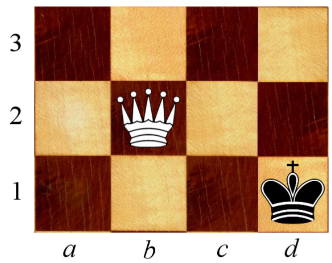
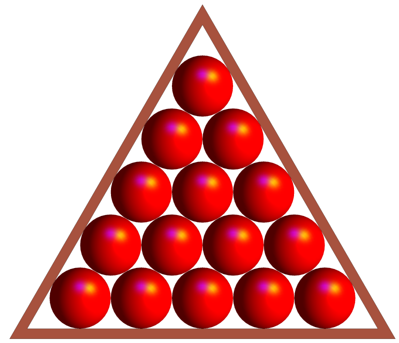




As vossas respostas devem ser devidamente justificadas.

1. *Neste final de Xadrez estranho, em tabuleiro* 4×3*, a Dama branca, que joga primeiro, tem como objetivo obrigar o Rei negro a ocupar a casa do canto superior direito (*$d3$*), em não mais de* 4 *movimentos do Rei. O objetivo do Rei é evitar isso. Qual dos dois tem estratégia vencedora?*

2. (a) *Três esferas maciças, impenetráveis, estão dentro dum contentor também esférico. O volume do contentor é o menor possível de modo a conter as* 3 *esferas. Mostrem que são complanares os centros das quatro esferas.*

   (b) *Se uma das três esferas tem raio* R *e as outras duas são iguais de raio* $r < R$*, determinem o raio do contentor em função de* r *e* R*.*

3. (a) *Antes de iniciar um jogo de* snooker*, as bolas foram empacotadas num caixilho triangular, sobre a mesa, como manda a tradição. Sem se retirar o triângulo, empilharam-se, com base nas* 15 *iniciais, o maior número possível de outras bolas congéneres, em várias camadas, de modo a que cada bola ficasse em contacto com* 3 *bolas da camada imediatamente abaixo. Sabendo que as bolas são esferas de* $3\,\text{cm}$ *de raio, qual a distância do ponto mais alto da pilha à mesa de jogo?*

   (b) *A pilha de bolas e o caixilho triangular foram, de seguida, cobertos por uma campânula; esta é um paralelepípedo retângulo, cujo bordo retangular ficou assente na mesa de jogo. O caixilho tem espessura de* $1\,\text{cm}$*. Supondo que o paralelepípedo tem volume o menor possível de modo a conter a pilha e o caixilho, quais são as medidas dos seus lados?*

4. *Em* $\mathbb{R}^2$ *são dados dois pontos* A *e* B*. Definimos* caminho zigzag *entre* A *e* B *como sendo uma curva* $\mathscr{C}$*, contínua, com extremidades* A *e* B*, que satisfaz a condição:*

   > Para n ímpar, se $\mathscr{C}$ interseta a faixa $\{(x,y) : n \leqslant y \leqslant n+1\}$ em mais de um ponto, essa intersecção é um segmento de reta paralelo à bissetriz dos quadrantes pares, ou paralelo à bissectriz dos quadrantes ímpares.

   (a) *Determinem o menor comprimento dos caminhos zigzag entre* $A = (0, 1.2)$ *e* $B = (13, 50)$*.*

   (b) *Determinem quantos caminhos zigzag entre* $A = (0, 1.2)$ *e* $B = (13, 50)$ *têm comprimento mínimo.*

RESPOSTAS

1. *Neste final de Xadrez estranho, em tabuleiro 4×3, a Dama branca, que joga primeiro, tem como objetivo obrigar o Rei negro a ocupar a casa do canto superior direito ($d3$), em não mais de 4 movimentos do Rei. O objetivo do Rei é evitar isso. Qual dos dois tem estratégia vencedora?*

A Dama tem a seguinte estratégia vencedora: 1. D $a2$, R $c1$; 2. D $b3$, R $d2$; 3. D $b1$, R $c3$; 4. D $a2$, R $d3$.

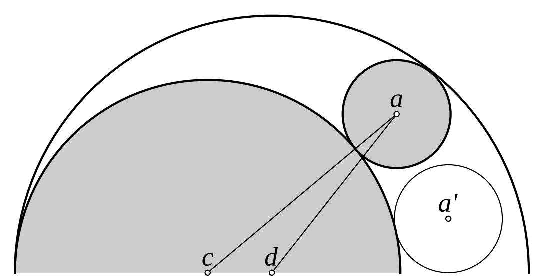
2. (a) *Três esferas maciças, impenetráveis, estão dentro dum contentor também esférico. O volume do contentor é o menor possível de modo a conter as 3 esferas. Mostrem que são complanares os centros das quatro esferas.*

Seja Π o plano dos centros das esferas interiores, A, B, C, já colocadas dentro do contentor esférico D. Por absurdo, admitamos que o centro de D não está em Π. Então a esfera D', simétrica de D relativamente a Π também contém as esferas A, B, C. A intersecção de D com D' está contida numa esfera de raio estritamente menor que o raio de D, o que contradiz a minimalidade de D.

2. (b) *Se uma das três esferas tem raio R e as outras duas são iguais de raio $r < R$, determinem o raio do contentor em função de r e R.*

Por (a) cortamos as 4 esferas pelo plano Π reduzindo o problema ao de 3 círculos A, B, C que, sem sobreposição, se dispõem dentro doutro c+irculo D. Supomos C maior que A e B; estes têm rio r e C tem raio R. Seja ρ o raio do contentor D, que se supõe minimal. Sejam a, b, c, d os centros dos 4 círculos.

Lema. *Cada círculo é tangente aos outros três.*



Prova. Claro que A e B são tangentes a C e estes 3 tangentes a D. Provemos a tangência entre A e B. A figura representa as metades de C e D acima do eixo cd, e o círculo A; omite-se B que se supõe estar em posição simétrica de A relativamente a cd (este é eixo de simetria do sistema de 4 círculos). Temos de provar que A é tangente a cd. Note-se que $\overline{ca} = R + r$ e $\overline{da} + r = \rho$. Admitamos que A não é tangente a cd. Seja A' o círculo de raio r, tangente a cd, centrado no ponto a' e tal que $\overline{ca'} = R+r$. Como $\measuredangle dca' < \measuredangle dca$, temos $da' < da$; portanto o círculo A' não é tangente a D e o mesmo se passa com B', simétrico de A' relativamente a cd. Isto contradiz a minimalidade de D. $\square$

Coloca-se um sistema cartesiano de modo a que os centros a, b, c tenham coordenadas $a = (-r, 0)$, $b = (r, 0)$, $c = (0, h)$, com $h > 0$. D é tangente a C em $(0, h + R)$; portanto, o centro de D é $(0, y)$ com $0 < y < h$. Temos $h = \sqrt{(R + r)^2 - r^2}$ e, sendo ρ o raio de D, temos $\rho = \sqrt{y^2 + r^2} = h - y + R$. Agora é só fazer contas das quais resulta

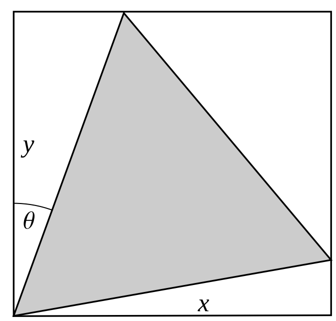
$$\rho = \frac{2R^2 + rR + 2R\sqrt{R^2 + 2rR}}{4R - r}.$$

3. (a) *Antes de iniciar um jogo de* snooker*, as bolas foram empacotadas num caixilho triangular, sobre a mesa, como manda a tradição. Sem se retirar o triângulo, empilharam-se, com base nas* 15 *iniciais, o maior número possível de outras bolas congéneres, em várias camadas, de modo a que cada bola ficasse em contacto com* 3 *bolas da camada imediatamente abaixo. Sabendo que as bolas são esferas de* 3 *cm de raio, qual a distância do ponto mais alto da pilha à mesa de jogo?*

Seja R $(= 3\,\text{cm})$ o raio de cada bola. Há 4 bolas, entre as quais a bola no topo, cujos centros são os vértices dum tetraedro regular de aresta $L = 8R$. A altura do tetraedro é $H = \sqrt{\frac{2}{3}}L = 8\sqrt{\frac{2}{3}}R$; a este valor há que acrescentar 1 diâmetro, obtendo-se a resposta final: $(2 + 8\sqrt{\frac{2}{3}})R$; ou seja $6 + 8\sqrt{6}\,\text{cm}$.

(b) *A pilha de bolas e o caixilho triangular foram, de seguida, cobertos por uma campânula; esta é um paralelepípedo retângulo, cujo bordo retangular ficou assente na mesa de jogo. O caixilho tem espessura de* 1 *cm. Supondo que o paralelepípedo tem volume o menor possível de modo a conter a pilha e o caixilho, quais são as medidas dos seus lados?*

Claro que a altura da caixa é $(2 + 8\sqrt{\frac{2}{3}})R$. Na projeção horizontal (figura inicial) podemos imaginar as 3 bolas "extremas" da fieira de baixo inchando até terem raio $R + \varepsilon$ cm (sem mudar os centros, penetrando as vizinhas) onde ε é a espessura do caixilho; elas ficarão então tangentes aos bordos externos do caixilho triangular. É fácil ver que o lado do triângulo exterior mede $\lambda = 8R + \sqrt{3}(R + e)$.



A questão agora é: *quais os retângulos de menor área que contêm um triângulo equilátero de lado λ?* Para responder, selecionamos um sistema OXY; podemos supor que os retângulos em causa têm lados paralelos aos eixos coordenados. Fixado o triângulo em posição arbitrária, tomamos o retângulo $\mathscr{R}$ interseção da mais estreita faixa vertical e da mais estreita faixa horizontal contendo o triângulo. Um dos vértices de $\mathscr{R}$ é vértice do triângulo. Assim, tudo depende do ângulo θ indicado na figura. Trata-se de minimizar o produto xy, onde $x = \lambda\cos(\frac{\pi}{6} - \theta)$ e $y = \lambda\cos\theta$, para $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$. Tem-se $xy = \frac{\lambda^2}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} + \cos(\frac{\pi}{6} - 2\theta)\right]$. O mínimo ocorre apenas em $0, \frac{\pi}{6}$. Portanto as dimensões do retângulo ótimo são $\lambda \times \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$.

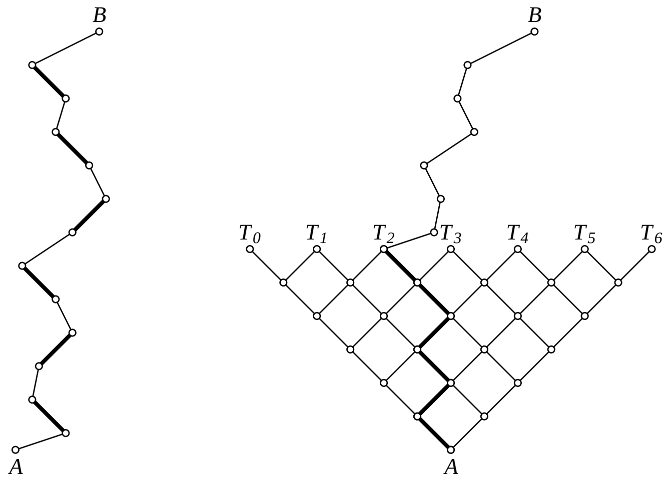
4. *Em* $\mathbb{R}^2$ *são dados dois pontos* A *e* B. *Definimos* caminho zigzag *entre* A *e* B *como sendo uma curva* $\mathscr{C}$*, contínua, com extremidades* A *e* B*, que satisfaz a condição:* Para n ímpar, se $\mathscr{C}$ interseta a faixa $\{(x, y) : n \leqslant y \leqslant n + 1\}$ em mais de um ponto, essa intersecção é um segmento de reta paralelo à bissetriz dos quadrantes pares, ou paralelo à bissectriz dos quadrantes ímpares.

(a) *Determinem o menor comprimento dos caminhos zigzag entre* $A = (0, 1.2)$ *e* $B = (13, 50)$.

(b) *Determinem quantos caminhos zigzag entre* $A = (0, 1.2)$ *e* $B = (13, 50)$ *têm comprimento mínimo.*

Definimos *faixa* n por $\mathscr{F}_n = \{(x, y) : n \leqslant y \leqslant n + 1\}$, onde n é um inteiro. Vamos supor que A e B não estão na mesma faixa, com B acima de A.

Primeiro, tratamos o caso de pontos A e B, ambos em faixas pares: $A \in \mathscr{F}_{2r}$, $B \in \mathscr{F}_{2s}$, com $r \leqslant s$. Como pretendemos trajectos zigzag mais curtos, podemos olhar apenas para trajectos $\mathscr{P}$ que são linhas poligonais cujos vértices, $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{2(r-s)+1}$, satisfazem: $P_0 = A$, $P_{2(r-s)+1} = B$, $P_i = (x_i, 2r+i)$ para $i = 1, \dots, 2(r-s)$. A poligonal $\mathscr{P}$ é concatenação dos segmentos $S_k = [P_k, P_{k+1}]$, para $0 \leqslant k \leqslant 2(r-s)$; se k é ímpar, S_k está inclinado "a 45°".



Na figura representa-se um exemplo de $\mathscr{P}$, para $s - r = 6$; a traço grosso estão os segmentos S_k para k ímpar, cada um deles inclinado a 45°. Se transladarmos os S_i, reconcatenando-os por uma ordem à escolha, obtemos uma poligonal de A para B com o mesmo comprimento que $\mathscr{P}$. Reordenemos os S_i do seguinte modo

$$S_1, S_3, S_5 \dots, S_{2(r-s)-1}, S_0, S_2, S_4, \dots, S_{2(r-s)},$$

e translademos cada um deles de modo a concatená-los, por esta ordem, de A para B. Seja $\mathscr{P}^*$ a poligonal de A para B assim obtida (representada na figura do lado direito). $\mathscr{P}^*$ decompõe-se em duas poligonais: $\mathscr{G}^*$ constituída pelos primeiros $s - r$ lados de $\mathscr{P}^*$ (inclinados a 45°), e $\mathscr{R}^*$ constituída pelos restantes. Seja T o nodo de ligação de $\mathscr{G}^*$ e $\mathscr{R}^*$ (T_2 na figura). Fazendo $\mathscr{P}$ percorrer o conjunto das poligonais zigag, há $s - r + 1$ pontos T possíveis, denotados $T_0, T_1, \dots, T_{s-r}$, por ordem crescente das abcissas. Note que $T_k = T_0 + (2k, 0)$.

Denotamos o comprimento dos caminhos zigzag mais curtos de A a B por $\mathrm{dz}(A, B)$, a que chamamos impropriamente *distância zigzag* de A a B. O que foi dito mostra que os caminhos zigzag mais curtos de A a B satisfazem o seguinte: (i) São poligonais $\mathscr{P}$ tais que $\mathscr{R}^*$ é o segmento de recta $[T, B]$; (ii) A correspondente poligonal $\mathscr{G}^*$ une A a um dos pontos T_i mais próximos de B (pode haver 2 pontos desses). Se T_p é um tal ponto, $\mathrm{dz}(A, B) = (s-r)\sqrt{2} + \overline{BT}_p$; (iii) O número de poligonais $\mathscr{G}^*$ de A a T_k é $\binom{s-r}{k}$, resultado bem conhecido sobre o triângulo de Pascal.

Se $A = (x, y)$ não pertence a uma faixa par, então $y = 2r - \theta$ onde r é inteiro e $0 < \theta < 1$. Qualquer caminho zigzag mais curto de A a B passa por um dos dois pontos $A^- = (x - \theta, 2r)$ ou $A^+ = (x + \theta, 2r)$. Tem-se obviamente que $\mathrm{dz}(A, B) = \theta\sqrt{2} + \min\{\mathrm{dz}(A^-, B), \mathrm{dz}(A^+, B)\}$. Os caminhos zigzag mais curtos de A a B obtêm-se de modo óbvio dos de A^- a B, e dos de A^+ a B.

Se $B = (v, w)$ não pertence a uma faixa par, então $w = 2s + 1 + \eta$ onde s é inteiro e $0 < \eta < 1$. Qualquer caminho zigzag mais curto de A a B passa por um dos dois pontos $B^- = (v - \eta, 2s + 1)$ ou $B^+ = (v + \eta, 2s + 1)$. Etc., etc.

O caso mais desfavorável ocorre quando nem A nem B estão em faixas pares. Nesse caso, os pontos A^-, A^+ estão na faixa par $\mathscr{F}_{2r}$, e B^-, B^+ estão na faixa par $\mathscr{F}_{2s}$. Pelo método acima calculamos as distâncias zigzag de A^- a B^-, de A^- a B^+, de A^+ a B^-, e de A^+ a B^+; a distância zigzag de A a B é o mínimo dessas 4 distâncias acrescido de $\sqrt{2}(\theta + \eta)$. A contagem dos caminhos mais curtos não oferece dificuldades adicionais.

CONTAS

São dados $A = (0, 1.2)$ e $B = (13, 50)$. Usa-se a notação anterior, em particular: $v = 13,\ w = 50$, etc.
A não está em faixa par; temos $\theta = 0.8$, $A^- = (-0.8, 2)$ e $A^+ = (0.8, 2)$.
Claro que $A^-, A^+ \in \mathscr{F}_{2r}$ e $B \in \mathscr{F}_{2s}$, com $r = 1$ e $s = 25$.

Trajetos zigzag mais curtos de A^+ a B. Como $s - r = 24$ e A^+ tem cota 2, os pontos T_i têm cota 26, *i.e.*: $T_i^+ = (t_i^+, 26)$. T_{12}^+ é o T_i^+ com a mesma abcissa que $A^+ = (0.8, 2)$; portanto $t_{12}^+ = 0.8$, e $t_k^+ = 0.8 + 2(k - 12)$. Como $t_{18}^+ = 12.8$ é o (único) t_i^+ mais próximo de $v = 13$, T_{18}^+ é o T_i^+ mais próximo de B, e dista de B

$$\sqrt{0.2^2 + (50 - 26)^2}. \tag{1}$$

O número de caminhos zigzag mais curtos de A^+ a B é $\binom{24}{18} = \binom{24}{6}$.

Caminhos zigzag mais curtos de A^- a B. Como anteriormente, $T_i^- = (t_i^-, 26)$. T_{12}^- tem a mesma abcissa que $A^- = (-.8, 2)$; portanto $t_k^- = -0.8 + 2(k - 12)$. Como $t_{19}^- = 13.2$ é o t_i^- mais próximo de $v = 13$, T_{19}^- é o T_i^- mais próximo de B, e dista de B o valor encontrado em (1). O número de caminhos zigzag mais curtos de A^- a B é $\binom{24}{19} = \binom{24}{5}$.

Conclusão. $\mathrm{dz}(a, B) = (s - r + \theta)\sqrt{2} + \sqrt{0.2^2 + (50 - 26)^2} = 24.8\sqrt{2} + \sqrt{1/25 + 24^2}$.
O número de caminhos zigzag mais curtos é $\binom{24}{6} + \binom{24}{5} = \binom{25}{6}$.