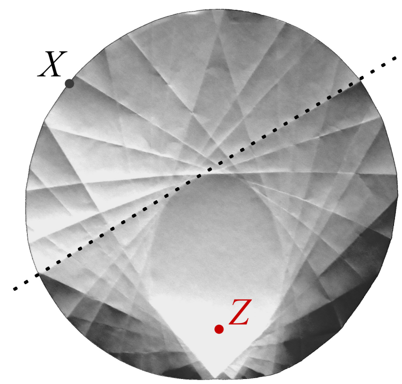
Dobragens



Num círculo de papel de raio R e centro C, fixem um ponto Z cuja distância ao centro é d, um real tal que $0 \leqslant d < R$. Escolham um ponto X no bordo do círculo e dobrem o papel de modo a fazer coincidir X com Z. Vinquem bem a dobra, depois desdobrem. Escolham outro ponto X e repitam a operação de modo a obter novo vinco no papel. Façam isto um bom número de vezes, variando as vossas escolhas de X, sem mudar Z. Fica no papel uma região, que parece ser um disco elítico, que não foi propriamente atravessada por nenhum vinco. A ideia desta 3ª Jornada é provarem que isso é verdadeiro.

Para *elipse* e *disco elítico*, sugere-se que utilizem a definição do jardineiro. Conjetura-se que a região da figura é um disco elítico $\mathscr{D}$, delimitado por uma elipse $\mathscr{E}$. Supomos que $\mathscr{D}$ contém $\mathscr{E}$

1. *Indiquem a vossa conjetura sobre quais os focos e as medidas dos eixos de $\mathscr{E}$. O caso $d = R$ foi excluído do problema; o que acontece nesse caso?*

2. *Provem que cada vinco, interpretado como uma reta, interseta a elipse conjeturada num e apenas num ponto. (Se isto não for verdade, a vossa conjetura não é boa.)*

3. *Cada vinco v determina dois semiplanos cuja interseção é v; denotamos por S_v o semiplano que contém Z. Provem que, para qualquer vinco v, o disco elítico $\mathscr{D}$ está contida em S_v.*

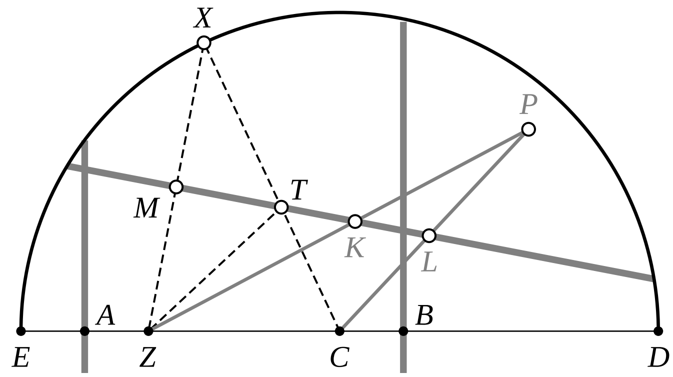
4. *Provem que o disco elítico $\mathscr{D}$ é a interseção de todos os semiplanos S_v.*

5. *Provem que por cada ponto do plano passam exatamente w vincos, onde w pode tomar um de 3 valores: 0, 1 ou 2. Para cada um destes w's, qual o conjunto dos pontos pelos quais passam w vincos? Descrevam uma construção de régua e compasso que determine o(s) vinco(s) que passa(m) por cada ponto P fixado no plano. Justifiquem.*

6. *Provem que $\mathscr{D}$ é estritamente convexo, isto é: se P, Q são pontos distintos do disco, então o segmento $[PQ]$ está contido no disco e o seu ponto médio não pertence à elipse $\mathscr{E}$.*

7. *Determinem, justificando, o lugar geométrico dos pontos do plano pelos quais passam dois vincos perpendiculares entre si.*

RESPOSTAS



A figura seguinte contém várias construções. Nela estão a circunferência, os pontos Z, C e o diâmetro $[ED]$ que passa por Z. A traço cinzento grosso estão 3 vincos, dois verticais e um 'genérico'. A construção geral é esta: escolhe-se X, traçam-se $[XZ]$ e $[XC]$; o vinco é a mediatriz de $[XZ]$; T é a interseção do vinco com $[XC]$. Este T é, como se verá, o ponto de tangência do vinco com a elipse. Note-se que A, B são os pontos de cruzamento do eixo ZC com os dois únicos vincos verticais. Pode conjeturar-se, corretamente, que $\mathscr{E}$ está inscrita no retângulo determinado pelos vincos verticais e os horizontais; as medidas dos eixos são, então, a base e altura desse retângulo. Repare-se que $\overline{AE} = \overline{AZ}$ e $\overline{BD} = \overline{BZ}$, donde $\overline{AZ} = \overline{CB}$ e $\overline{AB} = R$.

1. *Indiquem a vossa conjetura sobre quais os focos e as medidas dos eixos de $\mathscr{E}$. O caso $d = R$ foi excluído do problema; o que acontece nesse caso?*
A conjetura correta é: os focos são Z e C, o eixo maior é $[AB]$, onde A e B são os pontos médios de $[ZE]$ e $[ZD]$, respetivamente. A distância focal é d, e os eixos medem R e $\sqrt{R^2 - d^2}$.

De acordo com esta conjetura, o disco elítico $\mathscr{D}$ é o conjunto dos pontos P tais que $\overline{PZ} + \overline{PC} \leqslant R$.

No caso $d = R$, temos $Z = A = E$ e $B = C = T$. O vinco vertical que, na figura passa por A não existe quando $d = R$. Os vincos são todos os diâmetros da circunferência. □

2. *Provem que cada vinco, interpretado como uma reta, interseta a elipse conjeturada num e apenas num ponto. (Se isto não for verdade, a vossa conjetura não é boa.)*
O ponto T do vinco pertence a $\mathscr{E}$, pois $\overline{TZ} + \overline{TC} = \overline{TX} + \overline{TC} = R$. Seja K um ponto do vinco, $K \neq T$; então $\overline{KZ} + \overline{KC} = \overline{KX} + \overline{KC} > R$, com desigualdade estrita, pois $K \notin CX$ (se $K \in CX$, o vinco passaria por X, o que não pode ser). Portanto $K \notin \mathscr{E}$. □

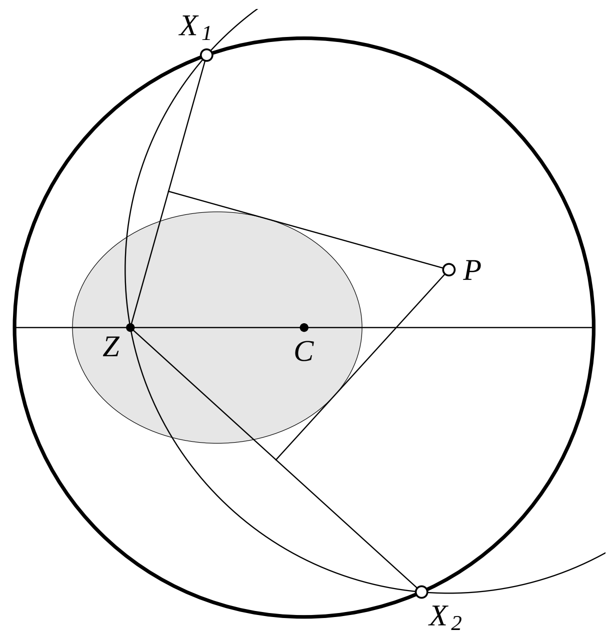
3. *Cada vinco v determina dois semiplanos cuja interseção é v; denotamos por S_v o semiplano que contém Z. Provem que, para qualquer vinco v, o disco elítico $\mathscr{D}$ está contida em S_v.*
Prova-se que, escolhido $P \neq T$ na secção onde reside X, P não pertence a $\mathscr{E}$; provaremos $\overline{PZ} + \overline{PC} > R$. Já vimos que isso vale se P pertence ao vinco e $P \neq T$. Agora o caso em que P não está no vinco. Seja $[KL]$ a interseção do vinco com o triângulo $[ZPC]$. Notar que pode acontecer $K = L$ (sse $P \in [ED]$) ou $M \in [KL]$; a figura apenas retrata um caso não degenerado, com P no semicírculo norte, mas o raciocínio seguinte vale em todos os casos. Temos $\overline{PK} + \overline{PL} > \overline{KL}$, pois P não está no vinco. Segue-se

$$\overline{PZ} + \overline{PC} = \overline{PK} + \overline{KZ} + \overline{PL} + \overline{LC} > \overline{KL} + \overline{KX} + \overline{LC} \geqslant \overline{KC} + \overline{KX} \geqslant R.$$

4. *Provem que o disco elítico $\mathscr{D}$ é a interseção de todos os semiplanos S_v.*
O problema 3 diz que $\mathscr{D}$ está contido na dita interseção. Seja, agora, H um ponto que não está em $\mathscr{D}$,

isto é: $\overline{HZ} + \overline{HC} > R$. É preciso encontrar um vinco v' tal que $H \notin S_{v'}$. Seja X' a interseção com a circunferência da semi-reta $\dot{C}H$. A construção básica dá-nos um vinco v', que é a mediatriz de $[ZX']$, e o seu ponto de tangência à elipse, $T' \in \dot{C}X'$. O ponto T' parte a semi-reta em duas partes: $[CT']$ e $\dot{T}X' \setminus \{T'\}$; por aplicação simples da desigualdade triangular, $[CT']$ está contido em $S_{v'}$, e $\dot{T}X' \setminus \{T'\}$ não interseta $S_{v'}$. Portanto H não pertence a $S_{v'}$. □

5. *Provem que por cada ponto do plano passam exatamente w vincos, onde w pode tomar um de 3 valores: 0, 1 ou 2. Para cada um destes w's, qual o conjunto dos pontos pelos quais passam w vincos? Descrevam uma construção de régua e compasso que determine o(s) vinco(s) que passa(m) por cada ponto P fixado no plano. Justifiquem.*



Para cada ponto P, seja $f(P) = \overline{PZ} + \overline{PC}$. Recorde-se que *vinco* é a mediatriz dum segmento $[ZX]$, para algum X da circunferência. Os vincos que passam por P são originados por pontos X tais que: $\overline{PX} = \overline{PZ}$; as soluções desta equação são os pontos de interseção da circunferência $\mathscr{C}$ e da que tem centro em P e passa por Z; a distância de P a $\mathscr{C}$ é igual a $R - \overline{PC}$, pelo que as duas se intersetam sse $f(P) \geqslant R$, sendo tangentes sse $f(P) = R$. Portanto há dois pontos X ao dispor sse $f(P) > R$, isto é, sse P está fora do disco.

Construção com régua e compasso: traça-se a circunferência de centro P que passa em Z; tomam-se os pontos de interseção X_1 e X_2; os vincos pedidos são as perpendiculares de P sobre ZX_1 e ZX_2. □

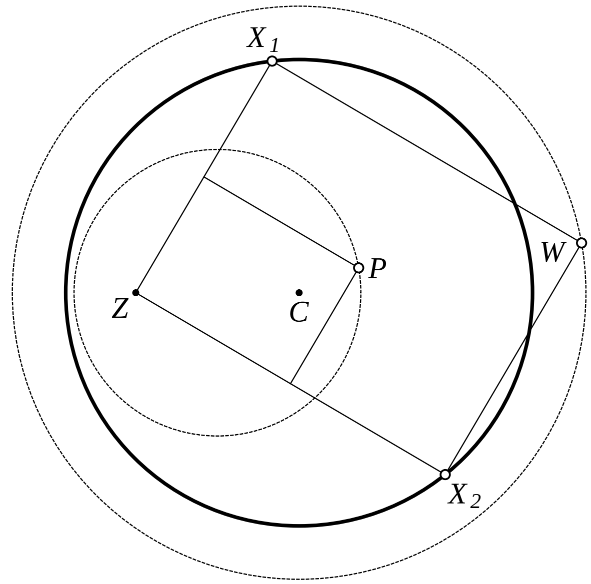
6. *Provem que $\mathscr{D}$ é estritamente convexo, isto é: se P, Q são pontos distintos do disco, então o segmento $[PQ]$ está contido no disco e o seu ponto médio não pertence à elipse $\mathscr{E}$.*
Se $P, Q \in \mathscr{D}$, então $P, Q \in S_v$ para todo o vinco v; portanto $[PQ] \subseteq S_v$, para todo o v; o enunciado 4 implica $[PQ] \subseteq \mathscr{D}$.

Seja U o ponto médio de $[PQ]$; por absurdo, admitamos que $U \in \mathscr{E}$. Toma-se X em $\mathscr{C}$ tal que $U \in [CX]$ e constrói-se o correspondente vinco v que passa por U; os pontos P, Q pertencem ambos a S_v e o seu ponto médio está em v; portanto P, Q também estão em v; há, pois, mais do um ponto de $\mathscr{E}$ no vinco v, o que contradiz o enunciado do problema 2. □

7. *Determinem, justificando, o lugar geométrico dos pontos do plano pelos quais passam dois vincos perpendiculares entre si.*
Em relação à figura anterior, note-se que P é o circuncentro do triângulo $[X_1ZX_2]$; agora, estamos a supor que o ângulo em P é $\frac{\pi}{2}$, pelo que o único quadrilátero desenhado na figgura acima é um retângulo e P é o ponto médio de $[X_1X_2]$.

Na figura ao lado, traçámos o retângulo $[X_1ZX_2W]$, do qual P é o centro. Prova-se que a distância de W a C é $\sqrt{2R^2-d^2}$. A condição de ortogonalidade é

$$\overrightarrow{ZX_1}\cdot\overrightarrow{ZX_2}=0. \tag{1}$$



Tomando C como origem, temos $\overrightarrow{ZX_1}=\overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{CX_1}$ e $\overrightarrow{ZX_2}=\overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{CX_2}$. Portanto (1) equivale a:

$$(\overrightarrow{CX_1}+\overrightarrow{CX_2})\cdot\overrightarrow{CZ}=\overrightarrow{CX_1}\cdot\overrightarrow{CX_2}+d^2. \tag{2}$$

Por outro lado, $\overrightarrow{CW}=\overrightarrow{CZ}+\overrightarrow{ZW}=\overrightarrow{CZ}+\overrightarrow{ZX}_1+\overrightarrow{ZX}_2$, pelo que $\overrightarrow{CW}=\overrightarrow{CX}_1+\overrightarrow{CX}_2-\overrightarrow{CZ}$. Tendo isto em conta, calculamos:

$$\overline{CW}^2=\overrightarrow{CW}\cdot\overrightarrow{CW}=(\overrightarrow{CX}_1+\overrightarrow{CX}_2-\overrightarrow{CZ})\cdot(\overrightarrow{CX}_1+\overrightarrow{CX}_2-\overrightarrow{CZ}).$$

Desenvolve-se a expressão do membro direito e toma-se em conta a equação (2) e também as condições $\overline{CX}_1=\overline{CX}_2=R$ e $\overline{CZ}=d$:

$$\overline{CW}^2=2R^2+d^2+2\overrightarrow{CX}_1\cdot\overrightarrow{CX}_2-2(\overrightarrow{CX_1}+\overrightarrow{CX_2})\cdot\overrightarrow{CZ} \tag{3}$$

$$=2R^2+d^2+2\overrightarrow{CX}_1\cdot\overrightarrow{CX}_2-2(\overrightarrow{CX_1}\cdot\overrightarrow{CX_2}+d^2)=2R^2-d^2. \tag{4}$$

Portanto, W está sobre a circunferência de centro C e raio $\sqrt{2R^2-d^2}$.

Reciprocamente, escolhido um W arbitrário sobre a dita circunferência, temos de provar que no ponto médio de $[ZW]$, chamemos-lhe P, passam dois vincos perpendiculares entre si. Para tal, aplica-se a construção do problema 5, faltando provar que $\overrightarrow{ZX_1}$ é ortogonal a $\overrightarrow{ZX_2}$. Ora isso resulta da identidade $\overline{CW}^2=2R^2-d^2$ que estamos a admitir; de facto, esta identidade implica esta outra $(3)=(4)$ e esta implica (2), isto é, a ortogonalidade $\overrightarrow{ZX_1}\cdot\overrightarrow{ZX_2}=0$. Portanto W percorre toda a circunferência em causa.

O ponto P resulta de W por homotetia de centro Z e razão $\frac{1}{2}$. Portanto P percorre a circunferência de centro no ponto médio de $[ZC]$ (o centro da elipse $\mathscr{E}$) e raio $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$. □