Formulário

1 Noções Básicas

- **Grafo** é um conjunto de pontos e linhas que ligam todos ou alguns desses pontos. Os pontos chamam-se **vértices** e as linhas chamam-se **arestas**.
- **Vértices adjacentes** são vértices que pertencem a um dado grafo G e que estão ligados por uma aresta.
- Uma aresta que une dois vértices diz-se **aresta incidente** em cada um dos seus vértices.
- Quando duas arestas incidem num mesmo vértice elas são **arestas adjacentes**.
- O **grau de um vértice** V, que se representa por $\text{grau}(V)$, traduz o número de arestas que incidem nesse vértice. Quando um vértice V não tem nenhuma aresta a incidir nele, isto é, $\text{grau}(V) = 0$, V diz-se **vértice isolado**. Se $\text{grau}(V) = 1$ então V chama-se vértice terminal (incide apenas uma aresta).
- Um **lacete** é uma aresta que tem ambos os extremos num mesmo vértice.
- **Arestas paralelas** são arestas que têm os extremos iguais.
- **Multigrafo** é um grafo que tem arestas paralelas ou lacetes.
- **Grafo simples** é um grafo que não tem arestas paralelas ou lacetes.

2 Percursos num Grafo

- **Passeio** num grafo G é uma qualquer sequência de vértices adjacentes. Um passeio pode repetir os vértices num grafo. Se o passeio começa e acaba no mesmo vértice diz-se **fechado**, caso contrário, se começa num vértice e termina noutro, diz-se **aberto**.
- O **comprimento do passeio** é dado pelo número de arestas que este percorre.
- Um grafo é **conexo** se existir um passeio a unir quaisquer dois dos seus vértices.
- **Trajeto** num grafo é um passeio cujas arestas que o constituem são todas distintas. Um trajeto, de comprimento não nulo, que comece e acabe no mesmo vértice designa-se por **trajeto fechado** ou **circuito**.
- **Caminho** num grafo é um passeio cujos vértices e arestas que os constituem são todos distintos. Um caminho, de comprimento não nulo, que comece e acabe no mesmo vértice designa-se por **caminho fechado** ou **ciclo**.
- Um **grafo pesado** é qualquer grafo em que a cada aresta se associa um número que se designa por **peso** ou **custo**.
- Um grafo simples G, com n vértices, chama-se **grafo completo**, e representa-se por K_n, quando todos os pares de vértices são adjacentes.
- Um **grafo regular** G é um grafo que tem todos os seus vértices com o mesmo grau.

- Dois grafos dizem-se **idênticos** ou **isomorfos** se a cada vértice de um é possível fazer corresponder um vértice do outro e, também, a cada aresta que una dois vértices do primeiro, corresponda uma aresta que una os dois vértices correspondentes no segundo.
- **Ponte** é uma aresta de um grafo conexo que ao ser removida o torna desconexo.

3 Grafos de Euler

- **Trajeto de Euler** é um trajeto que percorre todas as arestas de um grafo conexo (vê definição de trajeto).
- **Circuito de Euler** é um circuito que percorre todas as arestas de um grafo conexo (vê definição de circuito).
- **Grafo de Euler** ou grafo **euleriano** é um grafo no qual existe um circuito de Euler.
- **Teorema de Euler:**
  (a) Se um grafo possuir vértices com grau ímpar, então não possui circuito de Euler.
  (b) Se um grafo for conexo e todos os seus vértices forem de grau par, então possui pelo menos um circuito de Euler.
- **Consequências do Teorema de Euler:**
  (a) Se um grafo possuir mais de dois vértices de grau ímpar, este não possui nenhum trajeto de Euler nem nenhum circuito de Euler.
  (b) Se um grafo possuir dois vértices de ímpar, então possui pelo menos um trajeto de Euler, que começa e acaba nestes vértices com grau ímpar.
- **Algoritmo de Fleury para determinar circuitos de Euler**
  (a) Vê se o grafo é conexo e todos os vértices têm grau par.
  (b) Começa num qualquer vértice.
  (c) Percorre uma aresta se:
    i) esta aresta não for uma ponte para a parte não atravessada do grafo;
    ii) não existir outra alternativa.
- **Eulerização de um grafo** é o processo segundo o qual, a partir de um qualquer grafo não euleriano, são duplicadas arestas já existentes, de modo a que se obtenha um grafo conexo com todos os vértices de grau par. O grafo final diz-se **eulerizado** e possui um circuito de Euler. Caso se pretenda obter um trajeto de Euler o processo é idêntico, bastando que todos os vértices, menos dois, fiquem com grau par. Este processo chama-se **semieulerização**.

4 Grafos Hamiltonianos

- **Ciclo de Hamilton** é um caminho (vê definição) que começa e acaba no mesmo vértice, passando por todos e cada um, uma e uma só vez. Quando um grafo admite um ciclo de Hamilton diz-se **grafo hamiltoniano**.
- **Consequências da definição**

i) Num grafo com pontes não existem ciclos de Hamilton.
ii) Num grafo completo existem sempre ciclos de Hamilton.

- Um ciclo de Hamilton com a soma dos pesos das arestas utilizadas é a mais baixa possível designa-se por **ciclo de Hamilton de custo mínimo**.

- **Algoritmo da Força Bruta:**

  1) Gerar todos os ciclos de Hamilton possíveis (a partir de determinado vértice).
  2) Adicionar os pesos das arestas utilizadas em cada um dos ciclos.
  3) Escolher o ciclo para o qual a soma do peso das arestas percorridas é mínima.

- **Algoritmo do Vizinho Mais Próximo:**

  1) Escolher um vértice para ponto de partida.
  2) A partir deste vértice escolher uma aresta com o menor peso possível que ligue a um dos vértices adjacentes ainda não visitados (se houver mais do que uma escolha possível escolher aleatoriamente).
  3) Continuar a construir o ciclo, partindo de cada vértice para um vértice não visitado segundo a aresta com menor peso.
  4) Do último vértice não visitado, regressar ao ponto de partida.

- **Algoritmo das Arestas Ordenadas:**

  1) Começar por escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que seja.
  2) Em seguida, escolher a aresta com o menor valor que se segue e assim sucessivamente, tendo em conta as restrições:
     a) Não permitir que três arestas, do ciclo que estamos a procurar, se encontrem num mesmo vértice;
     b) Não permitir que se formem ciclos que não incluam todos os vértices.

5 Árvore Geradora Mínima

- **Árvore** é um grafo G, conexo, que não possui ciclos.

- Se G for um qualquer grafo conexo, designa-se por **árvore abrangente de** G, o subgrafo G^* tal que:

  1) G^* é uma árvore;
  2) G^* possui os mesmos vértices de G.

- Uma **árvore abrangente de custo mínimo** de um grafo conexo G, é uma árvore abrangente de G para a qual é mínima a soma dos pesos das arestas que a constituem.

- **Algoritmo de KrusKal ou Algoritmo do Avarento**
  Dado um grafo G conexo, ir escolhendo por ordem crescente de peso, de modo que:

  1) Não se formem ciclos;
  2) Todos os vértices pertençam a algumas das ligações adicionadas.

6 Grafos Dirigidos ou Digrafos

- **Grafo dirigido** ou **digrafo** é um grafo cujas arestas (na sua totalidade ou parte delas) têm um sentido.
- **Caminho crítico** de um digrafo é aquele que, de entre todos os que é possível formar, minimiza o tempo total das tarefas nele envolvidas.
- O caminho crítico de um digrafo que simbolize uma estrutura de tarefas, determina o menor tempo necessário para que o conjunto das tarefas possa ser realizado.
- **Tempo de folga** de uma tarefa, num dado caminho crítico de um digrafo, é o número máximo de unidades de medida de tempo (dias, horas, semanas, etc. . .) que é possível atrasar a realização dessa tarefa sem prejudicar a finalização do projeto.

7 Números cromáticos

- O número mínimo de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de maneira a que os vértices adjacentes não tenham a mesma cor, é designado por **número cromático**.