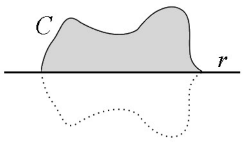
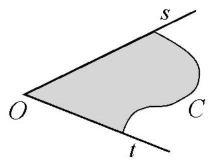
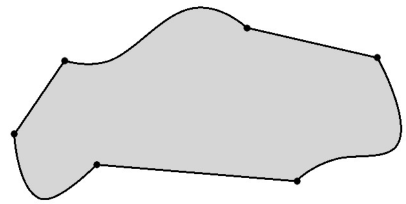
Problemas Isoperimétricos







Considerem uma curva no plano. Aqui, uma curva é sempre contínua e simples, *i.e.*, sem pontos múltiplos. Se for fechada, o conjunto plano constituído pela curva e pelo seu conteúdo designa-se por *região*. Dada uma região X de área A e perímetro P, ao número $r(X) = A/P^2$ chamamos *razão isoperimétrica* de X. Notem que regiões semelhantes têm a mesma razão isoperimétrica. Um problema isoperimétrico consiste em, dada uma família de regiões de perímetros iguais, determinar qual o supremo das áreas dessas regiões e quais as regiões da família (se existem) para as quais a área é máxima. O famoso *teorema isoperimétrico* afirma que $r(X) \leqslant {}^1\!/_{4\pi}$, com igualdade se e só se X é um círculo.

As vossas respostas devem sempre ser devidamente justificadas.

1. *Na família dos triângulos existem elementos de razão isoperimétrica máxima. Quais são eles?*
2. *Um quadrilátero tem lados de comprimentos a, b, c, d. De entre os quadriláteros com lados com esses comprimentos, quais os de maior área?* (Sugestão: usem a fórmula de C. Bretschneider (1842) que dá a área do quadrilátero: $\mathscr{A} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\mu}$, onde s é o semi-perímetro e μ a média de dois ângulos opostos.)
3. *Dentre os polígonos de n lados existem elementos de razão isoperimétrica máxima. Quais são eles?*
4. *Uma curva simples C de comprimento fixo L tem as suas extremidades apoiadas numa reta r, ficando toda do mesmo lado de r. (a) Provem que existem curvas deste género que tornam máxima a área "entre" C e r. Que curvas são essas?* (Sugestão: use o truque da reflexão, de J. Steiner, 1838.) *(b) Resolva o mesmo problema, supondo que as extremidades de C estão na reta r a uma distância d independente de C.*
5. *São dadas duas semi-retas s, t de origem O formando um ângulo convexo sOt de amplitude fixa α. Contida em sOt está uma curva C, de comprimento fixo L, com uma extremidade em s e outra em t. Provem a existência de C que maximiza a área da região delimitada por C no ângulo sOt.*
6. *Dado um triângulo T, qual é o comprimento e a forma das curvas mais curtas que dividem T em duas regiões de áreas iguais?*
7. *Uma região é delimitada por uma concatenação de curvas simples em número par, $S_1, S_2, \dots, S_{2n}$, onde cada S_k tem comprimento fixo L_k. Para k ímpar, S_k é um segmento de reta; para k par S_k tem forma à nossa escolha. Das regiões possíveis identifiquem as que têm área máxima, e provem a sua maximalidade. Para simplificar, suponham que os números $m = \max\{L_1, L_2, \dots, L_{2n}\}$ e $p = L_1 + L_2 + \cdots + L_{2n}$ satisfazem $p > (\frac{\pi}{2} + 1)m$.*

RESPOSTAS

1. *Na família dos triângulos existem elementos de razão isoperimétrica máxima. Quais são eles?*

Admitamos que certo triângulo $[ABC]$ de r.i. máxima não é equilátero; seja, *e.g.*, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Fixemos A, B e façamos variar C sem alterar o perímetro; então C descreve a elipse de focos A e B. O máximo da área desse triângulo variável ocorre quando $\overline{AC} = \overline{BC}$ e, nesta situação, a área do triângulo é superior à do inicial, contradizendo a maximalidade. Portanto os triângulos maximais são os equiláteros.

2. *Um quadrilátero tem lados de comprimentos a, b, c, d. De entre os quadriláteros com lados com esses comprimentos, quais os de maior área?* (Sugestão: usem a fórmula de C. Bretschneider (1842) que dá a área do quadrilátero: $\mathscr{A} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\mu}$, onde s é o semi-perímetro e μ a média de dois ângulos opostos.)

De acordo com a fórmula sugerida, o máximo de $\mathscr{A}$ ocorre quando $\mu = \frac{\pi}{2}$, *i.e.*, quando o quadrilátero é cíclico. É preciso mostrar que um dos quadriláteros de lados a, b, c, d é cíclico. Tome-se um dos quadriláteros $[ABCD]$, tal que $a = \overline{AB}, b = \overline{BC}, c = \overline{CD}, d = \overline{DA}$. Alongue-se a diagonal $[AC]$ afastando o mais possível A de C (sem alterar as medidas dos lados, claro), até que um dos ângulos $\widehat{B}$ ou $\widehat{D}$ se torna raso. Isto mostra que, em certa posição de A e C, temos $\widehat{B} + \widehat{D} > \pi$; e, nessa posição, $\widehat{A} + \widehat{C} < \pi$. Alongando a outra diagonal, $[BD]$, ou (o que é equivalente) *encurtando* $[AC]$, chegamos à conclusão de que existe uma posição do quadrilátero tal que $\widehat{A} + \widehat{C} > \pi$. Por continuidade, existe um tamanho de $\overline{AC}$ tal que $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$. Nessa situação, o quadrilátero é cíclico.

3. *Dentre os polígonos de n lados existem elementos de razão isoperimétrica máxima. Quais são eles?*

Seja $M = [P_1P_2 \dots P_n]$ um polígono maximizante. Prova-se que M é regular.

M é convexo. Prova. Se não fosse, existiria uma reta r, como M todo de um lado de r, tocando dois vértices P_i, P_{i+k} não adjacentes (adota-se a numeração cíclica: $P_{qn+j} = P_j$). A secção $[P_i \dots P_{i+k}]$ forma uma concavidade de M; refletindo $[P_i \dots P_{i+k}]$ relativamente a r, obtemos um polígono do mesmo perímetro e maior área. Contradição.

M é equilátero. Prova. Se não fosse, existiriam dois lados adjacentes de comprimentos distintos. Podemos admitir que se trata de $[P_1P_2P_3]$, com $\overline{P_1P_2} \neq \overline{P_2P_3}$. Fixam-se todos os vértices exceto P_2, que deslocamos de modo a manter invariante $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}$. Como na resolução do problema 1, podemos obter um polígono do mesmo perímetro e maior área. Contradição.

M é equiângulo. Prova. Podemos supor $n > 3$ e que M é convexo e equilátero. Admitamos que não é equiângulo; existem então dois ângulos distintos consecutivos, digamos, $\widehat{P_i} \neq \widehat{P_{i+1}}$. Fixam-se todos os vértices exceto P_i, P_{i+1}, e observamos o quadrilátero $[P_{i-1}P_iP_{i+1}P_{i+2}]$; ele não é cíclico, pois, se fosse, ter-se-ia $\widehat{P_i} = \widehat{P_{i+1}}$. Podemos levá-lo a uma posição cíclica (de trapézio isósceles) movendo P_i, P_{i+1} sem alterar os comprimentos dos lados do quadrilátero inicial. Manteve-se o perímetro e a fórmula de Bretschneider mostra que a área aumentou. Contradição.

4. *Uma curva simples C de comprimento fixo L tem as suas extremidades apoiadas numa reta r, ficando*

toda do mesmo lado de r. (a) *Provem que existem curvas deste género que tornam máxima a área "entre"* C *e* r. *Que curvas são essas?* (Sugestão: use o truque da reflexão, de J. Steiner, 1838.) (b) *Resolva o mesmo problema, supondo que as extremidades de* C *estão na reta* r *a uma distância* d *independente de* C.

(a) Seja C' a refletida de C relativamente a r. $C \cup C'$ é curva fechada de comprimento $2L$. O teorema isoperimétrico leva à conjetura: as curvas C maximizantes da área "entre" C e r são as semicircunferências com diâmetro assente em r. Admitamos que a conjetura não é verdadeira; então existe uma curva C que não é do tipo conjeturado e que determina maior área; $C \cup C'$ abarca maior área que o círculo de perímetro $2L$, o que contradiz o teorema isoperimétrico.

(b) *Seja* Γ *o arco de círculo de comprimento* L *e corda* d*;* Γ *é maximizante da área "entre"* C *e* r.
Prova. Seja ρ o raio de Γ, $\theta = \frac{L}{\rho}$ o ângulo ao centro correspondente e O o centro do círculo. Em vez de refletir à Steiner, concatena-se a C o arco de círculo Γ' complementar de Γ; Γ' tem as mesmas extremidades que C e comprimento $L' = 2\pi\rho - L$. Admitamos que Γ não é maximizante; então existe uma outra curva C que determina maior área que Γ; $C \cup \Gamma'$ tem perímetro $2\pi\rho$ e abarca maior área que o círculo de igual perímetro, o contradiz o teorema isoperimétrico.

5. *São dadas duas semi-retas* s, t *de origem* O *formando um ângulo convexo* sOt *de amplitude fixa* α. *Contida em* sOt *está uma curva* C*, de comprimento fixo* L*, com uma extremidade em* s *e outra em* t. *Provem a existência de* C *que maximiza a área da região delimitada por* C *no ângulo* sOt.

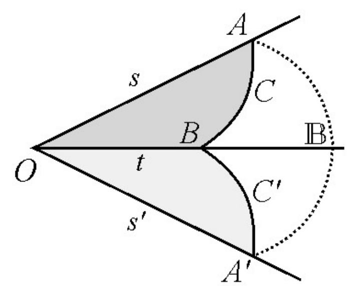


Figura 1:

Teorema 1. *A área da região correspondente a* C *é máxima quando e só quando a curva é um arco de circunferência de centro* O.

Prova. Claro que um tal arco é único: tem centro O e raio $\rho = L/\alpha$. Vamos chamar-lhe Γ. Seja $\mathscr{A}_C$ a área determinada por C no ângulo sOt. Por absurdo, admitamos que certa curva $C \neq \Gamma$ verifica $\mathscr{A}_C \geqslant \mathscr{A}_\Gamma$. Sejam $A \in s$ e $B \in t$ as extremidades de C. Fixando provisoriamente A, B, e considerando apenas as curvas com essas extremidades, resulta do problema 4 que a área $\mathscr{A}_C$ é máxima quando C é um arco de circunferência. Doravante, supomos que as curvas C são arcos de circunferência e *arco* é abreviatura de "arco de circunferência").

Lema 2. *Considere-se a família dos triângulos* $[AOB]$*, com ângulo* $\widehat{O}$ *fixo,* $(= \alpha)$*, e lado oposto* $\overline{AB}$ *fixo. A área* $\mathscr{A}_{[AOB]}$ *é função estritamente decrescente da diferença angular* $|\widehat{A} - \widehat{B}|$.

Prova do lema 2. Imaginemos os pontos A, B fixos e O sobre o arco (dito *capaz de* α) tal que $\angle AOB = \alpha$. O lema é resultado óbvio do facto de $\mathscr{A}_{[AOB]}$ ser proporcional à distância de O a AB. □

Reflita-se a região relativamente a t (*cf.* figura 1). Se $\widehat{ABA'}$ não é um arco, a área determinada por $C \cup C'$ no ângulo sOs' poderá aumentar-se estritamente substituindo $\widehat{ABA'}$ por um arco de circunferência $\widehat{A\mathbb{B}A'}$ (a ponteado) de comprimento $2L$ e corda $[AA']$; isto mostra podermos supor que C é normal a t em B, ou normal a s em A (para se ter esta situação, basta trocar os papéis de s, t, refletindo relativamente a s).

CASO 1: C *normal a* t *em* B*, e* $\overline{OB} \geqslant \overline{OA}$ (como na figura 1, em que deverá pensar-se B na nova posição

$\mathbb{B}$). Claro que $\overline{OB} = \overline{OA}$ implica $C = \Gamma$, o que é absurdo, pelo que passamos a supor $\overline{OB} > \overline{OA}$. Se fosse $\rho < \overline{OA}$ (ρ = raio de Γ), C teria comprimento $> L$; se fosse $\rho > \overline{OB}$, seria $\mathscr{A}_\Gamma > \mathscr{A}_C$; estas duas contradições mostram que $\overline{OA} \leqslant \rho \leqslant \overline{OB}$. Usando o lema 2, podemos deslocar a secção circular $[AB] \cup C$ para uma nova posição $[A^*B^*] \cup C^*$, de modo a obter $\overline{OA^*} = \rho$ e $\mathscr{A}_C \leqslant \mathscr{A}_{C^*}$ (claro que $\mathscr{A}_C < \mathscr{A}_{C^*}$ se $\overline{OA} < \rho$. Portanto, podemos supor que $\overline{OA} = \rho$ e (por nova reflexão relativamente a t, se necessário) supor C normal a t em B. Ora isto implica $C = \Gamma$, o que é absurdo.

CASO 2: *C normal a t em B, e* $\overline{OB} < \overline{OA}$. Vamos reduzir ao caso anterior. Para isso, trocamos os papéis de (s, A) e (t, B), supondo que: C é normal a s em A, e $\overline{OA} < \overline{OB}$ (ver figura 2); note-se que estas condições equivalem a dizer que o centro de C está no prolongamento da semi-reta s, mas fora da semi-reta. Reflita-se a região relativamente a t como na figura 2. A ponteado, está o arco $\widehat{AA'}$ de centro O; ele tem comprimento inferior ao de $C \cup C'$ (que é $2L$). Portanto, o arco de corda $[AA']$ e comprimento $2L$ tem centro na semi-reta t; por isso, este arco tem ponto médio $\mathbb{B}$ tal que $\overline{O\mathbb{B}} \geqslant \overline{OA}$, como no CASO 1.

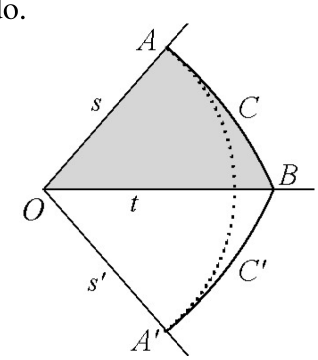


Figura 2:

6. *Dado um triângulo T, qual é o comprimento e a forma das curvas mais curtas que dividem T em duas regiões de áreas iguais?*

Comentário prévio. No problema anterior, podemos substituir cada região de fronteira $[AOB] \cup C$ por outra resultante desta por uma homotetia de centro O, de modo a que a região semelhante, $[A_1OB_1] \cup C_1$, tenha uma área $\mathscr{A}$ previamente fixada por nós. Consideramos, então, a família $\mathscr{F}$ das curvas C, contidas em sOt, com uma extremidade em s e outra em t, tais que $\mathscr{A}_C = \mathscr{A}$. O teorema 1 tem o seguinte corolário imediato

Teorema 1*. *Na família $\mathscr{F}$ existe uma e uma só curva de comprimento mínimo, que é o arco de circunferência de centro O. Esse arco tem, obviamente, comprimento $\sqrt{2\alpha\mathscr{A}}$.*

Há dois tipos de curvas a considerar: (i) as que têm um extremo num lado de T e o outro extremo noutro lado; (ii) as que têm os dois extremos no interior relativo dum certo lado de T. Seja $T = [FGH]$. Seja C de tipo (i); vamos supor que C *tem um extremo em* $[FG]$ *e o outro em* $[FH]$; se se tratasse apenas do ângulo determinado pelas semi-retas $\dot{F}G$ e $\dot{F}H$, a curva mais curta que determina uma área $\mathscr{A}_T/2$ no dito ângulo seria o arco Ω de centro F e comprimento $\sqrt{\widehat{F}\mathscr{A}_T}$; mas pode acontecer que o lado $[FH]$ intersete Ω; em tal eventualidade, as curvas do tipo indicado que determinam área $\mathscr{A}_T/2$ não serão arcos de círculo pelo que terão comprimentos $> \sqrt{\widehat{F}\mathscr{A}_T}$. Pelo problema 4, as curvas (ii) têm comprimentos $\sqrt{\pi\mathscr{A}_T}$, ou superiores se houver interferência dum dos outros dois lados.

Vamos supor que $\widehat{F} \leqslant \widehat{G} \leqslant \widehat{H}$. Então Ω será optimal se mostrarmos que está dentro de T. Há dois casos a considerar. *Caso (a), em que* $\widehat{H} \geqslant \frac{\pi}{2}$; o sector (circular) de centro F e raio $\overline{FH}$ que o ângulo em F determina está contido em T e tem área superior a $\mathscr{A}_T/2$, porque contém a mediana de T tirada do vértice H; portanto Ω está dentro de T. *Caso (b), em que* $\widehat{H} < \frac{\pi}{2}$; sejam P o ponto de $[GH]$ mais próximo de F, e $M.N$ os pontos médios de $[FG]$, $[FH]$, respectivamente; o sector de centro F e raio $\overline{FP}$ que o ângulo em F determina contém o quadrilátero $[FNPM]$ que tem área $\mathscr{A}_T/2$; portanto Ω está dentro de T.

7. *Uma região é delimitada por uma concatenação de curvas simples em número par, $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$, onde cada S_k tem comprimento fixo L_k. Para k ímpar, S_k é um segmento de reta; para k par S_k tem forma à nossa escolha. Das regiões possíveis identifiquem as que têm área máxima, e provem a sua maximalidade. Para simplificar, suponham que os números $m = \max\{L_1, L_2, \ldots, L_{2n}\}$ e $p = L_1 + L_2 + \cdots + L_{2n}$ satisfazem $p > (\frac{\pi}{2} + 1)m$.*

Seja $\mathscr{F}$ a família das curvas fechadas descritas no problema. Chamamos *nodos* de $C \in \mathscr{F}$ aos pontos de junção de S_i e S_{i+1}, para $i = 1, 2, \ldots$ (adoptamos a convenção: $S_{i+2n} = S_i$). Dizemos que $C \in \mathscr{F}$ é *concíclica*, se os seus nodos pertencem todos a uma circunferência Z e se, para k par, S_k é um arco de Z.

Teorema 4. (a) *Em $\mathscr{F}$ existe uma curva concíclica.* (b) *As curvas de $\mathscr{F}$ que abarcam área máxima são exatamente as concíclicas.*

Prova. (a) Podemos supor que S_1 é, de entre os segmentos, o de maior comprimento. Na circunferência Γ_r de equação $x^2 + y^2 = r^2$, colocamos o 1° nodo (origem de S_1) em $(r, 0)$; a partir dele, em sentido direto, inscrevemos ordenadamente os restantes nodos e curvas S_k de modo a que: para k ímpar, S_k é uma corda de Γ_r; para k par, S_k é um arco de Γ_r; e os comprimentos L_k são respeitados. Cada par de nodos consecutivos determina um ângulo ao centro; seja $\theta(r)$ a soma desses ângulos. Temos $\theta(p) < 2\pi < \theta(L_1/2)$, sendo a segunda desigualdade consequência simples de $p > (\frac{\pi}{2} + 1)m$.

Admitamos que $\theta(r) \leqslant 2\pi$. Nesse caso, obtemos uma curva *aberta* inscrita em Γ_r, com origem $(r, 0)$ e extremidade num ponto E_r de Γ_r com ângulo polar $\theta(r)$; seja C_r a curva fechada que se obtém desta, acrescentando o arco de Γ_r de extremos $E_r, (r, 0)$ e amplitude $2\pi - \theta(r)$. Note-se que *a origem está dentro de C_r!* Daqui trivialmente resulta que o comprimento de arco de Γ_r correspondente a cada corda S_{2k+1} é estritamente decrescente com r; daí que, sendo $R > r$, temos $\theta(r) - \theta(R) > R - r$. Por continuidade, existe um r_0 tal que $\theta(r_0) = 2\pi$. Então, C_{r_0} é curva concíclica de $\mathscr{F}$.

(b) Note-se que o r_0 acima referido é único. A cada segmento S_{2k+1} associa-se a secção circular $\mathscr{S}_{2k+1}$ de raio r_0 e corda de comprimento L_{2k+1}. Escolha-se uma curva concíclica $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$. Por absurdo, admitamos que existe $D \in \mathscr{F}$, não concíclica, com área $\mathscr{A}_D \geqslant \mathscr{A}_{\mathcal{C}}$. "Colando" à região delimitada por D os setores circulares $\mathscr{S}_{2k+1}$ nos lugares adequados, obtemos uma região não circular, de perímetro $2\pi r_0$ e área $\geqslant \pi r_0^2$. Isto contradiz o teorema isoperimétrico.