmo assim podem ser engraçados. Questões a quem quase ninguém respondeu podem ser aqui recicladas.

C0ab ('cultura'): Expõe um ou dois tema da tua escolha com prova.

C1: De um e-mail dirigido a uma colega do Departamento:

Queria colocar uma questão que me intriga desde que me lembro e que, muito provavelmente, tem uma explicação matemática elementar. Desde miúdo que faço 'jogos' com as matrículas dos carros. Continuo a fazê-lo. Ainda pequeno descobri um padrão. Imaginando que o par de números da matrícula é, por exemplo, o 42 - 85. A diferença entre 42 e 85 é 43. Invertendo a ordem de cada um dos números da matrícula passo a ter o 24 - 58. A diferença entre 24 e 58 é 34... que é 43 escrito ao contrário. Fascinado por esta 'descoberta' tropecei na matrícula do carro da minha mãe que era o LF - 37 - 42 ... aqui o padrão deixava de funcionar. E pela vida fora ia descobrindo outros casos em que o 'meu padrão' não funcionava... E eis senão quando (já bem adulto) descobri o padrão 'suplente': a regra que se aplica a todas as excepções!! Pegando no 37 - 42 , a diferença é 05. E entre 73 e 24 é de 49 (deveria ser 50 para que a minha regra original se aplicasse). Pois o padrão 'suplente' é que nos casos de excepção, invertendo o resultado obtido (que passa a ser 94) e somando à primeira diferença ... o total é sempre 99. Professora, isto provavelmente não significa nada senão que eu deveria ter-me dedicado a procurar padrões noutros lugares mas como é algo que me 'persegue' e não sei explicar, partilho consigo. Há alguma explicação?

Caro Délfico: Traduz a observação do 'jogador de matrículas' numa afirmação matemática clara e explica-a.

C2 ('potenciais universitários'): Eis alguns exercícios reciclados mas nunca respondidos.

$*$ Dá uma prova elementar que dados $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $a > 1$, se tem $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

$*$ Mostra que a função chamada cosecans, abreviada e definida por $\csc = 1/\sin$ define uma aplicação bijectiva entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ e $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$. A inversa desta função diz -se 'arcus cosecans' e é abreviada arccsc. Sistemas de algebra simbólica por vezes não são capazes de simplificar fórmulas onde entram tais funções um pouco 'exóticas'. Assim, certo sistema não consegue simplificar para $d \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ a bem definida expressão $\operatorname{arccsc}(d) - \operatorname{arccsc}(d/\sqrt{d^2 - 1})$. Mostra que esta expressão equivale a uma bem mais simples que 'mete' π e o arco-seno, arcsin.