Jogos e Estratégias

E. Marques de Sá

DMUC 2006-2010

Resumo. Apresenta-se, de modo elementar e acessível a alunos do ensino secundário, a teoria dos jogos matemáticos com dois jogadores, de informação completa, e sem intervenção de factores aleatórios. Comentam-se os conceitos de diagrama e posição dum jogo, classificam-se as posições como inatacáveis, frágeis e neutras, define-se campeão e provam-se teoremas simples sobre os conceitos introduzidos. Apresentam-se muitos exemplos de jogos "de tirar", em complexidade crescente, alguns retirados de olimpíadas internacionais; explicitam-se técnicas de análise desses jogos e resolvem-se os correspondentes problemas.

Conteúdo

1 Posição dum jogo matemático

São jogos entre dois jogadores jogando alternadamente, sem intervenção de factores aleatórios, em que ambos têm conhecimento pleno das regras e de como o jogo vai evoluindo.[1] Joga-se com objectos físicos ou matemáticos dispostos de acordo com regras estabelecidas nas instruções do jogo; joga-se com peças de formas e cores diversas, fósforos, feijões, moedas, números ou o que se queira, dispostos no *terreno de jogo*, que é, geralmente, uma mesa, um tabuleiro, uma folha de papel. Uma característica omnipresente dos jogos a considerar é serem *finitos*, isto é, terminam após um número finito de jogadas com a vitória de um dos contendores, ou um empate.

Em determinado momento, o *diagrama* do jogo é o modo como as pedras estão distribuídas no terreno. O "estado" ou "posição" do jogo é algo mais complexo, devendo incorporar diversas coisas importantes:

a) O diagrama, denotado $\mathscr{D}$
b) O jogador que vai jogar, denotado X
c) O conjunto JP das jogadas possíveis a partir desse momento.

Matematicamente, o *estado* ou *posição* em determinado momento dum jogo é o trio ordenado

$$(\mathscr{D}, X, JP) = (\text{diagrama},\ \text{jogador},\ \text{jogadas possíveis}). \tag{1}$$

Um modo prático de estabelecer o estado em certo momento duma partida é imaginarmos que ela é interrompida nesse momento, para ser retomada muito tempo depois, por outros dois jogadores; o estado da partida deve conter toda a informação a dar aos dois novos contendores, para que eles possam retomar a partida interrompida. Como veremos, interessa que essa informação seja *minimal*; ela não deve incluir elementos supérfluos como, por exemplo, as regras gerais do jogo. A determinação do estado mais económico possível é fundamental para facilitar a sua análise matemática.

Uma classe importante de jogos em que é legítimo eliminar no estado a referência ao jogador que vai jogar é a dos jogos ditos *imparciais*, ou *simétricos*, aqueles em que para qualquer diagrama, as jogadas permitidas a um dos jogadores são as mesmas que as permitidas ao outro. Eis um exemplo:

[1] Também chamados *jogos de informação completa*.

1. *Jogo de tirar simétrico.* Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de um monte de 2008 pedras. Na sua vez de jogar, cada jogador tem que tirar 1 ou 4 pedras do monte. Ganha quem tirar a última.[2]

O diagrama do jogo é (pode ser) o número n de pedras do monte, que decresce com o decorrer do jogo. O termo "jogadas possíveis" pode dispensar-se na definição do estado, pois apenas repete parte das regras gerais. A indicação de quem vai jogar é matematicamente irrelevante;[3] quer jogue A quer jogue B, o que cada um pode fazer é tirar 1 ou 4 pedras. Portanto o estado pode identificar-se apenas pelo número de pedras no monte.

Por outro lado, há os jogos *parciais*, ou *assimétricos*, nos quais o carácter matemático duma posição pode ser diferente conforme joga um ou outro jogador.

2. *Jogo de tirar assimétrico.* Os jogadores A e B jogam alternadamente, tirando pedras de um monte de 2008 pedras, sendo A o primeiro a jogar. Em cada jogada, A tem que tirar 1 ou 4 pedras, e B tem que tirar 2 ou 3 pedras. Perde o primeiro jogador que não possa jogar.

Em determinado momento duma partida, o diagrama do jogo é (pode ser) o número p de pedras na mesa. A referência a quem vai jogar é indispensável: sob o ponto de vista matemático é muito diferente que, das p pedras se possam tirar, na primeira jogada, 1 ou 4, ou se possam tirar 2 ou 3. O estado pode identificar-se por (p, X), onde X é quem vai jogar sobre as p pedras, pois a indicação de X e as regras gerais do jogo tornam supérflua a identificação das jogadas possíveis.

3. *Xadrez.* O Xadrez é um jogo em que o jogador B joga com pedras brancas e N joga com pedras negras, de acordo com as seguintes regras: [*cf. Laws of Chess*, vistas em Abril 2008, *in*

   `http://www.fide.com/component/handbook/?id=32&view=category`].

[2]O número 2008 nada tem de especial a não ser tratar-se do ano de redacção do enunciado. Em problemas olímpicos é habitual apresentar-se uma data como exemplo concreto de cardinal 'elevado'. Deve olhar para este tipo de números como um modo de concretizar uma ideia; não se ponha a fazer contas com o 2008, pois o que o proponente quer, em geral, é que o leitor seja capaz de resolver o problema para qualquer número que nos venha à cabeça. Se vivêssemos no ano 2 d.C., a escolha da data não seria boa ideia, pois o que se pretende é dificultar a vida olímpica!

[3]Pode haver relevância de outra natureza, psicológica, ou material no caso de haver um prémio monetário para o vencedor; mas isso é coisa fora do âmbito da nossa história.

Seria impensável incluir em cada estado duma partida de Xadrez a descrição das jogadas possíveis,[4] pois o diagrama e a indicação de quem joga chegam para as determinar; assim, cada estado pode reduzir-se ao par ordenado $(\mathscr{D}, X)$. Note-se que há dois estados distintos para o mesmo diagrama: $(\mathscr{D}, B)$ e $(\mathscr{D}, N)$. Quando o estado é $(\mathscr{D}, B)$, as brancas jogam e transformam $(\mathscr{D}, B)$ noutro estado $(\mathscr{D}', N)$.

Há casos em que a explicitação das jogadas possíveis é indispensável na caracterização do estado, como nos exemplos seguintes

4. *Tirar de um só monte, sem repetir a jogada anterior.* [*XV Olimpíada IAM*, Caracas, 2000] Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de um monte de 2000 pedras. Cada jogador tem que tirar 1, 2, 3, 4 ou 5 pedras. Em cada jogada [excepto na primeira] o jogador não pode tirar o mesmo número de pedras tiradas pelo adversário na jogada anterior. Perde o primeiro jogador que não possa realizar uma jogada válida. Determinar qual jogador tem estratégia ganhadora e encontrá-la.

5. *Tirar de um só monte, sem repetir a sua própria jogada anterior.* Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de um monte de 2008 pedras. Nas duas primeiras jogadas do jogo, uma de cada um dos jogadores, cada um deles tira 1, 2, 3, 4 ou 5 pedras. Depois dessas jogadas iniciais, cada jogador tem que tirar 1, 2, 3, 4 ou 5 pedras, mas não pode tirar o mesmo número de pedras tiradas por si próprio na sua jogada anterior. Perde o primeiro jogador que não possa realizar uma jogada válida. Determinar qual jogador tem estratégia ganhadora e encontrá-la.

No jogo 4, o melhor diagrama é, claramente, o número n de pedras no monte. Pondo de fora a primeira jogada, as outras podem descrever-se sem referência ao jogador que vai jogar. Portanto, ressalvada a primeira jogada, o jogo é imparcial, o que dispensa a referência a quem vai jogar. As jogadas possíveis são: retirar um número de pedras do conjunto $\{1, \ldots, 5\} \setminus \{t\}$, onde t foi o que o adversário tirou na sua jogada anterior. Claro que a posição da partida fica totalmente identificada pelo par (n, t).

No jogo 5, o diagrama natural é o número n de pedras no monte, e também aqui se pode dispensar a referência a quem joga. Se interrompermos a partida em determinado momento para a retomarmos mais tarde, é indispensável registar as duas últimas jogadas antes da interrupção, uma de cada jogador,

[4] Isso seria praticamente equivalente à transcrição das *Leis do Xadrez*.

pois são esses os números "interditos" nas duas primeiras jogadas da retoma. A posição do jogo pode, portanto, ser (n, u, p), onde u e p são os números de pedras retiradas na última e penúltima jogadas, respectivamente. Note-se que o jogador que vai jogar sobre a posição (n, u, p) não pode tirar p pedras e, ao tirar x pedras, entrega ao adversário a posição $(n - x, x, u)$, na qual u é, agora, a penúltima tiragem.

6. *Dois numa bicicleta.* Dois amigos, A e B, viajam na mesma bicicleta duma só pedaleira e revezam-se a pedalar. As etapas da viagem numeram-se por ordem: etapa 1, etapa 2, etapa 3, etc.. O viajante A pedala nas etapas ímpares, e B nas etapas pares. Na etapa k o pedalante de serviço tem que pedalar pelo menos 1 quilómetro, mas não mais de k quilómetros. A viagem faz-se sempre para a frente, sem recuar. Ganha o que for a pedalar quando chegarem ao destino que fica a 2008 km do ponto de partida. Qual deles tem estratégia para ganhar o jogo? Qual é essa estratégia?

A análise deste jogo far-se-á etapa por etapa; ao iniciar cada uma delas, escolhemos como diagrama a *distância da bicicleta ao destino.* Trata-se de um número real d que no princípio do jogo tem o valor $d = 2008$ e vai decrescendo etapa após etapa. O *estado* terá de incluir d e o jogador X a quem cabe pedalar nessa etapa. Mas o par (d, X) não diz quais as *jogadas possíveis* que X pode fazer, *i.e.*, até que distância pode pedalar. Uma escolha possível para o estado é o trio (d, X, k), em que k é (em quilómetros) a distância máxima que X pode percorrer pedalando nessa etapa. Como k é, também, o número de ordem da etapa, k determina univocamente o condutor. Portanto podemos dispensar a referência a X no estado. Neste caso, os estados poderão representar-se, apenas, por pares (d, k).

2 Três tipos de posições

Fixemos um jogo de estratégia. As regras incluem a definição de "ganhar"e de "empatar"o jogo. Isso faz-se especificando dois conjuntos de posições: o conjunto $\mathbb{V}$ das posições de vitória e o conjunto $\mathbb{E}$ das posições de empate. Ganha o jogador que consegue jogar entregando ao seu adversário uma posição vitoriosa. O jogo termina no momento em que se chega a uma posição de vitória ou de empate; nessas posições terminais, o jogador a quem cabe jogar não tem jogadas disponíveis.

Vamos classificar cada posição como sendo de um de três tipos: $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}$, ou $\mathcal{N}$. Intuitivamente, uma posição é de tipo $\mathcal{P}$ se o *primeiro* jogador a jogar (aquele que tem que jogar sobre essa posição) pode ganhar contra quaisquer jogadas posteriores do adversário; é de tipo $\mathcal{S}$ se o *segundo* jogador a jogar tem estratégia para ganhar contra quaisquer jogadas do adversário; é de tipo $\mathcal{N}$ se não é de tipo $\mathcal{P}$ nem de tipo $\mathcal{S}$.

Vamos dar definições matemáticas rigorosas.

Definição 2.1 Seja $\mathscr{E}$ uma posição qualquer.

> $\mathscr{E}$ diz-se de *tipo*-$\mathcal{S}$, se é vitoriosa, ou qualquer jogada a transforma numa posição de tipo-$\mathcal{P}$.
>
> $\mathscr{E}$ diz-se de *tipo*-$\mathcal{P}$, se existe uma jogada que a transforma numa posição de tipo-$\mathcal{S}$.
>
> $\mathscr{E}$ diz-se de *tipo*-$\mathcal{N}$ se não é de tipo-$\mathcal{S}$ nem de tipo-$\mathcal{P}$.

Das definições segue-se que uma partida não pode terminar numa posição de tipo $\mathcal{P}$.

Teorema 2.2 *Nenhuma posição é, simultaneamente, de tipo-$\mathcal{S}$ e de tipo-$\mathcal{P}$.*

Demonstração. Chamemos *híbrida* a uma posição ao mesmo tempo $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$. Admitamos, por absurdo, que existe uma posição híbrida H. Pela definição, existe uma jogada que transforma H noutra híbrida. Podemos, pois, conceber uma partida que começa com H, e que continua com posições $H', H'', \ldots$, todas híbridas. Sendo o jogo finito, a partida é finita, tendo, pois, uma posição terminal, T, que é híbrida. O jogador que joga sobre T não tem jogadas possíveis, pelo que T não é de tipo-$\mathcal{P}$. Esta contradição mostra que não existem posições híbridas. $\square$

As definições têm uma característica singular: parece estarmos perante um "círculo vicioso" que consiste em definir as posições $\mathcal{S}$ à custa das $\mathcal{P}$ e as $\mathcal{P}$ à custa das $\mathcal{S}$. Mas o "vício", apenas aparente, é o que habitualmente ocorre nas definições recursivas: definem-se as posições $\mathcal{S}$ à custa de posições

$\mathcal{P}$ "mais simples", e estas à custa de posições $\mathcal{S}$ ainda "mais simples".[5]

Na vida real, um "campeão" também pode falhar, seja em que desporto for. Mas, na perspectiva matemática, um campeão tem o dom da infalibilidade. Fixado um jogo, *campeão* é um jogador que, tendo que jogar sobre uma posição K, joga de modo a satisfazer o seguinte:

(a) Se K é de tipo $\mathcal{P}$, o campeão transforma K numa posição de tipo $\mathcal{S}$;

(b) Só transforma K numa posição de tipo $\mathcal{P}$, se K for de tipo $\mathcal{S}$.

Teorema 2.3 *Admitamos que certa partida é jogada por dois campeões, com posição inicial $\mathscr{I}$.*

Se $\mathscr{I}$ é de tipo $\mathcal{P}$, o primeiro jogador ganha partida;
Se $\mathscr{I}$ é de tipo $\mathcal{S}$, o segundo jogador ganha partida;
Se $\mathscr{I}$ é de tipo $\mathcal{N}$, a partida termina empatada.

Demonstração. Seja $\mathscr{I}$ de tipo $\mathcal{P}$. De acordo com (a), o primeiro jogador transforma a posição inicial numa posição $\mathscr{I}'$ de tipo $\mathcal{S}$; o segundo jogador transforma $\mathscr{I}'$ numa posição de tipo $\mathcal{P}$. Assim, o primeiro campeão a jogar jogará sempre sobre posições $\mathcal{P}$, e o segundo sobre posições $\mathcal{S}$. A jogada terminal só pode ser de tipo $\mathcal{S}$. Portanto o primeiro ganha.

Se $\mathscr{I}$ é de tipo $\mathcal{S}$, as posições invertem-se: o primeiro joga sempre sobre posições $\mathcal{S}$ e o segundo sobre posições $\mathcal{P}$. Ganha, pois, o segundo a jogar.

---

[5]Mais precisamente, podemos organizar as posições $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$ em "gerações", num crescendo de complexidade:

- A 1^a *geração* $\mathcal{S}$ é constituída pelas posições-$\mathcal{S}$ mais simples, as vitoriosas, que são dadas pelas regras do jogo;
- A 1^a *geração* $\mathcal{P}$ é constituída pelas posições que podem, com uma só jogada, ser transformadas em posições da 1^a geração $\mathcal{S}$;
- A 2^a *geração* $\mathcal{S}$ é constituída pelas posições tais que qualquer jogada que se faça sobre elas produz posições da 1^a geração $\mathcal{P}$, que já se conhece;
- A 2^a *geração* $\mathcal{P}$ é constituída pelas posições que podem, com uma só jogada, ser transformadas em posições da 2^a geração $\mathcal{S}$;
- Etc., etc..

Seja $\mathscr{I}$ de tipo $\mathscr{N}$. O campeão joga sobre $\mathscr{I}$ e transforma-a numa posição $\mathscr{I}'$ que, como qualquer outra, é de um e um só de três tipos: $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ ou $\mathscr{N}$. Se $\mathscr{I}'$ fosse de tipo $\mathcal{P}$, $\mathscr{I}$ seria de tipo $\mathcal{S}$, por definição de campeão; se $\mathscr{I}'$ fosse de tipo $\mathcal{S}$, $\mathscr{I}$ seria de tipo $\mathcal{P}$, por definição de tipo $\mathcal{P}$. Portanto $\mathscr{I}'$ é de tipo $\mathscr{N}$. Assim, os dois campeões produzirão uma partida constituída por posições de tipo $\mathscr{N}$. A posição terminal não pode ser vitoriosa pelo que é de empate. $\square$

Uma posição de tipo $\mathcal{S}$ será também chamada *inatacável*, ou *inexpugnável*; de facto, o jogador que joga sobre ela nada pode fazer para ganhar a partida (a não ser esperar por um erro do adversário)[6]. Uma posição de tipo $\mathcal{P}$ será também chamada *frágil*, ou *vulnerável*; a fragilidade é óbvia: o jogador que joga sobre ela tem uma maneira de a transformar numa inatacável.

Uma jogada diz-se *boa* se transforma uma posição frágil numa posição inatacável, ou uma neutra noutra neutra; uma jogada diz-se *má* se transforma uma posição frágil numa posição frágil ou neutra, ou se transforma uma posição neutra numa posição frágil.

> *Comentário sobre o Xadrez.*
>
> Seja $\mathscr{X}_0$ a primeira posição do jogo de Xadrez, em que jogam as brancas sobre o conhecido diagrama inicial das 32 peças arrumadas em 4 linhas. Não se sabe se $\mathscr{X}_0$ é inatacável, frágil ou neutra e o mais que podemos fazer é especular sobre o assunto. Estatísticas feitas sobre centenas de milhares de partidas entre grandes mestres dão os seguintes resultados: as brancas vencem 37% das partidas, as negras 27% e as restantes 36% terminam empatadas (números aproximados). Os números não nos dão suporte para opção razoável quanto à natureza da posição de abertura do Xadrez. Quem 'assalta' a posição de abertura são as brancas; se $\mathscr{X}_0$ fosse inexpugnável, as brancas tenderiam a falhar o assalto mais vezes do que as estatísticas indicam. Portanto a posição de abertura não é, quase certamente, inexpugnável.
>
> Menos forte, mas plausível, é a conjectura de que o primeiro estado seja neutro o que significaria, matematicamente, serem neutros todos os estados até ao final do jogo se nenhum dos contendores fizesse uma jogada má; dito

[6] Uma posição inatacável sobre a qual você tenha que jogar não significa necessariamente a vitória do seu adversário, mesmo que você saiba que ele tem uma estratégia para vencer, ele pode não saber! Numa posição dessas, não desista, jogue qualquer coisa...

de outro modo, um jogo entre campeões evoluiria, de neutro em neutro, até ao empate (por tripla repetição de um estado, por exemplo).

Não espere ver realizado, neste mundo imperfeito, o conceito matemático de *campeão*. Aceitando ou não a neutralidade da posição de abertura do Xadrez, podemos imaginar uma partida entre grandes mestres como uma sucessão de jogadas boas ou más, e posições neutras, frágeis ou inatacáveis, até que um deles entregue ao adversário uma posição frágil *que seja detectada como frágil pelo adversário*; este responde, então, com uma jogada boa e ganhante; a partir desse ponto do jogo, todas as suas jogadas serão ganhantes e serão inexpugnáveis todas as posições que entrega ao adversário. Será tempo, então, de este tombar o seu rei reconhecendo a inevitabilidade da derrota.

Não é raro que um grande mestre, perante uma posição frágil oferecida pelo adversário, responda devolvendo-lhe uma posição má ou neutra, para gáudio dos comentadores de sofá: os livros de teoria e psicologia do xadrez estão cheios de exemplos dessa natureza. Adivinha-se que muito mais frequentes sejam as jogadas fracas executadas (até por grandes mestres) sobre posições frágeis das quais até hoje ninguém detectou a fragilidade! O Supremo Campeão Matemático deve sofrer muito ao assistir a uma partida entre humanos...

3 Sem empates não há neutralidade

Quase todos os jogos discutidos neste texto são jogos finitos, sem empates, *i.e.*, terminam sempre após um número finito de jogadas com a vitória de um dos jogadores. Ficam excluídos desta análise o Xadrez, as Damas, o Reversi, o Go e muitos outros bem conhecidos.

No primeiro contacto com esse tipo de jogos, especialmente nos de complexidade elevada, a impressão que se forma no nosso cérebro, por falta de prática do jogo em si, é de que as inatacáveis e, portanto!, também as frágeis só podem ocorrer lá para o fim da partida, sendo neutras as posições até à fase decisiva em que um dos jogadores descobre um modo seguro de ganhar ao seu adversário. A inexistência de neutras é uma surpresa muito interessante, mas surpreenderá, apenas, quem não acompanhou a evolução do raciocínio das duas páginas anteriores.

Corolário 3.1 *Em jogos finitos e sem empates não existem posições neutras.*

Demonstração. Por absurdo, admitamos que em certa partida ocorre uma posição neutra. Ponhamos dois campeões a jogar a partir dessa posição, e apliquemos o teorema 2.3. □

Uma consequência importante do teorema 3.1 é que, em qualquer jogo do tipo considerado, a posição inicial do jogo ou é frágil ou é inatacável; no primeiro caso o primeiro a jogar tem uma estratégia ganhadora contra quaisquer jogadas do adversário, no segundo caso é o segundo a jogar que tem estratégia ganhadora.

4 O processo de adivinhação

O modo de atacar cada problema proposto envolvendo um jogo de estratégia começa, em 99% dos casos, do seguinte modo:

(a) Determine o que é o estado (ou posição) do jogo, e se poderá omitir algum, ou alguns dos elementos: "jogador que joga" e "jogadas possíveis". Quanto mais simples for o estado, melhor.

(b) Por tentativas, por experimentação, por análise de muitos casos, começando com os mais simples num crescendo de complexidade, faça uma conjectura sobre quais são as posições inatacáveis e as frágeis.

    Recomendação que quase sempre funciona: comece pelo final do jogo e avance seguindo as seguintes etapas:

    1. As inatacáveis mais simples são as posições vitoriosas;

    2. As mais simples a seguir são aquelas para as quais existem jogadas que as transformam em posições do tipo anterior;

    3. As mais simples a seguir são as posições que com qualquer jogada possível se transformam em posições do tipo anterior;

    4. As mais simples a seguir são aquelas para as quais existem jogadas que as transformam em posições do tipo anterior;

    5. As mais simples a seguir são as posições que com qualquer jogada possível se transformam em posições do tipo anterior;

    6. ....

As posições que vier a encontrar nas etapas de ordem ímpar são inatacáveis, as de ordem par são frágeis. Se executar estas operações um número suficiente de vezes, poderá conjecturar quais são as posições frágeis e as posições seguras. As restantes farão parte da sua conjectura sobre as neutras.

No final deste processo você partiu o conjunto de todas as posições em três conjuntos, $\mathbb{I}$, $\mathbb{F}$ e $\mathbb{N}$, e conjectura que tratar-se, respectivamente, dos conjunto das posições inatacáveis, frágeis e neutras do jogo em análise. Repare que pode não seguir o processo sistemático acima descrito, pode simplesmente dizer: "*Eureka*! A minha conjectura é que $\mathbb{S} = [...]$, $\mathbb{F} = [...]$ e $\mathbb{N} = [...]$". O problema, agora, é como confirmá-la. Claro que a sua conjectura deve satisfazer alguns requisitos mínimos obrigatórios, entre os quais os óbvios:

> *Toda a posição pertence a um e um só dos seus conjuntos* $\mathbb{I}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{N}$;
> *Toda a posição vitoriosa pertence a* $\mathbb{I}$;
> *Toda a posição de empate pertence a* $\mathbb{N}$.

Mas o principal é o que consta do seguinte:

Teorema 4.1 *A sua conjectura* $\mathbb{I}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{N}$ *sobre os conjuntos das inatacáveis, frágeis e neutras é correcta se, para além dos requisitos óbvios acima, os conjuntos conjecturados satisfazem as propriedades seguintes:*

I. *Para cada posição de* $\mathbb{F}$ *existe uma jogada que a transforma numa posição de* $\mathbb{I}$.

II. *Cada posição de* $\mathbb{I}$ *ou é vitoriosa ou todas as jogadas possíveis a transformam em posições de* $\mathbb{F}$.

III. *Cada posição de* $\mathbb{N}$ *ou é de empate ou existe uma jogada que a transforma numa posição de* $\mathbb{N}$. *Nenhuma posição de* $\mathbb{N}$ *pode transformar-se numa posição de* $\mathbb{I}$.

Demonstração. Quando você entrega ao seu adversário uma posição $\mathscr{P} \in \mathbb{I}$, por II ele não tem outro remédio senão produzir uma posição $\mathscr{P}' \in \mathbb{F}$; por I, você pode transformar $\mathscr{P}'$ numa posição de $\mathbb{I}$; assim, se você jogar bem, todas as posições da partida estão em $\mathbb{F} \cup \mathbb{I}$; portanto, não vai haver empate, e a vitória é sua, pois não há posições vitoriosas em $\mathbb{F}$. Todas as posições de $\mathbb{I}$ são, pois, inatacáveis. Como corolário, toda a posição de $\mathbb{F}$ é frágil por ser transformável numa posição de $\mathbb{I}$, que é inatacável.

Seja $Q \in \mathbb{N}$. Por absurdo, admitamos que Q é frágil; numa partida jogada com posição inicial Q, o primeiro jogador pode sempre entregar ao segundo posições inatacáveis; por III, o segundo pode sempre entregar ao primeiro posições dentro de $\mathbb{N}$; isto contraria o facto de a última posição estar em $\mathbb{I}$. Se Q fosse inatacável, o primeiro a jogar poderia transformá-la numa posição frágil em $\mathbb{N}$, o que vimos não ser possível. Portanto todas as posições de $\mathbb{N}$ são neutras e o teorema fica demonstrado. $\square$

Num jogo sem empates, a sua conjectura não deve incluir neutras, *i.e.*, o conjunto $\mathbb{N}$ é vazio. Nesse caso, das condições do teorema pode retirar III.

5 Exemplos

5.1 Objectivos

Para cada jogo proposto cumpra o seguinte programa:

(a) Simplifique o mais possível o estado do jogo.

(b) Por tentativas, por experimentação, por análise de muitos casos, começando com os mais simples num crescendo de complexidade, faça uma conjectura sobre quais são as posições seguras e as frágeis.

(c) Mostre que a descrição matemática conjecturada em (b) satisfaz as propriedades características I-II-III das inatacáveis, frágeis e neutras. Se esse teste falhar, deverá regressar ao ponto (b) para melhor conjectura.

(d) Descreva uma estratégia para vencer.

5.2 Jogos propostos

Cada jogo é um problema para resolver. Mesmo quando nada se pergunte, está subentendido que se pede a "resolução" do jogo, isto é, a determinação do estado, das posições frágeis e inatacáveis, e das estratégias de vitória. Cada problema leva umas tantas estrelas, $* * \ldots$, que indicam o grau de dificuldade que lhe atribuo.

7. *Trinta e um de boca.* Dois jogadores jogam alternadamente, dizendo números naturais. O primeiro jogador diz um dos números 1, 2 ou 3. Na sua vez de jogar, cada jogador adiciona 1, 2 ou 3 ao número dito pelo seu adversário, e diz o resultado da adição. Não é permitido ultrapassar 31. Ganha quem primeiro disser "trinta e um". $*$

8. *Tirar uma ou duas de um só monte.* Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de um monte de 2007 pedras. Na sua vez de jogar, cada jogador tira 1 ou 2 pedras do monte. Ganha quem tirar a última. $*$

9. *Tirar uma ou quatro de um só monte.* Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de um monte de 1000 pedras. Na sua vez de jogar, cada jogador tira 1 ou 4 pedras do monte. Ganha quem tirar a última. $*$

10. *Tirar duas ou três de um só monte.* Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de um monte. Cada jogador tem que tirar 2 ou 3 pedras. Perde o primeiro jogador que não possa jogar. $*$

11. *Tirar de dois montes.* [*O 'Nim' de dois montes*, de Charles Bouton, 1901] Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de dois montes de pedras. Em cada vez que lhe caiba jogar, cada jogador escolhe um dos dois montes e tira quantas pedras quiser desse monte, apenas desse, e pelo menos uma. Ganha quem tirar a última pedra. $**$

12. *Tirar uma ou duas de dois montes.* O mesmo que o anterior, mas apenas se podendo tirar 1 ou 2 pedras em cada jogada. Ganha quem tirar a última pedra. $**$

13. *Jogos de tirar assimétricos.* Dois jogadores, A e B, jogam alternadamente, tirando pedras de um monte, sendo A o primeiro a jogar.

    Jogo I. Em cada jogada, A tem que tirar 1 ou 4 pedras, e B tem que tirar 2 ou 3 pedras. Perde o primeiro jogador que não possa jogar. $***$

    Jogo II. Idem, mas onde A tem que tirar 3, 4 ou 5 pedras, e B tem que tirar 2, 3 ou 4 pedras. $***$

    Jogo III. Idem, mas onde A tem que tirar 3, 6 ou 7 pedras, e B tem que tirar 2, 6 ou 7 pedras. $***$

    Jogo VI. Idem, mas onde A tem que tirar 1, 4 ou 5 pedras, e B tem que tirar 2, 5 ou 6 pedras. $***$

14. ***Um cavalo para dois.*** Num tabuleiro $n \times n$ há um cavalo que salta como no Xadrez, não podendo saltar para fora do tabuleiro. Inicialmente está na

casa (n, n), o canto nordeste do tabuleiro. Em cada jogada, os jogadores A e B, alternadamente, fazem o cavalo dar um salto com restrições indicadas em cada alínea. Em cada partida, perde o primeiro que não possa jogar.

Jogo I. A e B fazem o cavalo saltar (i) duas casas para Sul e uma para Este ou Oeste, ou (ii) duas casas para Oeste e uma para Norte ou Sul. Quem tem estratégia para ganhar, no caso em que a casa inicial é (n, n)? E se a casa inicial é $(n-2, n)$? $***$

Jogo II. A salta duas casas para Sul e uma para Este ou Oeste; B salta duas casas para Oeste e uma para Norte ou Sul. Quem tem estratégia para ganhar, supondo que a casa inicial é (n, n)? $***$

15. *Tirar feijões duma quadrícula.* (a) Num tabuleiro rectangular com m e n colunas, estão dispostos mn pedras, uma em cada quadradinho. Em cada jogada, cada jogador retira todos os feijões que estejam colocados numa fila, linha ou coluna à escolha do jogador. Ganha quem tirar o último feijão. $**$

    (b) O mesmo que (a) com a seguinte alteração: quando sobrar apenas uma fila, cada jogador pode retirar apenas um ou dois feijões dessa fila. $***$

    (c) Parecido com (a), com a seguinte alteração: cada jogador retira um feijão X e todos os que se encontrem na linha de X à esquerda de X e os da coluna de X abaixo de X. Perde quem retirar o último feijão. $*****\ldots$

    (d) Tal como (c) mas, em cada jogada, para além dos feijões que (c) manda retirar, retiram-se todos os que estejam abaixo daqueles que (c) manda retirar. $*****\ldots$

16. *Tirar de vários montes.* [*Jogo do 'Nim'*, de Charles Bouton, 1901] Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de vários montes de pedras. Em cada vez que lhe caiba jogar, cada jogador escolhe um dos montes e tira quantas pedras quiser desse monte, apenas desse, e pelo menos uma. Ganha quem tirar a última pedra. $*****$

17. *Tirar uma ou duas de vários montes.* O mesmo que o anterior, mas apenas se podendo tirar 1 ou 2 pedras em cada jogada. Ganha quem tirar a última pedra. $***$

18. *Brancas e negras em vai-vem.* [Conway, Guy, Belerkamp] Num tabuleiro de xadrez estão 8 pedras brancas e 8 negras. Em cada linha há uma branca e uma negra, a branca à esquerda da negra. Em cada jogada, o jogador das brancas [tal como o das negras] apenas pode mover uma das suas pedras, para a esquerda ou para a direita; essa pedra tem de mover-se de pelo menos

uma casa e não pode saltar por cima da pedra adversária na mesma linha. Perde o primeiro que não possa jogar de acordo com estas regras. $*****$

19. *Tirar de um só monte até mais uma que o parceiro.* Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de um monte de 2007 pedras. Na abertura do jogo, o primeiro jogador tira 1 ou 2 pedras. Sempre que um jogador tira k pedras, o outro, na jogada a seguir, pode tirar $1, 2, \ldots, k$ ou $k + 1$ pedras. Ganha quem tirar a última. Determine qual deles tem estratégia para vencer, e qual pode ser essa estratégia. $***$

20. *Tirar de um só monte, sem repetir a jogada anterior.* [*XV Olimpíada IAM*, Caracas, 2000] Dois jogadores jogam alternadamente, tirando pedras de um monte de 2000 pedras. Cada jogador tem que tirar 1, 2, 3, 4 ou 5 pedras. Em cada jogada [excepto na primeira] o jogador não pode tirar o mesmo número de pedras tiradas pelo adversário na jogada anterior. Perde o primeiro jogador que não possa realizar uma jogada válida. Determinar qual jogador tem estratégia ganhadora e encontrá-la. $****$

21. *Tirar de um só monte, sem repetir a jogada anterior. Episódio 2.* Quais os tamanhos dos montes iniciais, para os quais o primeiro a jogar não tem estratégia para vencer? $*$, depois de resolvido o problema anterior.

22. *Dois numa bicicleta.* Dois amigos, A e B, viajam na mesma bicicleta e revezam-se a pedalar. As etapas da viagem numeram-se por ordem: etapa 1, etapa 2, etapa 3, etc.. O condutor A pedala nas etapas ímpares, e B nas etapas pares. Na etapa k o pedalante de serviço tem que pedalar um número natural de quilómetros não superior a k. A viagem faz-se sempre para a frente, sem recuar. Ganha o que for a pedalar quando chegarem ao destino que fica a 2008 km do ponto de partida. Qual deles tem estratégia para ganhar o jogo? Qual é essa estratégia? $****$

23. *Dois numa bicicleta, percorrendo distâncias reais.* O mesmo que o problema anterior, com a diferença que, na etapa k, o pedalante de serviço pode e tem que pedalar qualquer distância real entre 1 e k quilómetros. $****$

24. *Tirar de um só monte até ao dobro do que o parceiro tirou.* Situação análoga à do jogo 19, excepto que cada jogador tem que tirar pelo menos 1 pedra, mas não mais do que o dobro das que foram retiradas na jogada anterior. Ganha quem tirar a última. $*****$

25. *Jogo das bandeiras.* [*XXII Olimpíada IAM*, Coimbra, 2007] Duas equipas, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, disputam o território delimitado por uma circunferência.

$\mathscr{A}$ tem n bandeiras azuis e $\mathscr{B}$ tem n bandeiras brancas ($n \geqslant 2$, fixo). Jogam alternadamente e $\mathscr{A}$ começa o jogo. Cada equipa, na sua vez, coloca uma das suas bandeiras num ponto da circunferência que não se tenha usado numa jogada anterior. Cada bandeira, uma vez colocada, não se pode mudar de lugar.

Uma vez colocadas as $2n$ bandeiras, reparte-se o território entre as duas equipas. Um ponto do território é da equipa $\mathscr{A}$ se a bandeira mais próxima dele é azul, e é da equipa $\mathscr{B}$ se a bandeira mais próxima dele é branca. Se a bandeira azul mais próxima de um ponto está à mesma distância que a bandeira branca mais próxima desse ponto, então o ponto é neutro (não é de $\mathscr{A}$ nem de $\mathscr{B}$). Uma equipa ganha o jogo se os seus pontos cobrem uma área maior que a área coberta pelos pontos da outra equipa. Há empate se ambas cobrem áreas iguais.

Demonstre que, para todo o n, a equipa $\mathscr{B}$ tem estratégia para ganhar o jogo. $*****$

26. * *Jogo das bandeiras. Episódio 2.* A equipa $\mathscr{A}$, prevendo que o chefe da equipa $\mathscr{B}$ fosse campeão, decidiu mostrar que a sua equipa seria capaz de cumprir o seguinte desafio lançado aos brancos: podeis ganhar, mas não será por muito... escolham um número positivo tão pequeno quanto queiram; nós conseguiremos que a diferença de áreas entre os nossos territórios seja menor do que o número que escolheram. Como pode $\mathscr{A}$ cumprir a promessa? $*$ [Problema fácil... depois de resolvido o anterior!]

27. *Jogo das bandeiras. Episódio 3.* Determinar as jogadas frágeis, seguras e neutras de cada uma das equipas. $******$

28. *Tirar coelhos à Fibonacci.* Dois jogadores, alternadamente (e com muita rapidez!), tiram coelhos duma coelheira. Na primeira jogada de cada jogador (*i.e.*, nas duas primeiras jogadas do jogo) cada um tira um coelho. Depois disso, cada jogador tem que tirar pelo menos um coelho, mas não mais do que o total de coelhos tirados nas duas jogadas anteriores. Ganha quem tirar o último coelho. $******\ldots$

29. *Perde-ganha.* Cada jogo proposto tem uma versão *perde-ganha* ou versão "*misère*"como também refere a literatura. A diferença é haver uma inversão do critério de vitória: jogando-se ao perde-ganha, perde quem ganharia na versão primitiva do jogo. Descubra estratégias para o perde-ganha em cada um dos jogos propostos.

5.3 Comentários e soluções

Sobre a posição ou estado dum jogo

A primeira coisa a decidir no estudo dum jogo é como modelar matematicamente a posição ou estado do jogo. Por exemplo, no jogo 7, basta sabermos o número que acabou de ser dito para sabermos se a posição é frágil ou segura. Portanto, podemos identificar a posição do jogo como sendo o número dito. Em cada um dos jogos 8 e 9, a posição do jogo pode identificar-se com o número de pedras existente no monte, que vai diminuindo à medida que o jogo avança. Nestes três jogos, os dois jogadores estão em posição simétrica, *i.e.*, as regras de tirar são as mesmas para ambos.

Mas isso não acontece no jogo 13. A assimetria deste jogo tem consequências drásticas, por exemplo: um monte com 1 pedra é frágil se for A a jogar, mas é inatacável se for B a jogar; um monte com 3 pedras é inatacável se for A a jogar, mas é frágil se for B a jogar. Aqui, a posição do jogo não pode identificar-se com o número de pedras presentes; temos que dizer qual dos dois jogadores joga sobre ele — aquele que pode tirar 1 ou 4 pedras, ou o que pode tirar 2 ou 3. O melhor modelo matemático duma posição é, pois, um par ordenado (n, J), em que n é o número de pedras (um inteiro não-negativo) e J é o jogador, A ou B, que vai jogar.

Nos jogos 11 e 12, os jogadores estão em posição simétrica pelo que não vale a pena incluir na definição de "posição"qual deles vai jogar: quando uma posição é frágil (ou segura) ela é-o para ambos. A posição é identificada pelo par ordenado (m, n), em que $m \leqslant n$ são os números de pedras existentes nos montes. Nos jogos com regras análogas, mas que envolvem três montes de pedras, a posição do jogo será identificada pelo trio ordenado dos cardinais dos montes, (m, n, p), com $m \leqslant n \leqslant p$ (ou outra ordem qualquer).

Nos jogos 19, 20 e 28, as coisas complicam-se quanto ao conceito de 'posição' ou 'estado' do jogo. Apesar de serem simétricos (o que dispensa incluir na definição de estado a referência a quem vai jogar) as regras de tirar são *dinâmicas*, variam com a evolução do jogo. Nos jogos 19 e 24, definimos *posição* (ou *estado*) como sendo o par ordenado (n, t), em que $n \geqslant 0$ é o número de pedras na mesa e t é o número máximo de pedras retiráveis para quem vai jogar. Se, na posição (n, t), um jogador tirar τ pedras ($\tau \leqslant t$), então:

No jogo 19, (n, t) *transforma-se em* $(n - \tau, \tau + 1)$*;*

No jogo 24, (n, t) *transforma-se em* $(n - \tau, 2\tau)$.

No jogo 20 podemos adoptar como *estado* do jogo o par ordenado (n, r), onde $n \geqslant 0$ é o número de pedras na mesa e r ($r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) é o número de pedras retiradas pelo adversário na jogada anterior. Note que quem vai jogar sobre (n, r) não pode tirar r pedras. Se o jogador tirar s pedras, $s \neq r$, o estado passa a ser $(n - s, s)$.

O jogo 28 é um pouco mais complicado, pois o estado do jogo deve conter a memória das duas jogadas anteriores à que vai ser feita. O estado pode, pois, ser modelado como um trio ordenado, (n, a, b), onde $n \geqslant 0$ é o número de pedras na mesa, a e b são os números de pedras retiradas na penúltima e última jogadas, respectivamente. Se um jogador tira, nessa posição, c pedras ($c \leqslant a + b$), a posição transforma-se em $(n - c, b, c)$.

Tabela dum jogo

Trata-se da tabela de valores da função que transforma uma posição $\wp$ num dos termos '*segura*' ou '*frágil*', conforme a classificação de $\wp$. É um instrumento sistemático de determinação dos estados frágeis e inatacáveis e de estratégias de jogo, que deve ser utilizado no cumprimento do objectivos programáticos da página 12, para orientação da parte experimental deste jogo de descoberta. É importante que seja desenhada de forma limpa, sem emendas, de preferência em papel quadriculado.

No seguimento, apresento diversas tabelas, onde preferi usar os símbolos '+' e '−' em vez de '*segura*' e '*frágil*', respectivamente. Em alguns casos cumprir-se-ão pormenorizadamente as três etapas, (a)-(b)-(c), do programa estabelecido na página 12.

Jogo 8. *Tirar uma ou duas de um só monte.*

(a) O estado do jogo pode dispensar o jogador que joga, por se tratar de um jogo imparcial. Dispensa também a referência às jogadas possíveis, pois elas não variam ao longo do jogo. Assim, o estado (ou posição) pode identificar-se pelo número de pedras do monte.

(b) A tabela do jogo tem duas linhas infinitas: na primeira representam-se as posições $\mathscr{P}$ (inteiros não negativos), na segunda vão os respectivos símbolos

$+$ e $-$ (denotando inatacáveis e frágeis):

$\mathscr{P}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\pm$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	...

O padrão é óbvio: os múltiplos de 3 são inatacáveis, os outros são frágeis.

(c) Se quisermos ser rigorosos (não vale a pena num caso tão óbvio) podíamos verificar as propriedades características do teorema 4.1 para a conjectura acima feita.

(d) A estratégia para quem jogue sobre uma posição frágil é tirar uma ou duas, sempre que o adversário tire duas ou uma. Etc..

Jogo 9. *Tirar uma ou quatro de um só monte.*

(a) Como no problema 8, o estado pode reduzir-se ao número de pedras do monte.

(b) A tabela do jogo é a seguinte:

$\mathscr{P}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
$\pm$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	...

Há um padrão muito regular: a sequência de 5 símbolos $+-+--$ repete-se periodicamente, o que conduz à conjectura sobre o conjunto dos estados inatacáveis:

$$\mathbb{S} = \{n \in \mathbb{N}_0 : \ n \bmod 5 = 0 \quad \text{ou} \quad n \bmod 5 = 2\}.$$

e $\mathbb{F}$ é o complementar de $\mathbb{S}$ em $\mathbb{N}_0$.

(c) A verificação das quatro alíneas teorema 4.1 não oferece dificuldade. Portanto os conjuntos conjecturados em (b) são mesmo os dos estados frágeis e inatacáveis deste jogo.

(d) Como $1000 \equiv 0 (\bmod 5)$, a posição de arranque do jogo é segura, *i.e.*, o jogador A, que começa, vai perder se B cumprir a seguinte estratégia. B consegue sempre transformar uma posição n frágil numa posição segura, pelo seguinte processo (que já deveria ter sido referido em (c)!):

Se $n \bmod 5 = 1$, B tira uma ou quatro pedras.
Se $n \bmod 5 = 3$, B tira uma pedra.
Se $n \bmod 5 = 4$, B tira quatro pedras.

Jogo 10. *Tirar duas ou três de um só monte.*

A posição do jogo identifica-se, apenas, pelo número de pedras no monte. Há duas posições vitoriosas: 0 e 1. A tabela preenche-se da esquerda para a direita, das posições mais simples para as mais complicadas. As duas primeiras posições, 0 e 1, são vitoriosas, daí os dois primeiros sinais $+$. Para cada uma das posições $2, 3, 4$, *existe* uma jogada que a transforma numa posição marcada com $+$; portanto $2, 3, 4$ levam sinais $-$. A posição 5 leva sinal $+$, porque *todas* as jogadas permitidas a transformam em posições que já foram marcadas com $-$. Etc., etc..

$\mathscr{P}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$\pm$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	...

Note-se que, neste caso muito simples, nem sequer foi preciso jogar com pedras ou fósforos... tudo se reduziu a uma combinatória executada para preenchimento da tabela. A conjectura é óbvia: as posições seguras são as que têm resto 0 ou 1 na divisão inteira por 5. Não havendo empates, conjectura-se que as outras posições (de restos 2, 3 e 4, na divisão por 5) são frágeis. E a conjectura pode verificar-se mediante o teorema 4.1.

Nota sobre o método. Pensemos num jogo em que cada jogada transforma cada posição numa posição mais simples.[7] Se tivermos a preocupação de preencher cada tabela dos estados mais simples para os mais complicados, o preenchimento da tabela pode transformar-se num mero *puzzle* combinatório montado sem sequer pensarmos no jogo-jogado. Por exemplo, no caso dos jogos sem empates, basta aplicarmos mecanicamente as alíneas $(a), (b), (c)$ do teorema 4.1, as quais, na linguagem dos $\pm$ da tabela se traduzem por:

$$\left.\begin{array}{l}\text{As posições vitoriosas têm sinal } +\\ \mathscr{P} \text{ tem sinal } - \text{ sse existe uma jogada que transforma } \mathscr{P} \text{ numa posição } +\\ \mathscr{P} \text{ tem sinal } + \text{ sse todas as jogadas transformam } \mathscr{P} \text{ numa posição } -.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Repare-se que, quando jogamos sobre $\mathscr{P}$, esta transforma-se numa posição *mais simples* que, por isso, já tem valor $\pm$ atribuído na tabela.

[7]Em quase todos os jogos verdadeiramente interessantes, certas jogadas complicam a posição, às vezes de forma drástica. Por exemplo: *Três-em-linha* (*K-em-linha*), *Hex*, *Reversi* (também conhecido por *Tiago* ou *Otelo*, em referência ao negro-branco da peça de Shakespeare), *Damas*, *Xadrez*, *Go*, etc..

Jogo 11. *Tirar de dois montes.*

Trata-se de um caso particular dum jogo de 'Nim' bem conhecido. Este caso tem solução elementar que ilustra bem o método geral em causa.

(a) A posição do jogo fica inteiramente caracterizada pelos cardinais dos dois montes, *i.e.*, por um par (m, n) de inteiros não negativos.

(b) Portanto a tabela do jogo é de duas entradas. Aqui vão as suas 6 primeiras linhas e colunas:

	0	1	2	3	4	5
0	+	−	−	−	−	−
1	−	+	−	−	−	−
2	−	−	+	−	−	−
3	−	−	−	+	−	−
4	−	−	−	−	+	−
5	−	−	−	−	−	+

Note-se que (m, n) e (n, m) representam, essencialmente, a mesma posição, pelo que a tabela é simétrica relativamente à diagonal principal. A tabela pode construir-se por análise caso a caso num crescendo de complexidade. Primeiro, determinam-se as primeiras linha e coluna, que são triviais. Depois determinam-se as segundas linha e coluna, o que também não é difícil. Pode imediatamente passar-se ao processo indutivo: uma vez desenhadas as primeiras k linhas e colunas, pensamos nos símbolos que falta colocar na linha $k+1$ e coluna $k+1$. A posição $(k+1, k+1)$ é segura, porque *qualquer jogada* que se faça sobre ela transforma-a numa posição da tabela onde já está colocado um sinal $-$ (de fragilidade); portanto, na posição $(k+1, k+1)$ pode colocar-se $+$. Para cada posição na coluna (ou linha) $k+1$ fora da diagonal, *existe uma jogada*[8] que a transforma numa posição diagonal onde já está colocado o símbolo $+$; portanto a tal posição fora da diagonal da matriz leva o sinal $-$.

A conjectura é óbvia: as posições seguras constituem o conjunto $\mathbb{S}$ das (m, n) com $m = n$. As frágeis constituem o conjunto $\mathbb{F}$ das (m, n) com $m \neq n$.

(c) A verificação da conjectura mediante o teorema 4.1 é muito simples: só há uma posição vitoriosa, que é $(0, 0)$, e ela pertence a $\mathbb{S}$. Se $(m, n) \in \mathbb{F}$, então satisfaz $m \neq n$; se, por exemplo, $m < n$, existe uma (e, por acaso, uma só) jogada que a transforma em (m, m), e esta está em $\mathbb{S}$. Dado $(m, m) \in \mathbb{S}$,

[8] Repare na quantificação!

qualquer jogada transforma (m, m) num par de elementos distintos, que por isso pertence a $\mathbb{F}$. Não havendo empates, não existem neutras.

(d) A estratégia para ganhar o jogo é óbvia: jogue de modo a entregar ao adversário uma posição inatacável, *i.e.*, com dois montes de cardinais iguais.

Jogo 12. *Tirar uma ou duas de dois montes.*

Como no jogo anterior, a posição do jogo pode identificar-se por um par (m, n) de inteiros não negativos.

Trata-se de uma generalização do jogo 8: quando um dos montes fica vazio, estará a jogar o jogo 8 o que justifica que aprenda a jogar o jogo de um só monte antes de tentar jogar o dos dois montes. Por outro lado, o jogo actual é parecido com o 'Nim' de dois montes. É natural conjecturar alguma relação entre esses dois jogos e o que temos entre mãos.

Com um só monte, as posições seguras reduzem-se aos múltiplos de 3. No 'Nim' de dois montes, a estratégia é a de tentar igualar os dois montes. No caso presente essa igualização não pode conseguir-se caso os montes difiram em mais de duas pedras. Mas não custa experimentar a estratégia de *igualar os montes módulo* 3. Trata-se de um salto intuitivo arriscado, que não custa testar via teorema 4.1. A nossa conjectura é, então, a seguinte: $\mathbb{S}$ é o conjunto das posições (m, n) com m, n congruentes módulo 3, e $\mathbb{F}$ é o conjunto das restantes (pois não há neutras, claro). Deixo a seu cargo verificar as alíneas $(a), (b), (c)$ do teorema 4.1.

Em alternativa, pode seguir o caminho mais seguro utilizado na resolução do jogo anterior. A tabela do jogo é de duas entradas e as primeiras experiências conduzem ao seguinte:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
1	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−
2	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−
3	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
4	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−
5	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−
6	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
7	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−
8	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−
9	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+

Foi precisa uma tabela um pouco maior que a anterior para que o padrão de regularidade se revele com clareza. Dela poderá tirar as conclusões adequadas, em particular que as posições seguras são as de montes congruentes módulo 3.

Jogo 13. *Jogo de tirar assimétrico.* Apenas se considera o Jogo I.

A parcialidade (ou assimetria) destes jogos obriga a incluir no estado a referência a quem joga. Não é preciso explicitar (no estado) as jogadas possíveis, pois essas não variam no decorrer de cada partida. O estado pode, pois, ser do tipo (n, X), onde n é o número de pedras ainda no monte e X é o jogador que vai jogar sobre elas. A tabela do jogo é de duas entradas, e as primeiras experiências produzem o seguinte

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
A	+	−	−	+	−	−	+	+	−	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	...
B	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	...

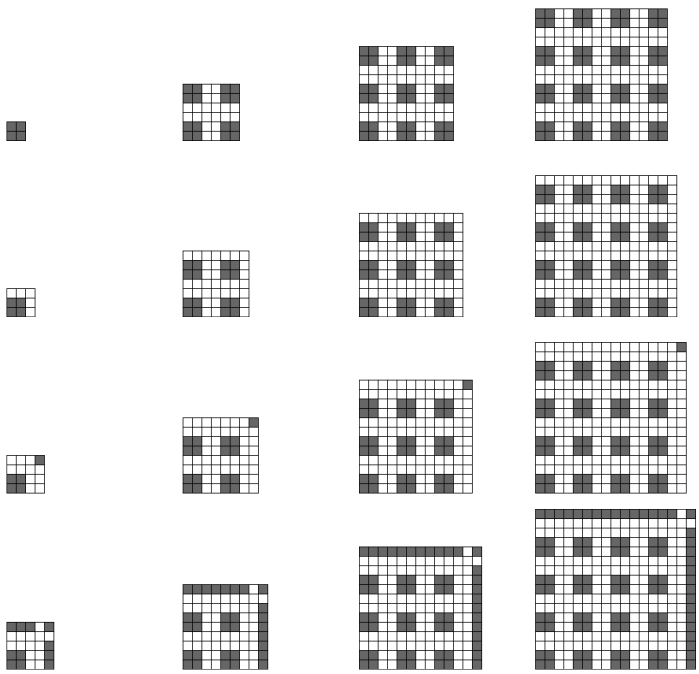
A tabela pode construir-se de acordo com o método recomendado na página 10. Os primeiros sinais a colocar são os $+$ das vitoriosas, em $(0, A)$, $(0, B)$ e $(1, B)$. Os outros vão-se colocando ordenadamente, da esquerda para a direita. Pode fazer a coisa mecanicamente, com a mnemónica (2) da página 20, notando que uma posição (n, A) se transforma, com uma só jogada, numa posição (m, B), e reciprocamente; portanto os sinais da linha A constroem-se à custa dos da linha B, e reciprocamente.

O padrão $\pm$ mostra características interessantes: após um começo irregular nas 12 primeiras colunas, o padrão passa a periódico de período 1; para montes iniciais com 12 ou mais pedras, o primeiro a jogar perderá sempre, se o segundo souber o que fazer.

Nota importante. Ao construir a tabela, o período 1 começa a tornar-se aparente a partir de $n = 14$. Mas *tem de preencher a tabela até* $n = 16$ para ter a certeza matemática dessa regularidade; tal certeza deve-se ao facto de ser 4 o máximo de pedras retiráveis em cada jogada.

Jogo 14, I. *Um cavalo para dois.* A e B fazem o cavalo saltar: (i) duas casas para Norte e uma para Este ou Oeste, ou (ii) duas casas para Este e uma para Norte ou Sul. A tabela do jogo pode fazer-se sobre o próprio tabuleiro $n \times n$, denotado $\mathscr{T}_n$, preenchendo a negro as posições de tipo s e deixando as outras a branco. A figura seguinte mostra os 16 tabuleiros $\mathscr{T}_2, \ldots, \mathscr{T}_{17}$ já preenchidos. Em cada tabuleiro $n \times n$ é claro o seguinte padrão: *no sub-tabuleiro* $\mathscr{T}'_{n-1}$, *formado pelas linhas e colunas* $1, \ldots, n-1$ *de* $\mathscr{T}_n$,

($\diamond$) *São negras as casas* $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ *e todas as que resultam delas por translações de* $(4i, 4j)$.



Isto pode provar-se por meios aritméticos elementares. O problema reside, agora, no preenchimento das casas da linha n ou da coluna n. As 8 tabelas das duas primeiras linhas da figura mostram que os casos $n = 4k + 2$ e $n = 4k + 3$ satisfazem ($\diamond$) para *todo o tabuleiro.* Mas os casos $n = 4k$ e $n = 4k + 1$ são irregulares devido ao facto de o cavalo não poder saltar para fora do tabuleiro. Uma vez provado ($\diamond$) para o sub-tabuleiro $\mathscr{T}'_{n-1}$, prova-se facilmente uma descrição completa das tabelas para todos os valores de n. E daí se tiram as consequências seguintes:

> *Com o cavalo na posição inicial* (n, n), *o primeiro jogador tem estratégia para ganhar sse* $n = 4k + 3$. *Se a posição inicial é* $(n, n - 2)$, *o segundo jogador tem estratégia para ganhar sse* $n = 4k + 1$.

Jogo 14, II. *Um cavalo para dois.* Caso em que A salta duas casas para Sul e uma para Este ou Oeste; B salta duas casas para Oeste e uma para Norte ou Sul. A casa inicial é (n, n).

Dizemos que *A joga para Oeste* quando desloca o cavalo de 2 casas para Sul e 1 para Oeste; dizemos que *B joga para Sul* quando desloca o cavalo de 2 casas para Oeste e 1 para Sul. Claro que A tem interesse em jogar para Oeste, pois se o cavalo atingir a coluna 2, B não poderá jogar. Do mesmo modo, interessa a B jogar para Sul.

Na primeira jogada, A é obrigado a pôr o cavalo na casa $(n - 2, n - 1)$. Admitamos que B joga sempre para Sul. Com esta estratégia de B, em cada par de jogadas (A-B) o cavalo desce 3 linhas para Sul, e desloca-se 1 ou 3 colunas para Oeste. Se A jogar alguma vez para Este, perde (pois B conseguirá colocar o cavalo numa das duas linhas de baixo). Portanto, A só poderá aspirar a ganhar jogando sempre para Oeste; nessas condições, o cavalo ocupará sucessivamente as casas

$$(n, n), (n - 2, n - 1), (n - 3, n - 3), (n - 5, n - 4), (n - 6, n - 6), \ldots$$

Com esta estratégia, B ganha se n não é múltiplo de 3. Quando n é múltiplo de 3, a estratégia de B de jogar sempre para Sul não funciona; nem nenhuma outra funciona, pois, como facilmente se reconhece, A ganha adoptando a estratégia de jogar sempre para Oeste.

A tabela do jogo. As posições do jogo são trios ordenados, (X, i, j), onde X é o jogador que joga ($X \in \{A, B\}$), e (i, j) é a casa onde está o cavalo antes de X jogar. Para cada posição (X, i, j) teremos de calcular o valor, s ou p, da posição. Isto produz duas tabelas: uma para $X = A$ e outra para $X = B$; as duas primeiras da figura.

						A	A	A
						A	A	A
						A	A	A
			A	A	A	A	A	A
			A	A	A	A	A	A
			A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A

B	B	B	B	B	B	B	B	
B	B	B	B	B	B	B	B	
B	B	B	B	B	B	B	B	
B	B	B	B	B				
B	B	B	B	B				
B	B	B	B	B				
B	B							
B	B							
B	B							

B	B	B	B	B	B	B	B	
B	B	B	B	B	B	AB	AB	A
B	B	B	B	B	B	AB	AB	A
B	B	B	B	B		A	A	A
B	B	B	AB	AB	A	A	A	A
B	B	B	AB	AB	A	A	A	A
B	B		A	A	A	A	A	A
AB	AB	A	A	A	A	A	A	A
AB	AB	A	A	A	A	A	A	A

Na primeira, colocou-se a letra A nas casas (i, j) para as quais (A, i, j) é posição de tipo s. Na segunda fez-se o mesmo para B. A terceira é sobreposição das duas primeiras. De acordo com isto, o jogador A procura, em cada jogada sua, colocar o cavalo numa casa que contenha o símbolo "B"; e analogamente para B. Note-se, na terceira tabela, a indicação de que as casas $(3n, 3n)$ são de tipo p, para ambos os jogadores (o primeiro a jogar ganha).

Jogo 16. *Tirar de vários montes.*

Trata-se de um jogo famoso inventado e de estratégia resolvida por Charles Bouton, em 1901. O autor chamou-lhe "*game of nim*" que literalmente significa "jogo de tirar". Sobre o assunto existe uma literatura muito vasta, especialmente sob forma digital.

A grande dificuldade do *nim* reside no facto de o estado ser muito complexo. Dado tratar-se de um jogo imparcial, o estado dispensa a referência ao jogador que vai jogar. Mas, se houver k montes de pedras, que numeramos de 1 a k, os estados são da forma $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, onde n_i é o número de pedras no monte número i. Claro que, quando algum n_i se anula no decorrer do jogo, o estado poderá simplificar-se reduzindo o número de coordenadas... mas não vale a pena, pois a simplificação não é significativa.

A tabela de um *nim* de k montes é, pois, uma tabela de k entradas. A "observação" das suas regularidades terá de fazer-se num espaço de k dimensões. A recomendação é que se desista desse processo de adivinhação. A resolução de um problema matemático valerá tanto mais quanto mais difícil for chegar a uma conjectura e quanto mais distante estiver a conjectura da formulação inicial do problema. É o que acontece com o teorema de Bouton:

a demonstração é fácil, o que espanta é ter-se chegado a conjecturará-lo.[9]

Escrevam-se os inteiros $n_1, n_2, \dots, n_k$ na base 2, e coloquem-se esses k números binários numa pilha de k linhas ajustadas à direita (como costumamos fazer para somar k números) a que chamamos a pilha binária da posição $(n_1, n_2, \dots, n_k)$. O aspecto da pilha será o que se ilustra com a posição 'nim' $(48, 25, 7, 52, 3)$ que, na base 2 se escreve $(110000, 11001, 111, 110100, 11)$ e produz a pilha:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 1
\end{array} \tag{3}$$

Note-se que uma posição *nim* pode ser identificada pela sua pilha binária.

Teorema 5.1 *Uma posição 'nim' é segura se a sua pilha binária tem um número par de* 1*'s em cada coluna. Se uma das colunas tem um número ímpar de* 1*'s, a posição é frágil.*

Demonstração. Apenas temos que verificar I e II do teorema 4.1, com $\mathbb{S}$ o conjunto das posições cujas pilhas binárias têm, em cada coluna, um número par de 1's, e $\mathbb{F}$ o conjunto das outras posições (note-se que a III tem verificação trivial por se tratar de jogo sem empates).

A única posição vitoriosa é a de todos os montes nulos; portanto vale (a). Fixada uma posição de $\mathbb{S}$, uma jogada sobre ela altera uma só linha da pilha binária; nessa linha, um dos 1's passa a ser 0, pelo que a coluna desse *bit* alterado passou a ter um número ímpar de 1's; portanto qualquer jogada sobre um elemento de $\mathbb{S}$ produz uma posição de $\mathbb{F}$.

Fixemos agora uma posição $\mathscr{P}$ de $\mathbb{F}$. Vamos mostrar a possibilidade de a transformar numa posição de $\mathbb{S}$ com apenas uma jogada. Há umas tantas colunas da pilha correspondente a $\mathscr{P}$ que têm um número ímpar de 1's; sejam elas $c_1, \dots, c_m$, a contar da esquerda. Seja ℓ uma das linhas de entre as que

[9] Em certos problemas matemáticos, surgem conjecturas credíveis de modo simples e natural, como a de Goldbach que aposta na existência duma infinidade de pares de primos gémeos. O valor de tais problemas será tanto maior quanto mais difícil for provar ou infirmar a conjectura feita. Conjectura-se que a conjectura de Goldbach, se for verdadeira, venha a ter um desfecho dramaticamente complexo.

têm 1 na coluna c_1; alterem-se, nessa linha da pilha, os *bits* das colunas $c_1, \ldots, c_m$. O número binário que assim se obtém é inferior ao que estava na linha ℓ, e a nova pilha pertence a $\mathbb{S}$.

> *Exemplo.* Na pilha (3) as colunas 2, 3 e 6 são as que têm um número ímpar de 1's. Há três linhas com 1 na coluna 2: as linhas 1, 2 e 4. Qualquer destas linhas pode ser reduzida de modo a que a nova pilha represente uma posição de $\mathbb{S}$. Assim, temos três jogadas seguras possíveis: transformar a linha 110000 em 101001; transformar a linha 11001 em 1; ou transformar a linha 110100 em 101101.

Jogo 17. *Tirar uma ou duas de vários montes.*

O estado do jogo é tão complexo quanto o 'nim' de G. Bouton. Mas a dificuldade do problema pode considerar-se baixa depois de se conhecer a solução desse jogo clássico (com a solução das pilhas binárias) e do jogo 12, que é caso particular do que temos entre mãos e que envolve a "leitura" *módulo* 3 dos números de pedras em dois montes. As dificuldades óbvias de construção duma tabela leva-nos a procurar, num salto intuitivo arriscado, uma conjectura plausível, a verificar posteriormente pelo teorema 4.1.

No jogo 12, dois montes constituem uma posição segura sse eles são *'iguais' módulo* 3, quer isto dizer que não temos que olhar o número de pedras em cada monte, mas apenas os seus restos módulo 3. O salto, agora, é este: havendo k montes com $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pedras, seja r_i o resto da divisão de n_i por 3. A nossa aposta é que $(n_1, \ldots, n_k)$ é posição segura deste jogo se e só se $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ é posição segura do 'nim' de Bouton.

Dito de outro modo, a nossa conjectura é que o conjunto $\mathbb{S}$ é constituído pelas posições $(n_1, \ldots, n_k)$ tais que os restos $r_1, r_2, \ldots, r_k$, depois de escritos na base binária e empilhados com alinhamento à direita, apresentam um número par de 1's em cada coluna. Toma-se para $\mathbb{F}$ o conjunto das outras posições.

A única posição vitoriosa (0 pedras em jogo) pertence obviamente ao conjunto $\mathbb{S}$ conjecturado. Portanto, de acordo com o teorema 4.1, a conjectura, $\mathbb{S}$, $\mathbb{F}$, constitui uma descrição rigorosa das posições seguras e frágeis se provarmos que toda a posição de $\mathbb{S}$ só é transformável (por uma só jogada) em posições de $\mathbb{F}$, e para cada posição de $\mathbb{F}$ existe uma jogada que a transforma numa de $\mathbb{S}$. Os pormenores desta prova (muito parecida com a do teorema 5.1) ficam a cargo do leitor.

Jogo 19. *Tirar de um só monte até mais uma que o parceiro.*

É um jogo em que o estado, ou posição, pode dispensar a indicação de quem joga, mas tem que incluir a referência às jogadas possíveis. Um dos modos de o representar é por um par, (n, r), em que $n \geqslant 0$ é o número de pedras na mesa e $r \geqslant 1$ é o número de pedras retiradas na jogada anterior; assim, o jogador que joga sobre a posição (n, r) pode retirar até $r + 1$ pedras. A tabela do jogo é de duas entradas; a figura seguinte dá um esboço das suas primeiras linhas. Cada coluna diz respeito a um valor fixo de r e cada linha a um valor fixo de n. No processo de construção da tabela vão-se observando algumas características que interessa reter. Se uma posição (n, r) é frágil, todas as posições (n, R) são frágeis para $R \geqslant r$; isto é, uma vez colocado um sinal $-$, todos os sinais à sua direita na mesma linha são $-$. Para poupar esforço, não se marcaram os sinais $-$; eles ocupam todas as posições não marcadas no extracto da tabela.

Nesta representação as linhas $n \in \{5, 10, 20, 40\}$ são "longas", *i.e.*, nelas ocorrem $n - 2$ sinais $+$ consecutivos. Podemos conjecturar que o mesmo se passa com todas as linhas da forma $n = 5 \cdot 2^k$. Mas não é muito claro o padrão de posicionamento dos restantes sinais $+$. No entanto, vendo bem, o que nos interessa é saber quem tem estratégia vencedora para um monte inicial de n pedras. No início do jogo, a posição é $(n, 1)$. Para resolver a questão, basta, pois, olhar para a coluna $r = 1$; ela apresenta sinais claros de periodicidade que tornam natural a seguinte

> **Conjectura.** *As posições iniciais inatacáveis são $(n, 1)$, com n congruente com 0 ou 3 módulo 5. As restantes posições iniciais são frágeis.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	.	.	.										
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1																						
2																						
3	+																					
4																						
5	+	+	+																			
6																						
7																						
8	+																					
9																						
10	+	+	+	+	+	+	+	+														
11																						
12																						
13	+																					
14																						
15	+	+	+																			
16																						
17																						
18	+																					
19																						
20	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+				
21																						
22																						
23	+																					
24																						
25	+	+	+																			
26																						
27																						
28	+																					
29																						
30	+	+	+	+	+	+	+	+														
31																						
32																						
33	+																					
34																						
35	+	+	+																			
36																						
37																						
38	+																					
39																						
40	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

O problema é que, neste caso, não podemos provar a conjectura usando o teorema 4.1, dado que apenas conjecturámos sobre as frágeis e seguras da coluna 1; para usarmos o dito teorema teríamos de estabelecer uma conjectura abrangendo *todas* as posições do jogo.

Demonstração da conjectura. A prova pode fazer-se descobrindo uma estratégia de vitória do segundo jogador no caso de o monte inicial ter um número de pedras côngruo com 0 ou 3 módulo 5, e uma estratégia de vitória do primeiro jogador para os outros casos.

Ao construir a tabela, é inevitável observar o seguinte fenómeno válido nas primeiras 18 linhas: se (n, r) é frágil, existe uma jogada segura que consiste em retirar no máximo 3 pedras. Essas jogadas especiais são as seguintes (onde $\equiv$ denota congruência módulo 5):

$$\begin{array}{lcl} \text{se } n \equiv 1 & \rightsquigarrow & \text{tira 1 pedra;} \\ \text{se } n \equiv 4 & \rightsquigarrow & \text{tira 1 pedra;} \\ \text{se } n \equiv 2 & \rightsquigarrow & \text{tira 2 pedras;} \\ \text{se } n \equiv 3 & \rightsquigarrow & \text{tira 3 pedras.} \end{array} \tag{4}$$

Recorde que só é possível tirar 3 pedras se o adversário tiver tirado mais do que uma na jogada anterior. Esqueçamos a tabela e pensemos apenas na estratégia de jogo expressa em (4). Note que nem sempre é possível jogar de acordo com esta estratégia, havendo dois casos em que ela não funciona: quando $n \equiv 0$, e quando $n \equiv 3$ e a jogada anterior foi de retirada de 1 pedra.

Provemos que, se o jogador A usar esta estratégia jogando sobre uma posição $(n, 1)$, com $n \equiv 1, 2$ ou 4, ele ganha a partida. O que temos de provar é que A *pode sempre* jogar de acordo com (4), isto é, que B não pode entregar a A um monte côngruo com 0 e só pode entregar a A um monte côngruo com 3 retirando pelo menos 2 pedras.

Como $n \not\equiv 3$, A pode, na sua primeira jogada, jogar de acordo com (4). Admitamos que A e B vão jogando, com A a cumprir, sem falhas a estratégia (4). Fixemos um certo momento em que é B a jogar; B tem pela frente um monte congruente com 0 ou 3. Se é congruente com 0, B não pode transformá-lo noutro congruente com 0, pois não pode tirar 5 pedras, e, para o transformar num monte congruente com 3 tem que tirar duas pedras. Se o monte é congruente com 3, então o dito monte resultou duma jogada de A que consistiu em retirar 1 pedra; portanto B terá de entregar a A um monte congruente com 1 ou 2. Em qualquer dos casos, A poderá sempre continuar a jogar de acordo com (4). Portanto A ganha, pois B nunca lhe entregará o monte vazio.

Falta provar que se $n \equiv 0$ ou 3, a posição $(n, 1)$ é inatacável. Agora, é B quem vai adoptar a estratégia (4). A joga primeiro e entrega a B um monte não múltiplo de 5, que só será côngruo com 3 caso A tenha tirado 2 pedras. O argumento anterior aplica-se, e B ganha a partida.

Assim termina a demonstração da veracidade da nossa conjectura. $\square$

Jogo 20. *Tirar de um só monte, sem repetir a jogada anterior.*

Como vimos acima, o estado do jogo pode ser um par (n, r), em que n é o número de pedras no monte e r é o número de pedras retiradas pelo adversário na jogada anterior. Construiu-se uma tabela do jogo colocando, na linha n, os valores $\pm$ das 5 posições que envolvem n pedras. Note que a tabela só é válida para montes iniciais de mais de 5 pedras!

Há 6 posições vitoriosas, que são $(1,1)$ e as que correspondem à mesa vazia: $(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5)$. Podemos pois, na tabela, colocar desde logo os 6 primeiros símbolos $+$. A seguir, preenche-se a tabela linha por linha, de cima para baixo, tendo em conta os critérios (2).

	1	2	3	4	5
0	+	+	+	+	+
1	+	−	−	−	−
2	−	−	−	−	−
3	−	−	+	−	−
4	−	−	−	+	−
5	−	−	−	−	+
6	−	−	+	−	−
7	+	+	+	+	+
8	−	−	−	−	−
9	−	−	−	−	−
10	−	−	−	−	−
11	−	−	−	+	−
12	−	−	−	−	+
13	+	+	+	+	+
14	+	−	−	−	−
15	−	−	−	−	−
16	−	−	+	−	−
17	−	−	−	−	−
18	−	−	−	−	+
19	−	−	+	−	−
20	+	+	+	+	+
21	+	−	−	−	−

13	+	+	+	+	+
14	+	−	−	−	−
15	−	−	−	−	−
16	−	−	+	−	−
17	−	−	−	−	−
18	−	−	−	−	+
19	−	−	+	−	−
20	+	+	+	+	+
21	+	−	−	−	−
22	−	−	−	−	−
23	−	−	−	−	−
24	−	−	−	+	−
25	−	−	−	−	+
26	+	+	+	+	+
27	+	−	−	−	−
28	−	−	−	−	−
29	−	−	+	−	−
30	−	−	−	−	−
31	−	−	−	−	+
32	−	−	+	−	−
33	+	+	+	+	+
34	+	−	−	−	−
35	−	−	−	−	−
36	−	−	−	−	−
37	−	−	−	+	−
38	−	−	−	−	+
39	+	+	+	+	+

Depois de preenchidas 5 ou 6 linhas, imediatamente salta à vista a importância das diagonais ascendentes da matriz. Chamamos *diagonal-n* à sequência dos símbolos tabelados nas posições $(n,1),(n-1,2),(n-2,3),(n-3,4),(n-4,5)$, por esta ordem. Por exemplo, a diagonal-8 da tabela é $+--+-$. Os critérios (2) implicam a seguinte mnemónica para a determinação rápida da linha $n+1$ da tabela:

A linha $n+1$ é $+++++$ sse a diagonal-n é $-----$.
A linha $n+1$ é $-----$ sse a diagonal-n tem mais do que um $+$.
A linha $n+1$ é igual à diagonal-n sse a diagonal-n tem um só $+$.

Isto permite o preenchimento rapidíssimo da tabela, de que mostramos as primeiras 40 linhas. A sub-tabela da direita é a continuação da da esquerda, com algumas linhas repetidas para facilitar a aplicação da mnemónica das diagonais.

Note que só na linha 35 se pode concluir qual o padrão de regularidade da tabela: a partir da linha 9 a tabela é periódica, com período 13. Só quando esse período se repete é que temos a certeza quanto ao padrão. A sub-tabela da direita mostra dois períodos completos.

Note que a nossa mnemónica das diagonais serviu para construir a tabela de modo a satisfazer as propriedades características. Portanto, neste caso, a alínea (b) dos objectivos programáticos da página 12 está incorporada na elaboração da tabela.[10]

Como deve jogar um campeão. A melhor forma é levar para o terreno de jogo a subtabela da esquerda, de 0 a 21. Ela inclui a cauda inicial, de 0 a 8, que não se repete mais, e o primeiro dos períodos, de 9 a 21. Quando o adversário lhe deixa uma posição (n, r), o campeão trata de determinar a natureza da posição: frágil, ou segura. Há dois casos a considerar: (i) quando $n \leqslant 21$, a posição vem na cábula, a qual lhe diz directamente se (n, r) é frágil ou segura; (ii) quando $n > 21$, o campeão determina o inteiro, n_{13}, do intervalo $[9, 21]$ congruente com n módulo 13, e usa o carácter periódico da tabela para concluir que (n, r) e (n_{13}, r) têm a mesma natureza.

Se a posição é segura, o campeão pouco mais pode fazer do que uma qualquer jogada e esperar por um erro do adversário. Se (n, r) for frágil, existe uma jogada segura que a tabela permite determinar do modo seguinte.

> Se a linha n [ou a linha n_{13}, no caso $n > 21$] tem um só sinal $+$, o campeão tira um número de pedras igual ao da coluna onde está esse sinal.
>
> Se a linha n [ou n_{13}] só tem sinais $-$, o campeão tira um número de pedras, distinto de r, igual ao número de uma das colunas onde a diagonal-$(n-1)$

[10] Supõe-se, claro!, que não houve gralhas nem enganos na confecção da tabela. A tal alínea (b) poderia servir para confirmar que as contas estão certas, e a melhor maneira de as confirmar é... aplicar novamente a mnemónica das diagonais a cada linha :-D

[ou a diagonal-$(n_{13}-1)$] tem sinal $+$. Há sempre duas[11] colunas dessas, portanto uma delas não é a coluna r.

No problema das OIAM de Caracas, em 2000, não se explicitam as condições da primeira jogada do jogo, o que é um defeito que deveria ter sido evitado. Vamos supor que na primeira jogada do jogo podem tirar-se $1, 2, 3, 4$ ou 5 pedras do tal monte inicial de 2000. Como $2000_{13} = 11$, a tabela diz-nos que a posição é frágil e que a primeira jogada só será segura se o jogador tirar 4 pedras (esse facto observa-se melhor na linha 24 da tabela!).

Jogo 21. *Tirar de um só monte, sem repetir a jogada anterior. Episódio 2.*

Se o monte inicial tem m pedras, o segundo jogador tem estratégia para ganhar se e só se a diagonal-$(m-1)$ é $-----$, *i.e.*, a linha m é $+++++$. Pela tabela, isso acontece se e só se $m = 13k$ ou $m = 13k - 6$, para $k \in \mathbb{N}$.

Jogo 22. *Dois numa bicicleta.*

Esta resolução é baseada na resposta dada pelo délfico Ricardo Moreira, do 10° ano, sob a pressão de um teste de preparação olímpica... parabéns!

O jogador X pedala na etapa $k-1$ e o outro, Y, pedala na etapa k. A soma S_k das distâncias percorridas *nessas duas etapas* pode ser controlada por Y da seguinte forma: se X pedalar 1, Y pode pedalar de modo a que S_k seja qualquer número real à sua escolha no intervalo $[2, k+1]$; se X pedalar $k-1$, Y pode escolher qualquer S_k em $[k, 2k-1]$; portanto, qualquer que seja a distância percorrida por X na etapa $k-1$, Y pode pedalar de modo a obter qualquer S_k em $[k, k+1]$. Se fizer $S_k = k$, a escolha de Y diz-se *mínima*; se fizer $S_k = k+1$, a escolha de Y diz-se *máxima*.

Assim, o jogador A pode controlar todas as somas $S_3, S_5, S_7, \ldots$ e o jogador B pode controlar todas as somas $S_2, S_4, S_6, \ldots$. Coloquemos B no controlo: ao fim de $2n$ etapas, ele pode escolher a distância total percorrida, $S_2 + S_4 + S_6 + \cdots + S_{2n}$, no intervalo

$$\big[2 + 4 + \cdots + 2n\,,\, 3 + 5 + \cdots + (2n+1)\big] = \big[n(n+1)\,,\,(n+1)^2 - 1\big]. \quad (5)$$

Para qualquer distância D neste intervalo, B consegue lá chegar pedalando na sua etapa $2n$, com a seguinte estratégia: em quaisquer $D - n(n+1)$ etapas

[11] A diagonal-14 e a -21 têm três sinais $+$.

pares, B faz a escolha máxima das somas S_k; nas outras etapas pares, B faz a escolha mínima.

Para $n = 44$, este intervalo é $[1980, 2024]$, a que 2008 pertence. Portanto B tem estratégia para ganhar e a estratégia pode ser a que foi descrita. !

Podemos ir um pouco mais além, determinando quais os casos em que A pode ganhar o jogo controlando as somas $S_3, S_5, S_7, \ldots$. Na primeira etapa, A é obrigado a pedalar 1 km. No final da sua etapa $2n + 1$ poderá chegar a qualquer distância à sua escolha no intervalo

$$\bigl[1+3+5+\cdots+(2n+1)\,,\,1+4+6+\cdots+(2n+2)\bigr] = \bigl[(n+1)^2\,,\,(n+1)^2+n\bigr].$$

A surpresa agradável é que estes intervalos preenchem os espaços vazios entre os intervalos (5). Portanto, se B (ou A) tem estratégia para ganhar, essa estratégia pode ser a do Ricardo Moreira.

$*$

Vou apresentar uma análise do jogo pelo método de construção de um extracto da tabela, conjectura e prova. Não é tão interessante quanto o anterior, mas tem a vantagem de ser exaustivo e... sistemático, estilo receita.

Os estados do jogo são os pares (k, d), com k natural e d inteiro não negativo; d é a distância da bicicleta ao destino no instante em que se inicia a etapa k. O estado seguinte é $(k + 1, d - j)$, onde j é um natural escolhido por quem pedala no intervalo $[1, k]$.

É conveniente fazer a tabela do jogo numa folha de papel quadriculado. Na figura, cada linha de quadradinhos corresponde a um valor de d e cada coluna a um valor de k, com $0 \leqslant d \leqslant 40$ e $1 \leqslant k \leqslant 31$.

Seguimos o processo de adivinhação recomendado na página 10. As posições inatacáveis foram marcadas com '$\times$'. Para facilitar o reconhecimento do padrão, não se marcaram as frágeis (detectam-se por serem "as outras", não assinaladas).

As vitoriosas são $(k, 0)$. (Com vitória para A se k é ímpar, e vitória para B se k é par. Mas, neste momento, não interessa deslindar de quem é a vitória.) Depois determinam-se as que podem transformar-se, numa só jogada, em posições vitoriosas. Depois marcam-se as posições (k, d) que se transformam em posições do tipo anterior. Etc., etc..

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
1																				
2	×																			
3	×	×																		
4		×	×																	
5			×	×																
6	×			×	×															
7	×				×	×														
8	×	×				×	×													
9		×					×	×												
10		×	×					×	×											
11			×						×	×										
12	×		×	×						×	×									
13	×			×							×	×								
14	×			×	×							×	×							
15	×	×			×								×	×						
16		×			×	×								×	×					
17		×				×									×	×				
18		×	×			×	×									×	×			
19			×				×										×	×		
20	×		×				×	×										×	×	
21	×		×	×				×											×	×
22	×			×				×	×											×
23	×			×					×											
24	×	×		×	×				×	×										
25		×			×					×										

Os resultados parcelares da tabela já dão para conjecturar quais são as posições inatacáveis. A coluna k, lida de cima para baixo, aparenta uma estrutura que pode descrever-se esquematicamente assim

$$\boxed{\times}\underbrace{\quad\quad}_{k}\boxed{\times\times}\underbrace{\quad\quad}_{k+1}\boxed{\times\times\times}\underbrace{\quad\quad}_{k+2}\boxed{\times\times\times\times}\underbrace{\quad\quad}_{k+3}\boxed{\times\times\times\times\times}\underbrace{\quad\quad}_{k+4}\boxed{\times\times\times\times\times\times}\ \underbrace{\quad\quad}_{k+5}\cdots.$$

Neste esquema, os $\times$'s ocorrem em grupos de $1, 2, 3, 4, \ldots$ símbolos consecutivos, intercalados por fieiras de casas vazias de comprimentos $k, k+1, k+2, k+3, \ldots$. Neste padrão da coluna k, os grupos de cruzes, $\times$, $\times\times$, $\times\times\times$, $\times\times\times\times$,..., serão designados por *grupo* 0, *grupo* 1, *grupo* 2, *grupo* 3, ..., respectivamente. Assim, o grupo w tem $w+1$ símbolos $\times$, seguindo-se-lhe uma sequência de $k+w$ casas vazias.

Podemos pois conjecturar que (k,d) é inatacável se e só se existe um $w \geqslant 0$ tal que a casa (k,d) está no grupo w. Para cada k e cada w, sejam d_w^k e D_w^k os valores de d tais que (k,d) é a posição do primeiro símbolo $\times$ e do último símbolo $\times$ do grupo w. Claro que

$$D_w^k = d_w^k + w \quad \text{e} \quad d_w^k = \sum_{i=1}^{w} i + \sum_{i=0}^{w-1}(k+i) = [\ldots] = w(k+w).$$

Isto implica $D_w^k = d_w^{k+1}$, bem visível na tabela. Portanto, a nossa conjectura traduz-se por

> **Conjectura.** (k,d) *é inatacável se e só se existe um inteiro* $w \geqslant 0$ *tal que* $d_w^k \leqslant d \leqslant D_w^k$, i.e.,
>
> $$w(k+w) \leqslant d \leqslant w(k+w+1). \tag{6}$$

Demonstração da conjectura. Parte 1. Prova-se que (6) implica que *todas* as jogadas transformam (k,d) numa posição $(k+1, d-j)$ que não satisfaz (6). A legitimidade da jogada significa $1 \leqslant j \leqslant k$, portanto

$$\begin{aligned} d-j &\leqslant w(k+w+1) - 1 = d_w^{k+1} - 1 \\ d-j &\geqslant w(k+w) - k = [\ldots] = D_{w-1}^{k+1} + 1. \end{aligned}$$

Isto prova que $(k+1, d-j)$ está estritamente entre os grupos w e $w-1$ da coluna $k+1$, como pretendíamos.

Parte 2. Supondo que (k,d) está estritamente entre os grupos w e $w-1$ da coluna k, prova-se que *existe uma jogada* que transforma (k,d) em $(k+1, d-j)$ pertencente ao grupo $w-1$ da coluna $k+1$. Temos, pois, de provar que se $d_{w-1}^{k+1} < d < d_w^k$, existe $j \in [1,k]$ tal que $d_{w-1}^{k+1} \leqslant d-j \leqslant d_{w-1}^{k+2}$. Os $d-j$ cuja existência interessa são os da intersecção do intervalo $[d-k, d-1]$ com o grupo $w-1$ da coluna $k+1$, intersecção essa dada por

$$\left[\max\{d-k, d_{w-1}^{k+1}\}\,,\, \min\{d-1, d_{w-1}^{k+2}\}\right], \tag{7}$$

Este intervalo é não vazio se se só se

$$\max\{d-k, d_{w-1}^{k} + 1\} \leqslant \min\{d-1, d_{w-1}^{k+2}\}$$

Esta desigualdade é fácil de provar por temos fórmulas simples para os d_w^k.$\square$

Terminada a demonstração, sabemos já quais são as posições inatacáveis. As outras são frágeis. Mas provámos um pouco mais:

Se a posição (k, d) *está no grupo* w *da coluna* k*, qualquer sua transformada* $(k+1, d-j)$ *está estritamente entre os grupos* w *e* $w-1$ *da coluna* $k+1$*.*

Podemos provar um pouco mais ainda, com muito pouco esforço adicional (que fica como exercício):

Se a posição (k, d) *está estritamente entre os grupos* w *e* $w-1$ *da coluna* k *(então ela é frágil e) as boas jogadas sobre ela são as que a transformam em* $(k+1, d-j)$ *para* $d-j$ *no intervalo* (7)*. As boas jogadas são os* j*'s tais que*

$$\max\{1, d - d_{w-1}^{k+2}\} \leqslant j \leqslant \min\{k, d - d_{w-1}^{k+1}\}. \tag{8}$$

A posição inicial do jogo é $(1, 2008)$. Os grupos da coluna 1 são dados pelos intervalos $[d_w^1, d_w^2] = [w^2 + w, w^2 + 2w]$, $w = 0, 1, 2, \ldots$. Para vermos a posição de 2008 nesta sucessão de intervalos, podemos determinar as soluções de $w^2 + w = 2008$; há apenas uma solução positiva que é ≈ 44.33, o que nos indica que devemos experimentar w's inteiros na ordem de 44-45. De facto, $[d_{44}^1, d_{44}^2] = [1980, 2024]$, pelo que o estado de partida do jogo está no grupo $w = 44$ da coluna 1. A posição $(1, 2008)$ é, pois, inatacável, *i.e.*, A vai perder se B souber jogar. A estratégia de B consiste em pedalar, em cada uma das etapas pares, um número de quilómetros j no intervalo (8). Se B jogar de forma perfeita, a viagem terminará ao fim da etapa 88 com B a pedalar.

Jogo 23. *Dois numa bicicleta, percorrendo distâncias reais.*

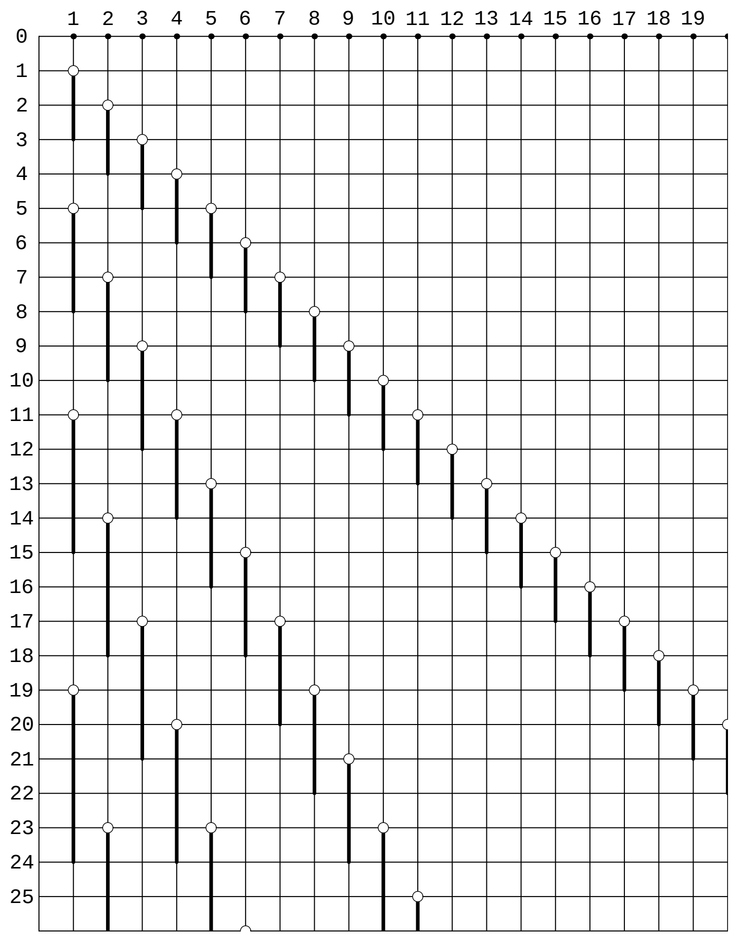
Os estados do jogo são os (k, d), como antes, mas com d real não negativo. O estado seguinte é $(k+1, d-x)$, onde x é um real escolhido por quem pedala no intervalo $[1, k]$.

A tabela do jogo é de tipo diferente do anterior, pois agora temos uma variável, d, que varia continuamente. No eixo horizontal da figura colocaram-se os k's e no vertical as distâncias d. No jogo anterior cada estado era representado por um quadradinho, agora cada estado é um ponto do primeiro quadrante, com abcissa inteira.

Seguimos o processo de adivinhação recomendado na página 10. As posições seguras foram marcadas com pontos 'grossos'. Como no problema anterior, as frágeis não se marcaram.

1. As vitoriosas são os pontos $(k, 0)$ marcados na figura.

2. Depois determinam-se as que podem transformar-se, numa só jogada, em posições vitoriosas. É fácil ver que são as posições (k, y), com $0 < y \leqslant$



k. Trata-se de segmentos constituídos por posições frágeis, pelo que não se marcam.

3. Depois marcam-se as posições (k, d) que se transformam em posições do tipo anterior (*i.e.*, do tipo $(k + 1, y)$ com $0 < y \leqslant k + 1$) qualquer que seja a jogada de quem pedala. É fácil ver que são os pontos (k, d), com $k < d \leqslant k + 2$. Trata-se de segmentos constituídos por posições seguras, pelo que se marcam a traço grosso na figura (são os segmentos verticais de comprimento 2 que, na figura, acompanham a diagonal $d = k$). Etc., etc..

Note que as bolinhas brancas denotam posições frágeis. Os resultados parcelares na figura acima já dão para conjecturar quais são as posições inatacáveis. Procedemos como anteriormente, fixando um valor de k e olhando para a 'coluna' k (que, aqui, é a semi-recta vertical de abcissa k); nessa coluna *conjecturamos* que ocorrem *grupos*, *i.e.*, intervalos de pontos marcados, alternados com intervalos de pontos não marcados, designados por *grupo* 0, *grupo* 1, *grupo* 2, ..., grupo w, ... O grupo 0 reduz-se a um só ponto, $(k, 0)$. Se $w > 0$, o grupo w é um segmento de comprimento $w + 1$. Para $w > 0$, os d tais que (k, d) pertence ao grupo w da coluna k, constituem o intervalo semi-fechado $]\delta_w^k, D_w^k]$, em que:

$$\delta_w^k = w(k + w) - 1 \quad \text{e} \quad D_w^k = w(k + w) + w = \delta_w^{k+1} + 1.$$

Estas fórmulas determinam-se tal e qual como no problema anterior. A nossa conjectura tem, agora, uma formulação precisa:

Conjectura. (k, d) *é inatacável se e só se* $d = 0$, *ou existe um inteiro* $w > 0$ *tal que* $\delta_w^k < d \leqslant D_w^k$, i.e.,

$$w(k + w) - 1 < d \leqslant w(k + w + 1). \tag{9}$$

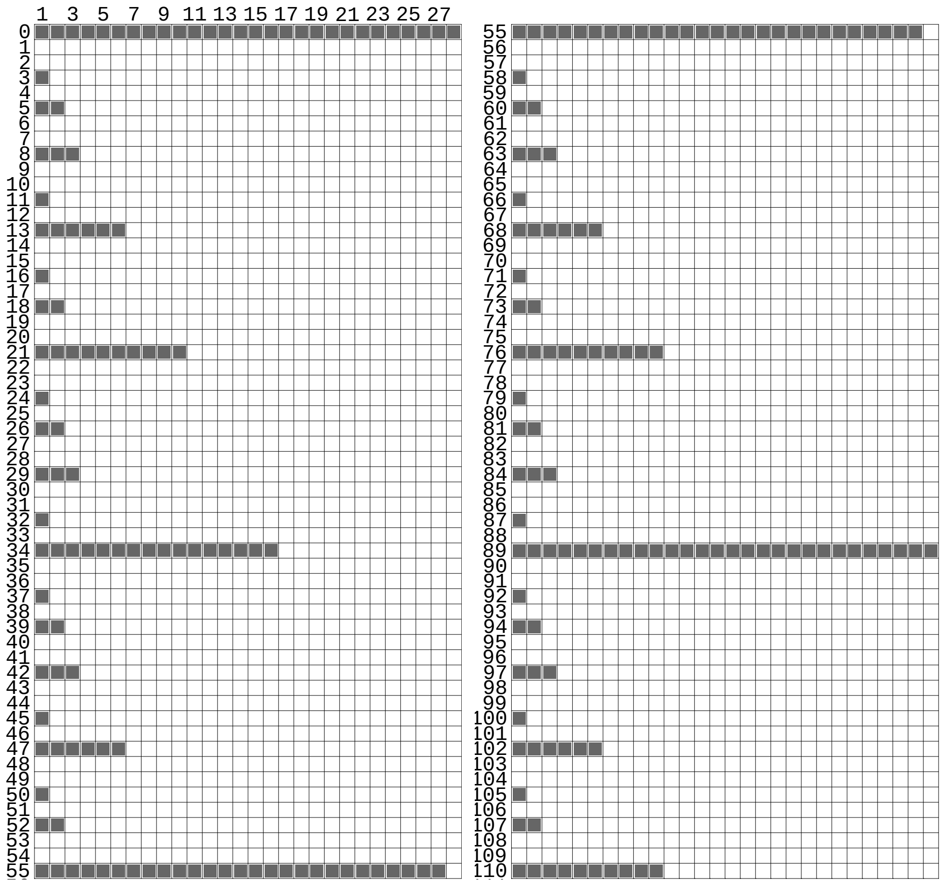
Demonstração da conjectura. Pode adaptar-se a que foi feita para o caso anterior, com pequenas diferenças, mas sem alterações substanciais. Os pormenores ficam como exercício. □

Dão-se aqui alguns pormenores na parte mais interessante da prova (a parte 2 na resolução do problema anterior). Considera-se uma posição (k, d) estritamente entre os grupos w e $w-1$ da coluna k; aqui, isso significa $D_{w-1}^k < d \leqslant \delta_w^k$; prova-se com facilidade a existência dum real $x \in [1, k]$ tal que $(k+1, d-x)$ está no grupo $w - 1$ da coluna $k + 1$. De facto, os x nessas condições são os que satisfazem as desigualdades $1 \leqslant x \leqslant k$ e $d - D_{w-1}^{k+1} \leqslant x < d - \delta_{w-1}^{k+1}$, que podem condensar-se na condição

$$\begin{gathered} \max\{1, d - \delta_{w-1}^{k+2} + 1\} \leqslant x < \min\{k, d - \delta_{w-1}^{k+1}\} \\ \textit{com a possibilidade } x = k \textit{ no caso } k < d - \delta_{w-1}^{k+1}. \end{gathered} \tag{10}$$

No início do jogo, a posição é $(1, 2008)$. O segundo jogador tem estratégia para ganhar sse 2008 pertence a um dos intervalos $]\delta_w^1, D_w^1]$. Como $\delta_w^1 = w^2 + w - 1$, considera-se a equação $w^2 + w - 1 = 2008$ determina-se apenas uma solução positiva, ≈ 44.3247. O grupo 44 da coluna 1 corresponde aos d's no intervalo $]1979, 2024]$. Como 2008 está nesse intervalo, podemos repetir quase todas as conclusões da resolução do problema 22. A estratégia aqui é um pouco diferente. A estratégia de B para ganhar consiste, no início de cada etapa k par e sabido o estado (k, d), em calcular o valor de w tal que $D^k_{w-1} < d \leqslant \delta^k_w$; depois, basta pedalar x quilómetros de acordo com (10).

Jogo 24. *Tirar de um só monte até ao dobro do que o parceiro tirou.*



O estado aqui adoptado é o mesmo que na resolução do jogo 19: (n, r), com n o número de pedras na mesa e r o número de pedras retiradas pelo adversário na jogada anterior; assim, o jogador que joga sobre (n, r) pode retirar até $2r$ pedras. A figura acima dá um esboço das primeiras 111 linhas da tabela do jogo.[12] A construção foi feita em papel quadriculado, como em jogos anteriores, com preenchimento a negro das casas correspondentes a posições

[12]Bastavam as primeiras 35-40 para se reconhecer um padrão.

inatacáveis e ausência de marcas para posições frágeis.

Vejam-se as diferenças relativamente à tabela da página 29: naquele caso, os valores $\pm$ dos estados $(n, 1)$ eram periódicos de período 5 e ocorriam linhas 'longas' de sinais + com regularidade animadora. Mas, no caso presente, não se vislumbra periodicidade na primeira coluna da tabela.

Diremos que a linha n é *longa*, se $n \geqslant 3$ e nela ocorrem $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ sinais $\blacksquare$ consecutivos. As linhas longas visíveis no extracto de tabela são as de ordens $n = 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. Trata-se de termos consecutivos da sucessão de Fibonacci!... portanto:

> **Conjectura 1.** *As linhas longas são as de ordens iguais aos números de Fibonacci* $\geqslant 3$.

Mas temos de avançar mais na decifração da estrutura da tabela. Recorde que os números de Fibonacci se definem pela recorrência $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, com valores iniciais $F_0 = 0, F_1 = 1$. Algo parecido se passa com a tabela: escolha 3 linhas longas consecutivas observáveis na tabela, por exemplo, $n = 21, 34, 55$. a estrutura da tabela entre as linhas 34 e 55, extremos excluídos, é cópia exacta das linhas entre 0 e 21.

> **Conjectura 2.** *Para quaisquer números de Fibonacci consecutivos* $\geqslant 3$*,* F_k*,* F_{k+1}*,* F_{k+2}*, a secção da tabela nas linhas* $n \in]F_{k+1}, F_{k+2}[$ *é igual à secção nas linhas* $n \in]0, F_k[$.

As conjecturas, juntamente com a certeza que temos de que as linhas 1 e 2 da tabela estão em branco, determinam a tabela univocamente: primeiro, a conjectura 1 diz-nos como colocar os quadrados negros nas linhas longas; a seguir, usa-se a conjectura 2 para construir, sucessivamente as secções da tabela para as linhas dos intervalos $]3, 5[$, $]5, 8[$, $]8, 13[$, ...

Está, pois, estabelecida a nossa conjectura sobre os conjuntos $\mathbb{S}$ e $\mathbb{F}$ das posições inatacáveis e das posições frágeis deste jogo. Falta prová-la usando o teorema 4.1.

Demonstração. Em construção...

Jogo 25. *Jogo das bandeiras.*

O facto de haver possibilidade de empate é irrelevante para o problema, pois a condição de vitória podia modificar-se do seguinte modo:

$\mathscr{A}$ ganha o jogo se dominar uma área maior ou igual que a de $\mathscr{B}$; A equipa $\mathscr{B}$ ganha o jogo se dominar uma área maior que a de $\mathscr{A}$.

O objectivo do jogo é o mesmo que o do enunciado original: provar que (apesar da aparente desvantagem de perder caso haja empate nas áreas) $\mathscr{B}$ tem uma estratégia para ganhar.

Uma determinada equipa controla um ponto P do círculo ($P \neq$ centro) sse controla todos os pontos do raio do círculo a que P pretence. Portanto o problema reduz-se ao controlo dos pontos de F. No seguimento, F é a circunferência que delimita o território, e *arco* significa arco de F excluídos os extremos.

Admitamos fixadas k bandeiras. Elas decompõem F em k arcos disjuntos, tendo cada arco uma bandeira em cada extremo. Um arco delimitado por bandeiras da mesma cor diz-se *azul* ou *branco*, de acordo com a cor das bandeiras limítrofes; se essas bandeiras forem de cores distintas, o arco dir-se-á *neutro*.

Um arco é azul [branco] sse é controlado por $\mathscr{A}$ [por $\mathscr{B}$]. De um arco neutro, metade é controlada por $\mathscr{A}$ e a outra metade por $\mathscr{B}$. Assim, para se determinar quem ganha ou se há empate, não interessa contabilizar os arcos neutros.

Coloquemos a bandeira n° $k+1$; ela ocupa um ponto de um desses k arcos, o arco α; diremos que a nova bandeira *separa* as bandeiras limítrofes de α. Se α é colorido e tem cor distinta da cor da nova bandeira, ela decompõe α em dois arcos neutros; diremos então que a bandeira *neutralizou* α.

Lema. *Numa configuração de $a+b$ bandeiras, sendo a azuis e b brancas, os números $r_{\mathscr{A}}$ e $r_{\mathscr{B}}$ de arcos azuis e brancos, respectivamente, satisfazem*

$$r_{\mathscr{A}} - r_{\mathscr{B}} = a - b.$$

Assim, no decorrer do jogo, cada jogada de $\mathscr{A}$ deixa a $\mathscr{B}$ uma configuração com pelo menos um arco azul. *$\mathscr{B}$ pode, pois, de cada vez que joga, neutralizar um arco azul.* A neutralização sistemática conduz a empate. Para melhor resultado, após a colocação da primeira bandeira azul, constrói-se o n-ágono regular inscrito em F que tem essa bandeira como vértice. Chamamos *vértices-V* aos vértices desse n-ágono; os V determinam n arcos disjuntos, iguais, a que chamamos *arcos-G* ("grandes"). Eis a estratégia de $\mathscr{B}$:

1. *$\mathscr{B}$ vai colocando as suas bandeiras em vértices-V, até não haver mais vértices-V disponíveis.*

2. *Depois disso, $\mathscr{B}$ neutraliza um arco azul em cada jogada, dando prioridade aos arcos-G, até ficar com apenas uma bandeira disponível.*

3. *A última bandeira branca é colocada em posição q.b. para ganhar.*

Se, no fim da fase 1, há w vértices-V azuis, então há $n-w$ vértices-V brancos; há quanto muito $w-1$ arcos-G azuis e $\mathscr{B}$ tem w bandeiras disponíveis. Portanto, *na fase 2, $\mathscr{B}$ neutraliza todos os arcos-G azuis.*[13] Na fase 2, $\mathscr{B}$ não cria novos arcos brancos.

É preciso provar a exequibilidade de 3. Quando $\mathscr{B}$ vai colocar a sua última bandeira, há pelo menos um arco-G, mas nenhum desses é azul; o número de arcos azuis excede em uma unidade o de arcos brancos; todos os arcos brancos são arcos-G. Há dois casos a considerar:

Caso 1: existe um arco-G branco. $\mathscr{B}$ coloca a última bandeira branca de modo a neutralizar um arco azul, e ganha.

Caso 2: não existe um arco-G branco. Portanto não existe um arco branco; existe, pois, um só arco azul, que não é arco-G, e existe pelo menos um arco-G neutro. Então, $\mathscr{B}$ coloca a última bandeira branca num arco-G neutro, de modo a criar um arco branco de comprimento superior ao do único arco azul existente.

Jogo 26. *Jogo das bandeiras (Episódio 2).*

Apresenta-se uma estratégia de mitigação da perda de $\mathscr{A}$. Supondo F de perímetro 1, escolha-se $\epsilon \in]0, \frac{1}{n}[$. $\mathscr{A}$ coloca a primeira bandeira azul, que determina vértices-V e arcos-G como anteriormente. Eis uma estratégia possível:

1. *$\mathscr{A}$ vai colocando as suas bandeiras em vértices-V, até não haver mais vértices-V disponíveis.*

2. *Depois disso, em cada jogada:*
   2.1. *Se existe um arco branco, $\mathscr{A}$ neutraliza um arco branco, dando prioridade aos arcos-G brancos;*

[13] O argumento prevê o caso $w = 1$, no qual a fase 2 é vazia.

2.2. *Se não existe um arco branco, $\mathscr{A}$ coloca uma bandeira azul num arco-G neutro, de modo a criar um arco azul de comprimento* $\frac{1}{n} - \epsilon$.

Cumprida a fase 1, o número de bandeiras azuis por colocar é $\geqslant$ que o número de arcos-G brancos. Portanto, na fase 2.1, $\mathscr{A}$ neutraliza todos os arcos-G brancos.

Quando $\mathscr{A}$ joga, se não existe arco branco também não existe arco azul, pelo que existe um arco neutro pelo menos; por isso, 2.2 é exequível.

Os arcos azuis têm comprimentos $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n} - \epsilon$. Terminado o jogo, seja w o número de arcos brancos (ou azuis). $\mathscr{A}$ controla pelo menos uma fracção $\frac{w}{n} - w\epsilon$ de F; $\mathscr{B}$ controla uma fracção de F menor que $\frac{w}{n}$. Portanto, se $\mathscr{B}$ ganhar, ganha por uma diferença inferior a $n\epsilon$.