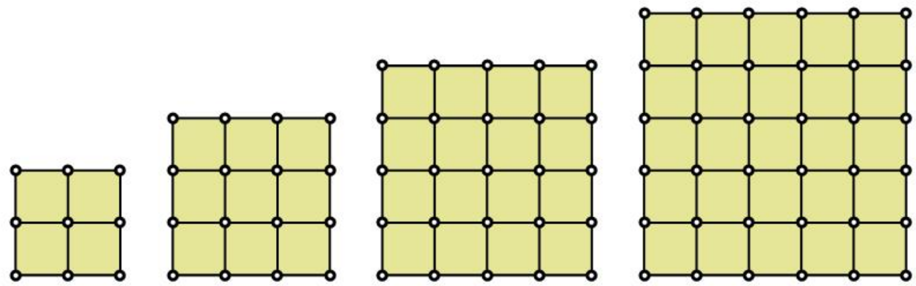
A pulga e o escorpião



A pulga e o escorpião jogam um jogo a dois de cerco e fuga. O jogo é jogado num tabuleiro de xadrez $n \times n$ cujas casas são quadradinhos de lados de comprimento 1.

É dado um real positivo d que não muda até ao fim do jogo. A pulga ocupa um dos nodos do tabuleiro saltando de um nodo para outro em cada jogada. O escorpião arrasta-se continuamente sobre a fronteira do tabuleiro e pode ocupar qualquer ponto dessa fronteira (não apenas os $4n$ nodos periféricos). Em cada jogada da pulga ela tem que desocupar o nodo em que se encontra e saltar para um dos nodos adjacentes a esse; cada jogada do escorpião consiste em arrastar-se sobre a linha periférica podendo percorrer qualquer distância $\leqslant d$.

> Notem que, para ir dum ponto do bordo do tabuleiro ao ponto diametralmente oposto, o escorpião tem que percorrer uma distância $2n$.

Na primeira jogada, a pulga ocupa um nodo inicial à sua escolha; depois o escorpião ocupa um ponto da fronteira à sua escolha; a seguir, a pulga salta, depois o escorpião arrasta-se, etc., jogando alternadamente. Diz-se que a pulga *escapa* (e *ganha* o jogo) se salta para um nodo periférico aonde o escorpião não pode chegar na jogada seguinte.

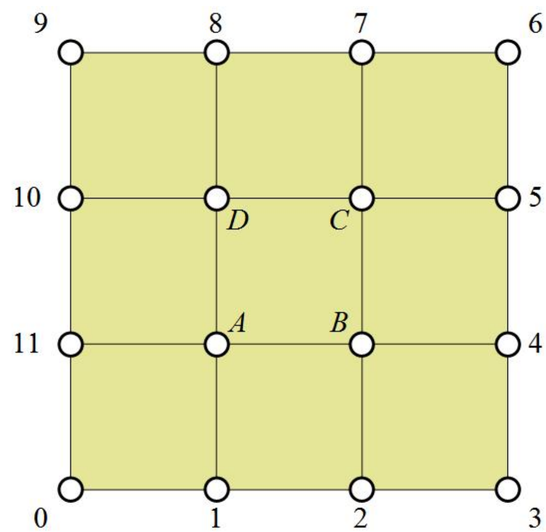
1. *Para $n = 2$ determinem, justificando, os valores de d para os quais a pulga tem estratégia para escapar ao cerco.*
2. *O mesmo que o problema anterior, para $n = 3$.*
3. *Suponham (apenas neste problema) que ao escorpião só é permitido percorrer distâncias* estritamente inferiores a d. *Com esta nova regra, respondam de novo aos problemas 1 e 2.*
4. *O mesmo que o problema 1, mas com $n = 4$.*
5. *Provem que se $n = 5$ e $d = 3$, a pulga tem estratégia para escapar.*
6. *Provem que se $n = 5$ e $d \geqslant 4$, a pulga não tem estratégia para escapar.*
7. *Provem que, se n é um número par superior a 4 e $d \leqslant 3$, a pulga tem estratégia para escapar.*

RESPOSTAS

1. *Para $n = 2$ determinem, justificando, os valores de d para os quais a pulga tem estratégia para escapar.*

São os valores d tais que $0 < d < 3$. Se $d < 3$, a estratégia da pulga é a seguinte: no início, ela coloca-se no centro; sem perda de generalidade supomos que o escorpião escolhe um ponto do lado norte; a pulga salta para sul e o escorpião tem que andar pelo menos 3 unidades para a apanhar, coisa que as regras não permitem. Se $d \geqslant 3$, a estratégia do escorpião é comer a pulga se ela cair na asneira de escolher um nodo periférico; se a pulga ocupa o centro, ele ocupa um canto do tabuleiro; ela tem que jogar para a periferia e ele come-a, depois de se arrastar 1 ou 3 unidades.

2. *O mesmo que o problema anterior, para $n = 3$.*



São os valores d tais que $0 < d < 3$. Para $d \geqslant 3$, a estratégia do escorpião pode ser esta: a pulga coloca-se num dos 4 nodos do quadradinho central Q (os nodos A, B, C, D da figura). Enquanto ela salta nos nodos de Q, ele pode sempre ocupar o vértice do tabuleiro mais próximo dela (também serve um dos nodos periféricos mais próximos dela).

Para $d < 3$, a estratégia da pulga pode ser esta: no início, ela coloca-se num dos nodos de Q; depois desata a saltar de nodo em nodo no sentido direto (digamos). Vamos numerar os vértices periféricos do tabuleiro, no sentido direto: $0, 1, \ldots, 11$. Quando a pulga está, *e.g.*, em B, o escorpião tem que arrastar-se para a linha quebrada $]1, 2, \ldots, 5[$; quando ela salta daí para C, ele tem de arrastar-se para $]4, 5, \ldots, 8[$ e não pode arrastar-se passando por 0 (porque $d < 3$); quando ela salta para D, ele tem de arrastar-se para a linha $]7, 8, \ldots, 11[$; etc. Na passagem dela de B para C, ele passa de certa posição E para E'; a distância de E ao nodo 1 excede a distância de E' ao nodo 4 de pelo menos $3 - d$; portanto, ao fim de uns tantas saltos, ele não vai conseguir posicionar-se na devida linha quebrada, o que permitirá o escape da pulga.

3. *Suponham (apenas neste problema) que ao escorpião só é permitido percorrer distâncias* estritamente inferiores a d. *Com esta nova regra, respondam de novo aos problemas* 1 *e* 2.

A modificação no problema 1 é que a pulga escapa se $d = 3$, o que é óbvio. Quanto ao problema 2, o resultado não sofre alteração, sendo o caso $d = 3$ o único problema bicudo; nessa situação, vamos descrever uma estratégia do escorpião para sitiar a pulga para todo o sempre (ou comê-la se ela o quiser). No início, a pulga escolhe ocupar, digamos, o nodo A; ele escolhe então o nodo 0. A pulga vai saltando de nodo em nodo de Q; em cada jogada, o escorpião nem sempre pode ocupar o canto do tabuleiro mais próximo da pulga, mas pode deslocar-se para muiiiito próximo desse vértice. Admitamos que a pulga salta em Q sempre no sentido direto [retrógrado]; na sua jogada j, o escorpião desloca-se (a partir do ponto em que se encontra, de $3 - \epsilon^j$ no sentido direto [retrógrado], onde ϵ é um positivo $< \frac{1}{2}$. Na jogada m, a distância dele ao canto do tabuleiro mais próximo da pulga é de

$$\epsilon + \epsilon^2 + \cdots + \epsilon^m = \epsilon \frac{1 - \epsilon^{m+1}}{1 - \epsilon} < \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} < 1.$$

Portanto o escorpião consegue sempre colocar-se entre o nodo mais próximo da pulga e o canto mais próximo da pulga (na figura acima, quando ela vai, digamos, para B, ele consegue colocar-se no intervalo $]2, 3[$, ou $]3, 4[$ no caso retrógrado). E a pulga não pode escapar. Se, em certo momento, ela decidir inverter o sentido de evolução (direto/retrógrado), o escorpião pode colocar-se no canto do tabuleiro mais próximo dela e todo começa de novo.

4. *O mesmo que o problema* 1*, mas com* $n = 4$*.*

A resposta é a mesma que no problema 1. As estratégias são as seguintes. Para $d < 3$, a pulga ocupa o nodo central do tabuleiro; de seguida, o escorpião assenta arraiais num dos lados do tabuleiro. Se o escorpião escolhe o lado norte, a pulga dá dois saltos para sul e espapa; etc.

Se $d = 3$, o escorpião procura manter a defesa dita *de caras* (comparável à oposição de reis no xadrez) que consiste em ocupar o nodo mais próximo da pulga se esta não estiver no nodo central. Note-se que, estando de caras, o escorpião consegue manter sucessivamente a posição de caras até que a pulga recolha ao nodo central.

Se a pulga está no centro, o escorpião vai para um canto; admitamos, *s.p.g* (sem perda de generalidade), que ele está no canto nordeste; se ela vai para norte ou este, ele coloca-se de caras; se a pulga salta para sul (para oeste o tratamento é homólogo), ele desloca-se 3 unidades para sul. A seguir a pulga salta para leste ou para oeste; se for para leste, a posição fica de caras; se for para oeste, ele vai uma unidade para sul e duas para oeste. Se agora ela vai para leste, fica de caras; se vai para norte, ele consegue chegar a uma posição de caras.

5. *Provem que se* $n = 5$ *e* $d = 3$*, a pulga tem estratégia para escapar.*

A pulga coloca-se no nodo noroeste mais próximo do centro. Se o escorpião escolhe ficar no lado sul ou leste a pulga escapa em dois saltos. Admitamos que o escorpião escolhe o lado norte (o tratamento do lado oeste é análogo). Então a pulga percorre os nodos centrais no sentido direto; após o primeiro salto, para baixo, o escorpião é obrigado a ocupar o bordo esquerdo; no segundo salto ela vai para a direita e ele é forçado a vir para o bordo inferior; no terceiro salto ela vai para norte e ele é forçado a vir para o bordo direito; mas ele não pode, em 3 jogadas, arrastar-se do bordo superior para o bordo direito passando pelo canto inferior esquerdo do tabuleiro. Resumindo, a pulga escapa em cinco ou menos saltos; contra a melhor defesa do escorpião, ela salta assim: sul-este-norte-norte-norte.

6. *Provem que se* $n = 5$ *e* $d \geqslant 4$*, a pulga não tem estratégia para escapar.*

Enquanto a pulga andar aos saltos nos nodos do quadradinho central, o escorpião ocupa um canto e faz-se de morto. Mal a pulga saia para fora desse quadradinho, ele desloca-se e em duas jogadas passa a defender de caras, mantendo esse tipo de defesa até a pulga recuar para o quadradinho central; ele ocupa, então, um canto qualquer e faz de morto.

7. *Provem que, se n é um número par superior a 4 e $d \leqslant 3$, a pulga tem estratégia para escapar.*

No início, a pulga coloca-se no centro; *s.p.g*, admitamos que o escorpião escolhe ficar no bordo norte do tabuleiro. A pulga salta para sul x casas até que o escorpião decide sair do bordo norte; se $x = \frac{n}{2}$, a pulga escapa, pelo que supomos $1 \leqslant x < \frac{n}{2}$; *s.p.g*, admitamos que o escorpião escolhe descer pelo bordo direito; a situação é: a pulga está x unidades a sul do centro e o escorpião num ponto E do bordo direito, a uma distância $t \leqslant 3$ do canto nordeste. A pulga dá $\frac{n}{2}$ saltos para a esquerda e chega ao bordo esquerdo do tabuleiro; nessas $\frac{n}{2}$ jogadas, ele pode percorrer, no máximo, uma distância $\frac{3}{2}n$. Ora a distância a percorrer desde o ponto E ao ponto de saída da pulga (no bordo esquerdo) é

$$\begin{array}{ll} \dfrac{5}{2}n - x - t & \text{se ele for pelo lado sul;} \\ \dfrac{3}{2}n + x + t & \text{se ele for pelo lado norte.} \end{array}$$

Qualquer destes números é superior a $\frac{3}{2}n$, o que significa que a pulga escapa. Nota: na prova da desigualdade $\frac{5}{2}n - x - t > \frac{3}{2}n$ é essencial usar-se $n > 4$. De facto, vimos no problema 4 que, num tabuleiro "pequeno" (*i.e.*, $n = 4$), o escorpião pode usar a defesa de caras para suster a pulga.