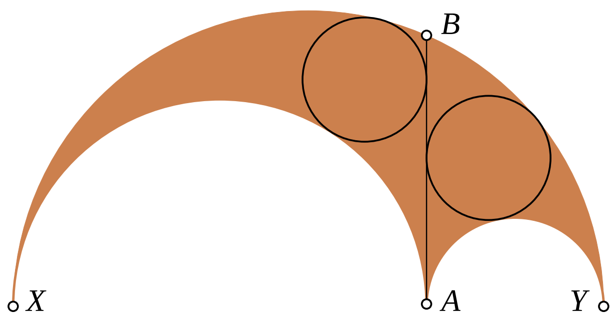
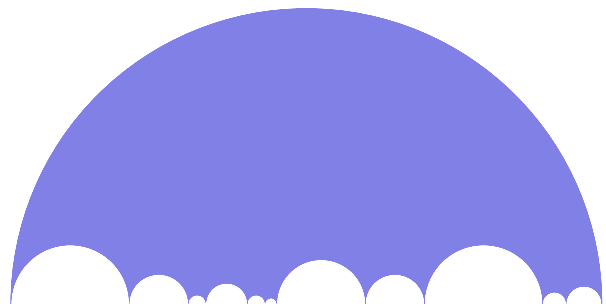
$A\rho\beta\eta\lambda o\varsigma$

O título desta jornada vai em Grego, um luxo que poderá não se repetir por muitas outras. É uma honra celebrar Arquimedes, considerado como o maior matemático da Antiguidade. Acredita-se que tenha





estudado o *arbelos*, mas ao certo não se sabe. A palavra significa “faca de sapateiro"e a forma geométrica é o que sobra dum semi-círculo depois de dele se retirarem dois semi-círculos menores (destes, na figura da esquerda, apenas se percebem as dentadas que deixaram). Os semi-círculos menores têm centros no diâmetro $[XY]$ do maior, são tangentes entre si e cada um deles é também tangente ao semi-círculo maior. A figura da direita mostra um *arbelos múltiplo*: do semi-círculo maior foram retirados 11 semi-círculos menores, com centros no diâmetro do maior e com as tangências que a figura mostra.

0. *Arquimedes nasceu no ano 287 AC. Quantas velas teria ele de soprar este ano se por cá aparecesse?*
1. *Determinem o perímetro do* arbelos *múltiplo, sabendo que o raio do círculo maior é* 1 *e que os raios dos* 11 *círculos menores, quando postos por ordem crescente, crescem em proporção geométrica.*
2. *Provem que a área do* arbelos *é igual à área do círculo que tem como diâmetro o segmento vertical* $[AB]$ *marcado na figura.*
3. *Considerem todos os* arbelos *múltiplos cujo arco maior tem raio* 1 *e que têm* 2300 *ou menos dentadas. Qual o máximo da área desses* arbelos*? Porquê?*
4. *Seja* M *a interseção do segmento* $]BX[$ *com a semi-circunferência esquerda do* arbelos*, e* N *a interseção de* $]BY[$ *com a semi-circunferência da direita. Provem que* $[ANBM]$ *é um retângulo.*
5. *Provem que a reta* MN *é tangente a ambos os semicírculos menores.*
6. *Considerem todos os* arbelos *com semicírculo maior de raio* 1*. Determinem, justificando, o máximo possível da área do retângulo* $[ANBM]$ *e para que* arbelos *esse máximo é atingido.*
7. Os gémeos de Arquimedes. *Provem que as duas circunferências marcadas no* arbelos *têm raios iguais.*

RESPOSTAS

0. *Arquimedes nasceu no ano 287 AC. Quantas velas teria ele de soprar este ano se por cá aparecesse?*

Foi indicado, por historiador do século XII, que Arquimedes teria 75 anos quando foi morto na conquista romana de Siracusa em 212 AC. Daí se deduz ter nascido em 287 AC. Fazendo a diferença de -287 para 2014 obtemos 2301. Mas é preciso tirar 1, pois na contagem histórica não existiu ano 0. Portanto Arquimedes sopraria este ano 2300 velas. No entanto, não se sabe ao certo se terá morrido ao 75, nem o significado que no séc. XII se atribuía a datas como 212 AC...

1. *Determinem o perímetro do* arbelos *múltiplo, sabendo que o raio do círculo maior é* 1 *e que os raios dos* 11 *círculos menores, quando postos por ordem crescente, crescem em proporção geométrica.* É uma finta, pois tenham os círculos menores o tamanho que tiverem, o perímetro do *arbelos* múltiplo é sempre $2\pi R$, com R o raio do círculo maior.

2. *Provem que a área do* arbelos *é igual à área do círculo que tem como diâmetro o segmento vertical* $[AB]$ *marcado na figura.* Seja R o raio do arco maior e $r \geqslant R/2$ o raio do arco intermédio do *arbelos* (o da esquerda, na figura). O outro arco tem raio $s = R - r$. A área do *arbelos* é

$$\Delta = \pi\big(R^2 - r^2 - (R-r)^2\big)/2 = \pi r s$$

A distância de A ao centro do arco maior é $2r - R$. Pitágoras dá-nos $\overline{AB}^2 = R^2 - (2r-R)^2$; portanto a área do círculo de diâmetro $\overline{AB}$ é

$$\Gamma = \pi\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = \pi\,\frac{R^2 - (2r-R)^2}{4} = \cdots = \pi r s = \Delta.$$

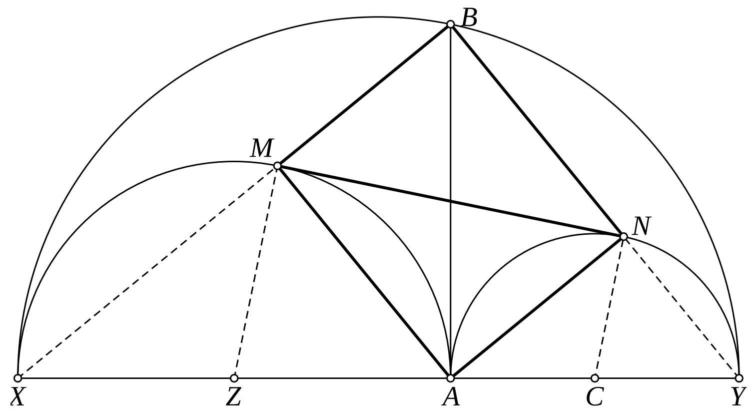
3. *Considerem todos os* arbelos *múltiplos cujo arco maior tem raio* 1 *e que têm* 2300 *ou menos dentadas. Qual o máximo da área desses* arbelos*? Porquê?*

Resolve-se com n em vez de 2300. Sejam $r_1, \ldots, r_n$ os raios dos arcos menores. Temos $r_1 + \cdots + r_n = 1$; tomamos $r_i \geqslant 0$ o que permite, anulando alguns dos r_i, abranger todos os *arbelos* com n ou menos dentadas. Prova-se, por indução, que *o máximo da área é atingido sse os* r_i *são todos iguais entre si.* Para $n = 2$ vimos acima que a área do *arbelos* é $\pi r_1 r_2$. Pondo $x = r_1$, a área é $f(x) = \pi x(1-x) = \frac{\pi}{4} - \pi(x - \frac{1}{2})^2$, que tem um máximo no único maximizante $x_0 = \frac{1}{2}$; isto prova o pretendido para $n = 2$.

Aceitando que para *arbelos* de n dentadas o máximo ocorre sse todos os r_i são iguais, consideremos um *arbelos* com $n+1$ dentadas *não todas iguais*. Existe um k tal que $r_k \neq r_{k+1}$. Os arcos consecutivos de raios r_k, r_{k+1} definem um *arbelos* auxiliar de arco maior com raio $\rho = r_k + r_{k+1}$. Fixando este ρ e fazendo variar apenas os raios r_k, r_{k+1} de modo a satisfazer $\rho = r_k + r_{k+1}$, a área do *arbelos* auxiliar atingirá um máximo quando os dois raios variáveis forem iguais. Isto mostra que pode incrementar-se a área do grande *arbelos* inicial. O resultado desejado fica provado.

No caso concreto em questão, tem-se $r_i = 1/2300$, pelo que o máximo é

$$\frac{1}{2}\pi - 2300\,\frac{1}{2}\,\pi\,\frac{1}{2300^2} = \pi\,\frac{2299}{4600}.$$



4. *Seja M a interseção do segmento $]BX[$ com a semi-circunferência esquerda do* arbelos*, e N a interseção do segmento $]BY[$ com a semi-circunferência da direita. Provem que $[ANBM]$ é um retângulo.* O ângulo $\angle XBY$ é reto, pois está inscrito na circunferência maior do *arbelos* e subtende o diâmetro $[XY]$. O mesmo princípio aplica-se aos ângulos $\angle XMA$ e $\angle ANY$. Portanto o quadrilátero $[ANBM]$ tem 3 ângulos internos retos e, a fortiori, o seu ângulo $\widehat{A}$ também é reto, pois a soma dos ângulos internos dum quadrilátero é 2π. Portanto $[ANBM]$ é um retângulo.

5. *Provem que a reta MN é tangente a ambos os semicírculos menores.* Os triângulos $[XMA]$ e $[ANY]$ são semelhantes por terem lados dois a dois paralelos; portanto MZ e NC são paralelas (por serem medianas homólogas). Basta então provar que MZ é perpendicular a MN. Temos

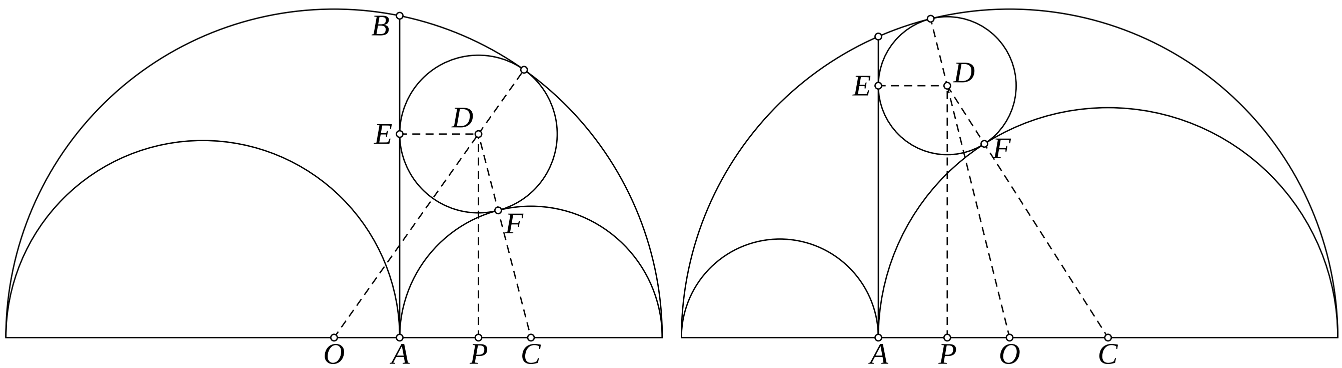
$$\angle ZMA = \angle ZAM = \angle MBA = \angle MNA,$$

a primeira identidade vem de $\triangle\ AZM$ ser isósceles; a segunda por serem ângulos agudos de lados perpendiculares e a terceira por igualdades de triângulos determinados pelas diagonais dum retângulo. Temos então $\angle ZMN = \angle ZMA + \angle AMN = \angle MNA + \angle AMN = \pi/2$, como pretendíamos.

6. *Considerem todos os* arbelos *com semicírculo maior de raio* 1. *Determinem, justificando, o máximo possível da área do retângulo $[ANBM]$ e para que* arbelos *esse máximo é atingido.* Os pontos A, N, B, M são concíclicos, pois estão sobre a circunferência $\mathscr{C}$ circunscrita ao retângulo $[ANBM]$, a qual tem $[AB]$ e $[NM]$ por diâmetros. Fixemos o diâmetro $[AB]$ e alteremos a posição do ponto M para M', mantendo M' sobre $\mathscr{C}$. Dos triângulos $[ABM']$ que assim se obtêm, o máximo da área é atingido quando a distância de M' a AB é máxima; coisa análoga se passa quando se faz variar o ponto N sobre $\mathscr{C}$; portanto, variando M, N em simultâneo, o máximo da área (para $[AB]$ fixado) é atingido quando e só quando $[AM'BN']$ é um quadrado; e esse máximo é, obviamente, $\frac{1}{2}\overline{AB}^2$.

O máximo de $\overline{AB}$ é 1, que se atinge quando e só quando A é o centro do círculo maior do *arbelos*. Conclusão: o *arbelos* que produz o máximo da área do tal retângulo é o *arbelos* simétrico, com os dois círculos menores iguais; e o máximo é $\frac{1}{2}$, a área do quadrado de diagonal 1.

7. *Provem que as duas circunferências marcadas no* arbelos *têm raios iguais.* Sejam R o raio do semicírculo maior do *arbelos* e r, s os raios dos dois semicírculos menores, onde r é o raio do do lado direito. Temos $R = r + s$. Vamos provar que os dois gémeos de Arquimedes têm raios iguais a $x = rs/R$. Primeiro provamos para o caso do círculo de Arquimedes do lado direito de AB. Vejam-se as figuras,



onde E, F, G são pontos de tangência do círculo de Arquimedes com centro em D; O e C são os centros do semicírculo maior e do menor à direita; P é o pé da perpendicular de D sobre a reta OC. Seja $x = \overline{ED} = \overline{AP}$ o raio do círculo de Arquimedes. Há três possibilidades a considerar: (α) A entre O e P; (β) O entre A e P; (γ) P entre A e O. As figuras ilustram os casos (α) e (γ). Nos 3 casos, o teorema de Pitágoras aplicado a $[ODP]$ e $[CDP]$ produz:

$$\overline{OD}^2 - \overline{OP}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{PC}^2. \tag{1}$$

Vamos exprimir os quadrados de (1) em função de R, r, x. Temos, nos 3 casos: $\overline{OD} = R - x$; $\overline{PC} = r - x$; $\overline{CD} = r + x$. Mas $\overline{OP}$ depende do caso:

(α) $\overline{OP} = x + \overline{OA} = x + R - 2r$;

(β) $\overline{OP} = x - \overline{OA} = x - (R - 2s) = x + R - 2r$ (a mesma fórmula que no caso anterior!);

(γ) $\overline{OP} = \overline{OA} - x = (R - 2s) - x = -(x + R - 2r)$.

Portanto, em todos os casos, $\overline{OP}^2 = (x + R - 2r)^2$. Substituindo em (1), obtemos $x = r(R - r)/R = rs/R$, como pretendíamos.

Para o círculo de Arquimedes do lado esquerdo a fórmula é a mesma, pois, simetrizando o *arbelos* relativamente ao seu eixo “vertical", o círculo da esquerda vai para a direita, r transforma-se em s e s transforma-se em r.