MACS

Helena Alves
Rafael Sousa
Rui Pedro Soares

Matemática Aplicada às Ciências Sociais

- Disciplina bienal de componente de formação específica com carga horária distribuída por 3 aulas de 90 minutos cada.

Objetivos

- Fazer uma abordagem tão completa quanto possível de situações reais desenvolvendo capacidades de formular e resolver matematicamente problemas, ou seja, desenvolvendo a capacidade de comunicação de ideias matemáticas (ler e escrever textos com conteúdo matemáticos descrevendo situações concretas);

- Os estudantes, em vez de dominarem questões técnicas, devem saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras atividades.

Objetivos

- Os conceitos matemáticos surgem através de problemas da vida real - perspetiva de formação cultural.

Programa – MACS I

- **Tema 1: Métodos de Apoio a Decisão**
  - Teoria Matemática das eleições;
  - Teoria da Partilha Equilibrada;

- **Tema 2: Estatística Descritiva;**

- **Tema 3: Modelos Financeiros.**

Programa – MACS II

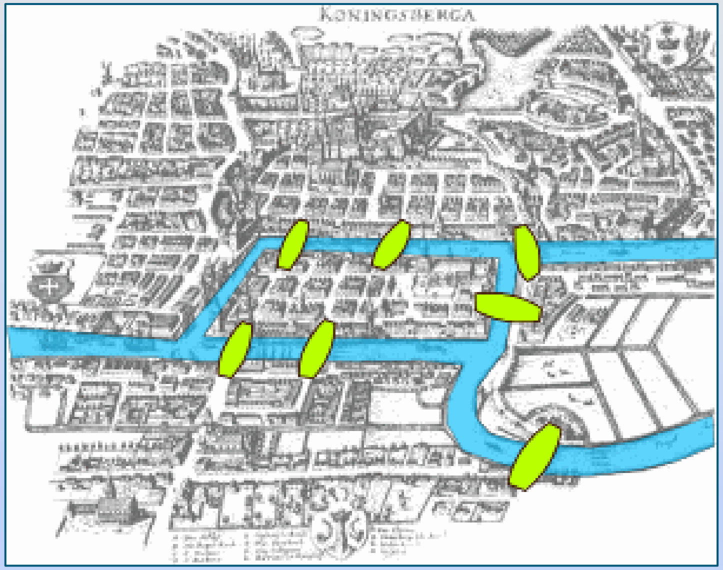
- **Tema 1: Modelos Matemáticos**
  - Teoria de Grafos
  - Modelos Populacionais
- **Tema 2: Modelos de Probabilidade**
- **Tema 3: Inferência Estatística**

Grafos! O que motivou essa Teoria?

- Königsberg, por volta de 1735, cidade localizada na antiga Prússia (situada em território russo, atualmente tem o nome de Kaliningrado) era, e continua a ser, atravessada pelo rio Pregel.

- Ali existiam sete pontes entre duas pequenas ilhas que as ligavam entre si e a cada uma das margens da cidade. As pontes apresentavam uma configuração como podemos observar na figura a seguir .

Grafos! O que motivou essa Teoria?



- Os habitantes de Königsberg discutiam um desafio:

➢ **Dar uma volta pela cidade, partindo de uma das margens ou de uma das ilhas, atravessando cada ponte uma e uma só vez e regressando ao ponto de partida.**

Teoria de Grafos – Conceitos e Aplicações

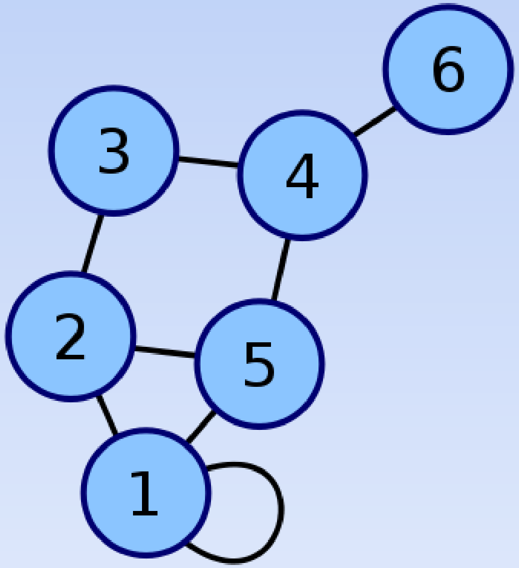
- **Teoria que ajuda a modelar muitas situações da vida do dia a dia:**

- Ruas de uma cidade e seus respetivos cruzamentos;
- Ruas de sentido único e de dois sentidos;
- Percursos (ferroviários, aéreos, marítimos, rodoviários, etc);
- Canalizações (água e gás);
- Linhas de telefone e internet.

Noções Básicas

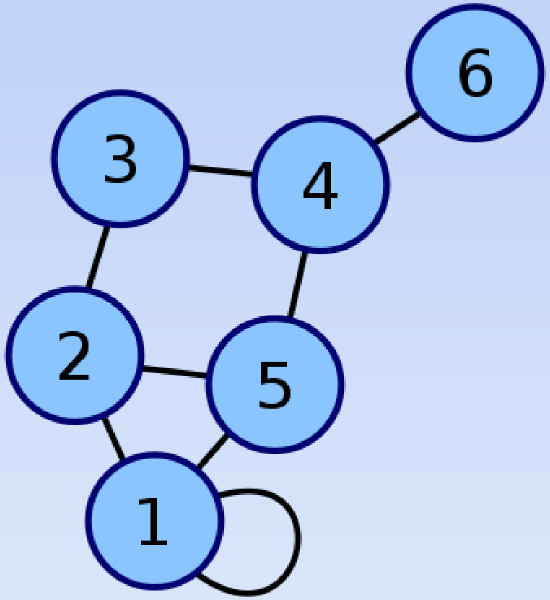
- **Grafo:** É um conjunto de pontos e linhas que ligam todos ou alguns desses pontos. Os pontos chamam-se **vértices** e as linhas chamam-se **arestas**.

- **Vértices adjacentes:** São vértices que pertencem a um dado grafo G e que estão ligados por uma aresta.



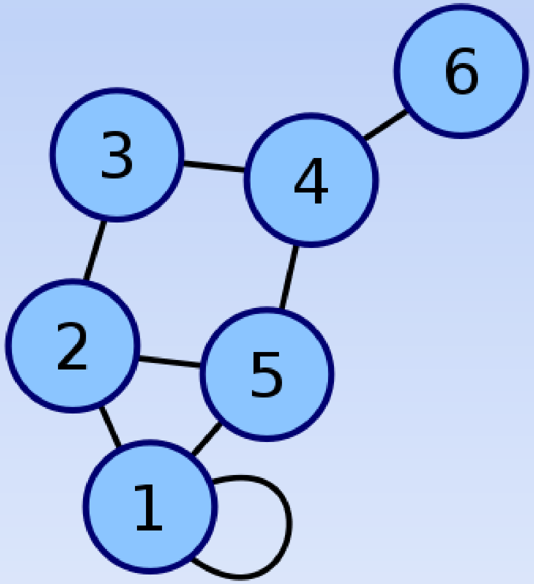
Noções Básicas

- Uma aresta que une dois vértices diz-se **aresta incidente** em cada um dos seus vértices
- Quando duas arestas incidem num mesmo vértice elas são **arestas adjacentes**.



Noções Básicas

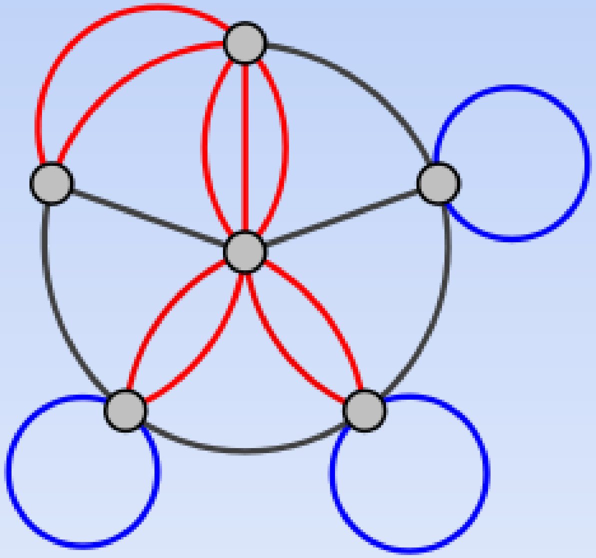
- O **grau de um vértice** $\boldsymbol{V}$, que se representa por $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V})$, traduz o número de arestas que incidem nesse vértice. Quando um vértice $\boldsymbol{V}$ não tem nenhuma aresta a incidir nele isto é $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{V}$ diz-se **vértice isolado**. Se $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{1}$ então $\boldsymbol{V}$ chama-se **vértice terminal**.



Noções Básicas

- Um **lacete** é uma aresta que tem ambos os extremos num mesmo vértice.

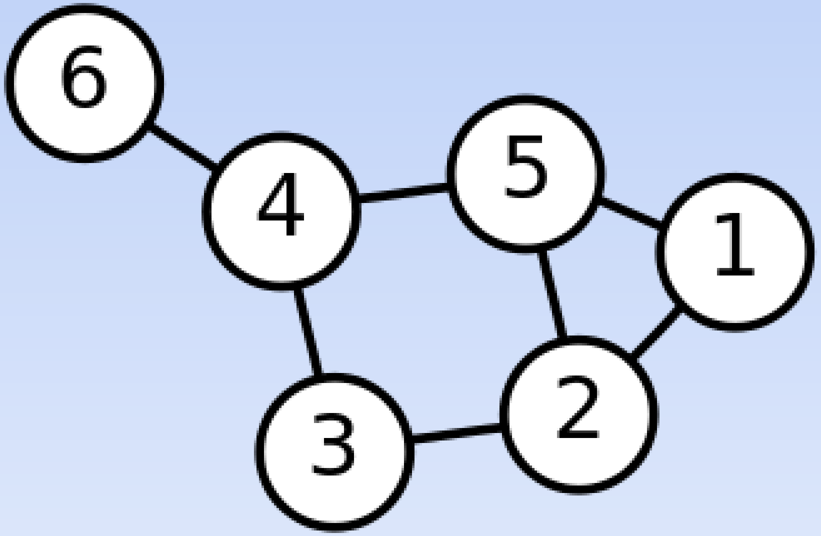
- **Arestas paralelas:** São arestas que têm os extremos iguais.



Noções Básicas

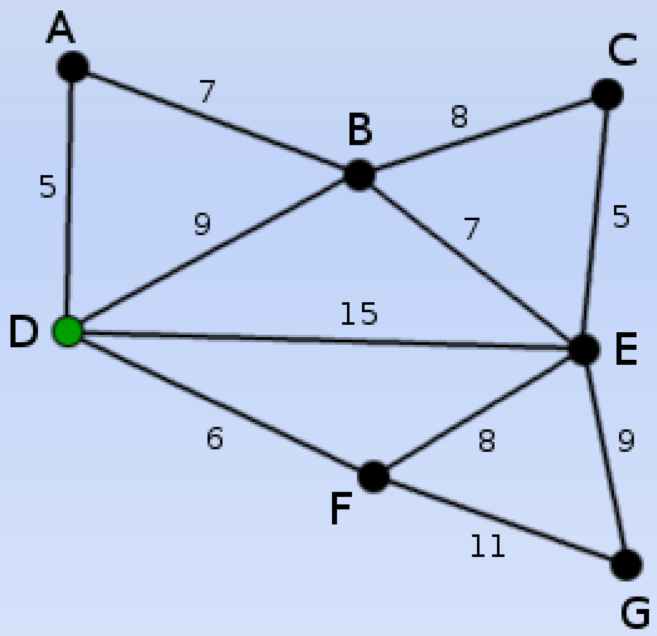
- **Grafo Simples:** É um grafo que não tem arestas paralelas ou lacetes.

- **Multigrafo:** É um grafo que tem arestas paralelas ou lacetes.



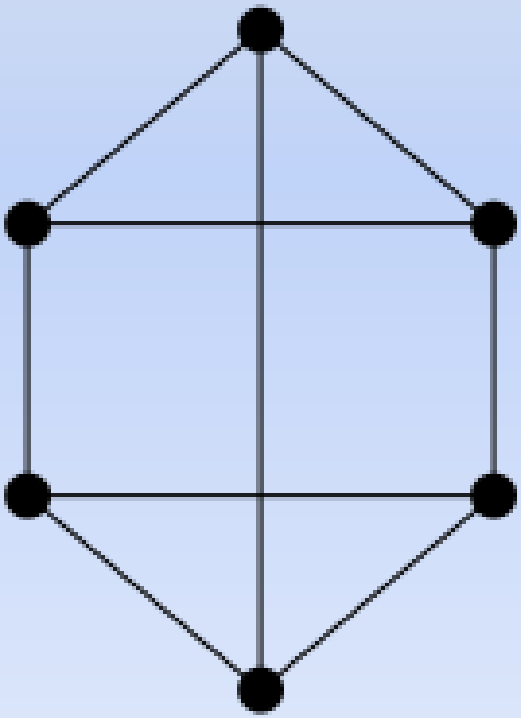
Noções Básicas

- Um **grafo pesado** é qualquer grafo em que a cada aresta se associa um número que designa por **peso** ou **custo**.



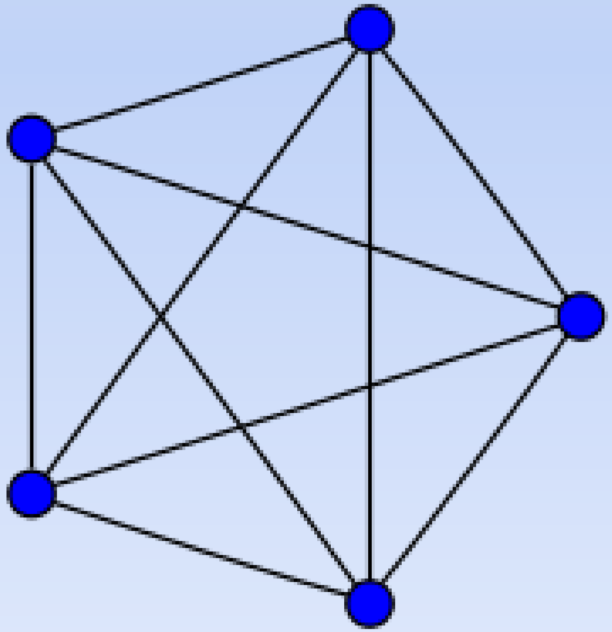
Noções Básicas

- Um **grafo regular** G é um grafo que tem todos os seus vértices com o mesmo grau.



Noções Básicas

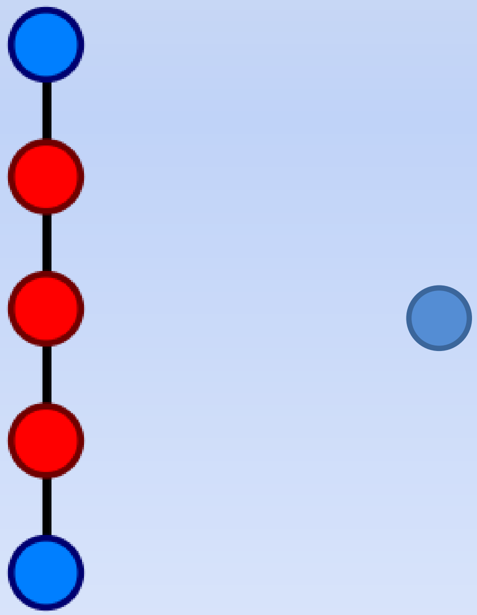
- Um grafo simples G, com $\boldsymbol{n}$ vértices, chama-se **grafo completo**, e representa-se por $\boldsymbol{k_n}$, quando todos os pares de vértices são adjacentes.



$\boldsymbol{k_5}$

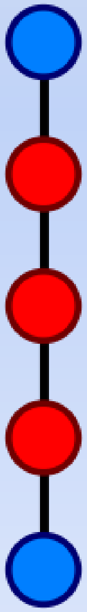
Noções Básicas

- **Grafo conexo:** Dados quaisquer vértices existe sempre uma sequência de vértices adjacentes que os une, caso contrário diz-se desconexo.



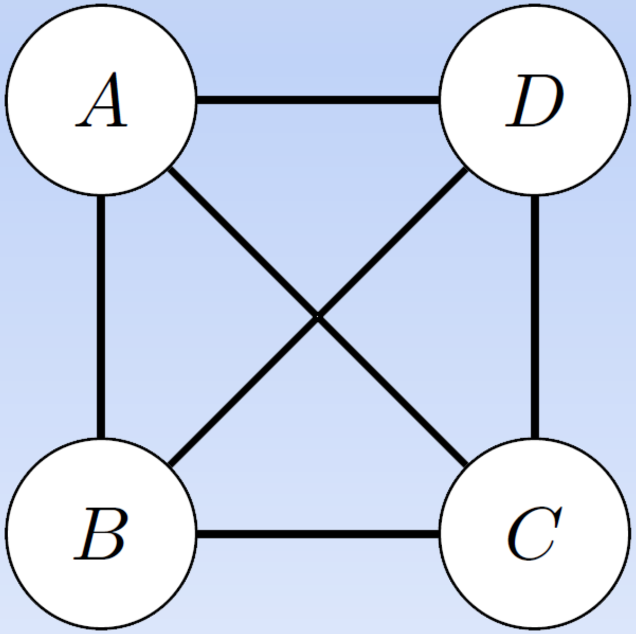
Noções Básicas

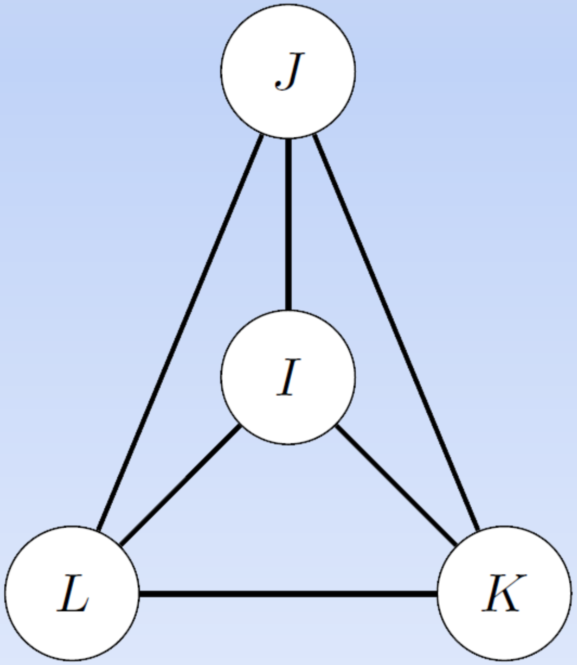
- **Ponte:** É uma aresta de um grafo conexo que ao ser removida o torna desconexo.



Isomorfismo entre Grafos

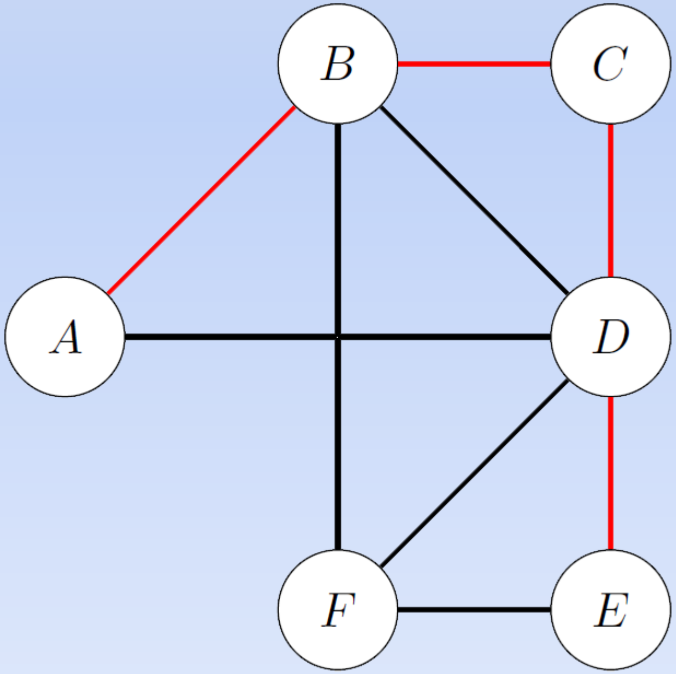
- Dois grafos dizem-se **idênticos** ou **isomorfos** se a cada vértice de um é possível fazer corresponder um vértice do outro e, também, a cada aresta que una dois vértices do primeiro, corresponda uma aresta que una os dois vértices correspondentes no segundo.





Percursos num Grafo

- **Passeio** num grafo ***G*** é uma qualquer sequência de vértices adjacentes. Um passeio pode repetir os vértices num grafo. Se o passeio começa e acaba no mesmo vértice diz-se **fechado**, caso contrário diz-se **aberto**.

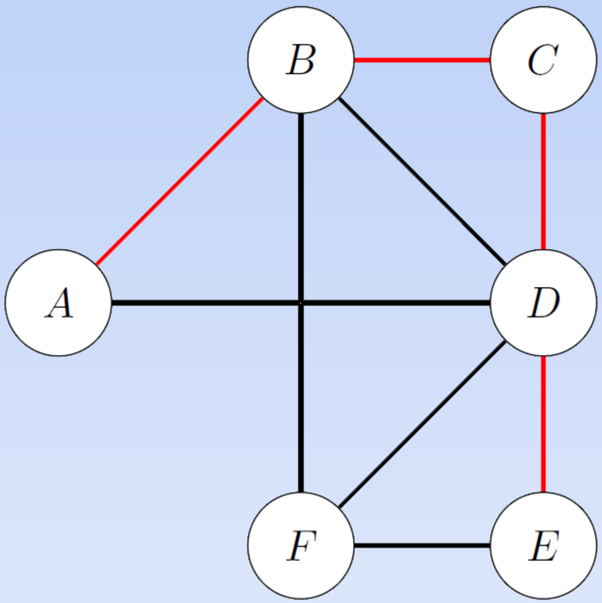


EFDBFDA

Percursos num Grafo

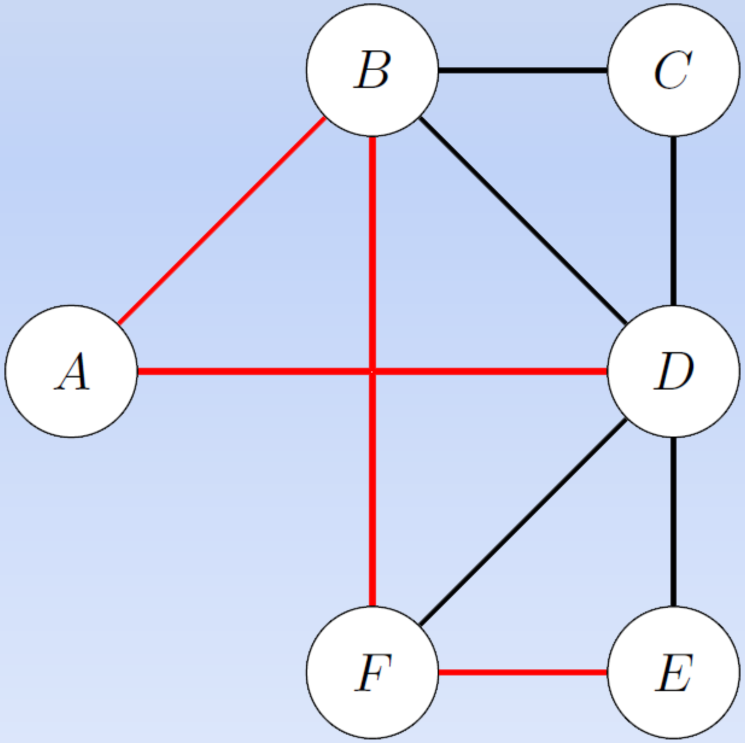
- O **comprimento do passeio** é dado pelo número de arestas que este percorre.

- Um grafo é **conexo** se existir um passeio a unir quaisquer dois dos seus vértices.



Percursos num Grafo

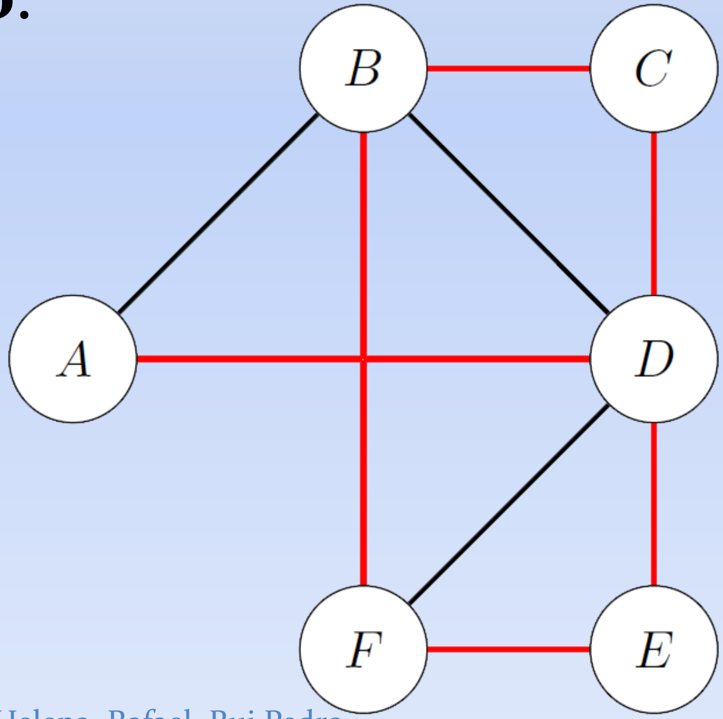
- **Trajeto** num grafo G é um passeio cujas arestas que o constituem são todas distintas. Um trajeto, de comprimento não nulo, que comece e acabe no mesmo vértice designa-se por **trajeto fechado** ou **circuito**.



FDBCDE

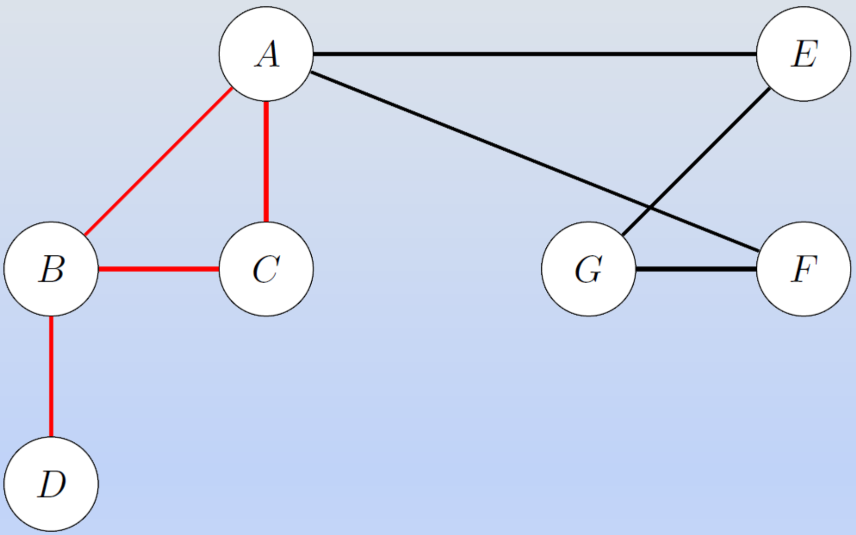
Percursos num Grafo

- **Caminho** num grafo é um passeio cujos vértices e arestas que os constituem são todos distintos. Um caminho, de comprimento não nulo, que comece e acabe no mesmo vértice designa-se por **caminho fechado** ou **ciclo**.

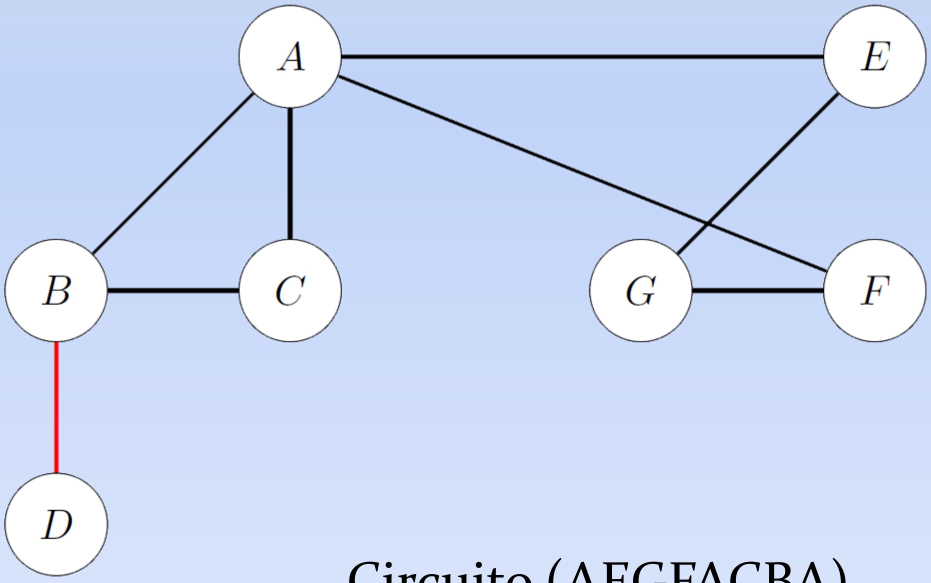


ABDF

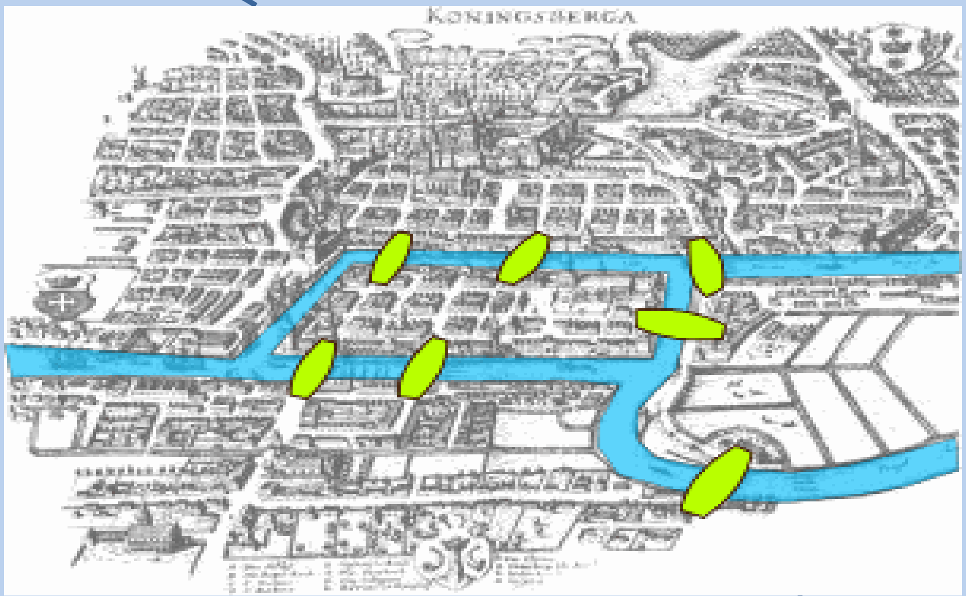
Percursos num Grafo



Ciclo (AEGFA)



Circuito (AEGFACBA)



Cidade de Königsberg

Grafo de Euler

- **Trajeto de Euler:** É um trajeto que percorre todas as arestas de um grafo conexo.
- **Circuito de Euler:** é um circuito que percorre todas as arestas de um grafo conexo.
- **Grafo de Euler** ou **grafo euleriano** é um grafo conexo no qual existe um circuito de Euler.

Teorema de Euler

- Se um grafo possuir vértices com grau ímpar, então não possui circuito de Euler.

- Se um grafo for conexo e todos os seus vértices forem de grau par, então possui pelo menos um circuito de Euler.

Consequências do Teorema de Euler

- Se um grafo possuir mais de dois vértices de grau ímpar, este não possui nenhum trajeto de Euler nem nenhum circuito de Euler.

- Se um grafo possuir dois vértices de ímpar, então possui pelo menos um trajeto de Euler, que começa e acaba nestes vértices com grau ímpar.

Algoritmo de Fleury

- Vê se o grafo é conexo e todos os vértices têm grau par.
- Começa num qualquer vértice.
- Percorre uma aresta se:

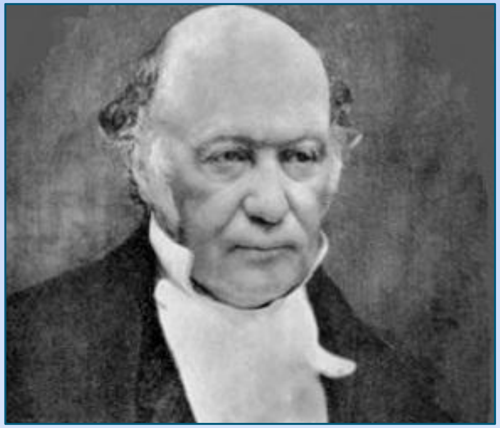
I. esta aresta não for uma ponte para a parte não atravessada do grafo;
II. não existir outra alternativa.

Eulerização de um Grafo

- É o processo segundo o qual, a partir de um qualquer grafo não euleriano, são duplicadas arestas já existentes, de modo a que se obtenha um grafo conexo com todos os vértices de grau par. O grafo final diz-se **eulerizado** e possui um circuito de Euler. Caso se pretenda obter um trajeto de Euler o processo é idêntico, bastando que todos os vértices, menos dois, fiquem com grau par. Este processo chama-se **semieulerização.**

Grafos Hamiltonianos

- Foi um jogo, envolvendo um conhecido sólido platónico, que celebrizou o Matemático William Rowan Hamilton (1805-1865), apesar de ter sido o Matemático Thomas Kirkman (1806-1895) a iniciar este tipo de estudo envolvendo não só um mas todos os poliedros em geral!

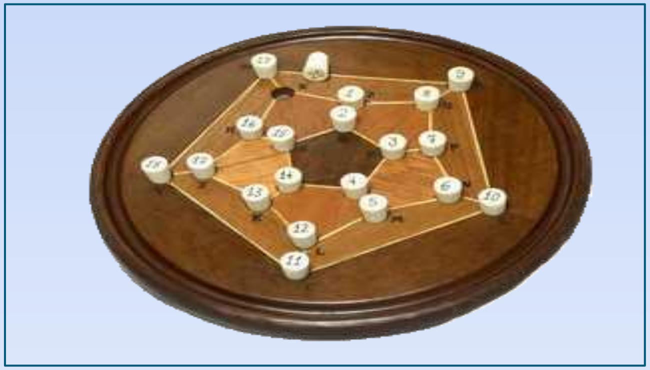


William Rowan Hamilton (1805-1865)

Grafos Hamiltonianos

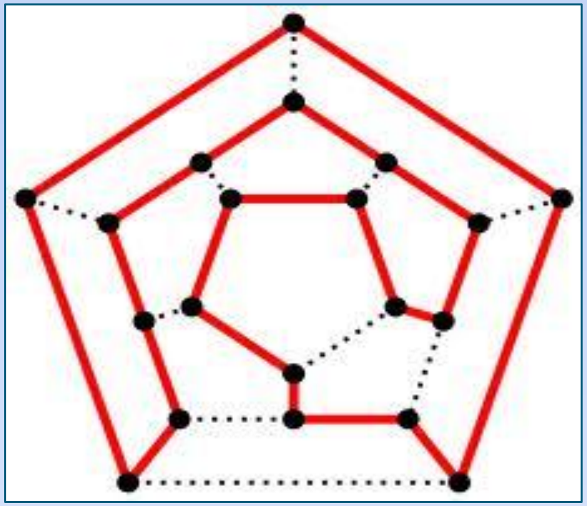
- Com o auxílio de um dodecaedro, Hamilton atribuiu a cada vértice o nome de 20 cidades. O jogo consistia em encontrar um percurso sobre o dodecaedro que, partindo de uma cidade, a ela regressasse, depois de ter visitado as restantes 19 uma única vez.

- Eis uma forma lúdica de utilizar alguns conceitos matemáticos…



Grafos Hamiltonianos

- **Ciclo de Hamilton** é um caminho que começa e acaba no mesmo vértice, passando por todos e cada um, uma e uma só vez. Quando um grafo admite um ciclo de Hamilton diz-se **grafo hamiltoniano**.



Grafos Hamiltonianos

- **Consequências da definição:**

- Num grafo com pontes não existem ciclos de Hamilton.

- Num grafo completo existem sempre ciclos de Hamilton.

  (Existem $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos).

- Um ciclo de Hamilton cuja soma dos pesos das arestas utilizadas é a menor possível designa-se por ciclo de Hamilton de custo mínimo.

Grafos Hamiltonianos

- Algoritmo da Força Bruta;
- Algoritmo do Vizinho Mais Próximo;
- Algoritmo das Arestas Ordenadas;

Algoritmo da Força Bruta

- Gerar todos os ciclos de Hamilton possíveis (a partir de determinado vértice).

- Adicionar os pesos das arestas utilizadas em cada um dos ciclos.

- Escolher o ciclo para o qual a soma do peso das arestas percorridas é mínima.

Algoritmo do Vizinho Mais Próximo

- Escolher um vértice para ponto de partida.
- A partir deste vértice escolher uma aresta com o menor peso possível que ligue a um dos vértices adjacentes ainda não visitados (se houver mais do que uma escolha possível escolher aleatoriamente).
- Continuar a construir o ciclo, partindo de cada vértice para um vértice não visitado segundo a aresta com menor peso.
- Do último vértice não visitado, regressar ao ponto de partida.

Algoritmo das Arestas Ordenadas

- Começar por escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que seja.

- Em seguida, escolher a aresta com o menor valor que se segue e assim sucessivamente, tendo em conta as restrições:

i. Não permitir que três arestas, do ciclo que estamos a procurar, se encontrem num mesmo vértice;

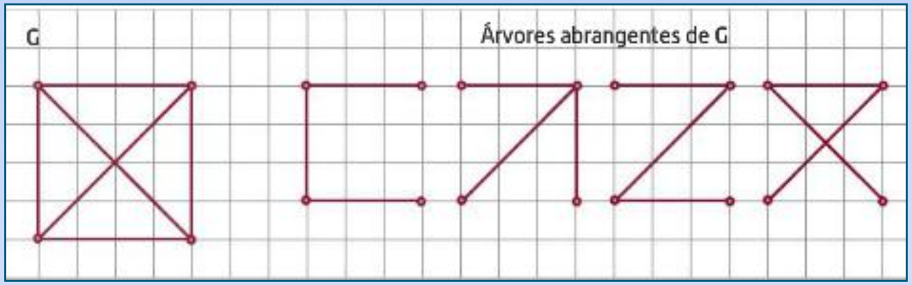
ii. Não permitir que se formem ciclos que não incluam todos os vértices.

Árvore Geradora Mínima

- **Árvore** é um grafo G, conexo, que não possui ciclos.

- Se G for um qualquer grafo conexo, designa-se por **árvore abrangente de G**, o subgrafo G^* tal que

  i. G^* é uma árvore;
  ii. G^* possui os mesmos vértices de G.



- Uma **árvore abrangente de custo mínimo** de um grafo conexo G, é uma árvore abrangente de G para a qual é mínima a soma dos pesos das arestas que a constituem.

Algoritmo de Kruskal ou Algoritmo do Avarento

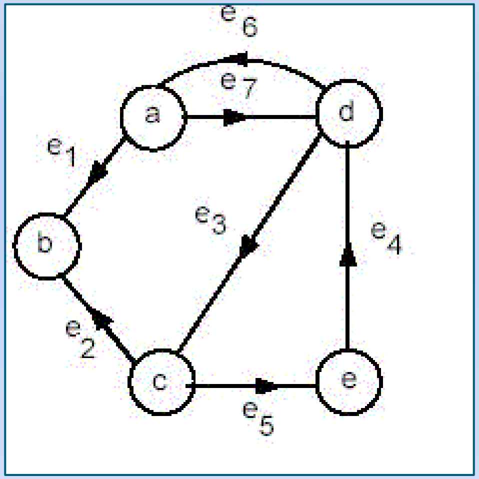
- Dado um grafo G conexo, ir escolhendo arestas por ordem crescente de peso, de modo que:

i. Não se formem ciclos;

ii. Todos os vértices pertençam a algumas das ligações adicionadas.

Digrafos ou Grafos Dirigidos

- **Grafo dirigido** ou **digrafo** é um grafo cujas arestas (na sua totalidade ou parte delas) têm um sentido.



Digrafos ou Grafos Dirigidos

- **Caminho crítico** de um digrafo é aquele que, de entre todos os que é possível formar, minimiza o tempo total das tarefas nele envolvidas.

- **Tempo de folga** de uma tarefa, num dado caminho crítico de um digrafo, é o número máximo de unidades de medida de tempo (dias, horas, semanas, etc…) que é possível atrasar a realização dessa tarefa sem prejudicar a finalização do projeto.