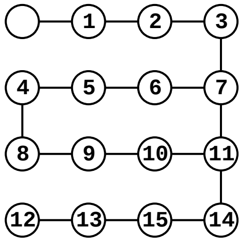
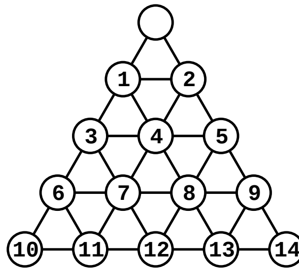
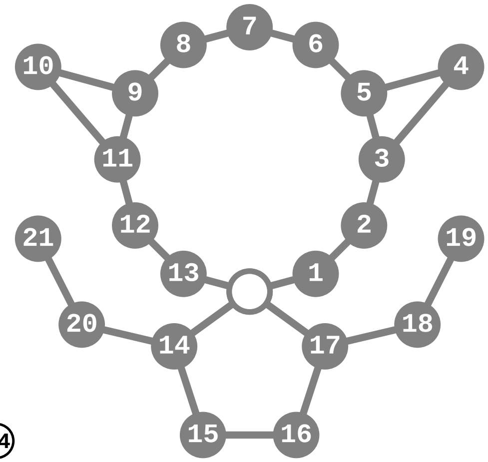
Puzzle dos 16 & companhia







Trata-se dum *puzzle* do famoso Sam Lloyd (1841-1911) jogado num tabuleiro 4×4, com 15 peças numeradas e uma casa vazia que rotulamos com $\varnothing$. Em cada jogada, $\varnothing$ troca de posição com o rótulo duma das casas adjacentes. Uma *configuração* ou *rotulação* é uma permutação de $\varnothing, 1, \ldots, 15$, lida no tabuleiro linha após linha (da esquerda para a direita) de cima para baixo; a rotulação da figura acima é $S = (\varnothing\, 1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9\, 10\, 11\, 12\, 13\, 15\, 14)$. O problema de Sam Lloyd é o de saber se existe uma sequência de jogadas que permita, partindo de S, chegar à configuração 'natural' $N = (\varnothing\, 1\, 2\, 3\, \ldots\, 13\, 14\, 15)$.

Numa sequência de jogadas, o rótulo $\varnothing$ percorre um caminho no tabuleiro, que se chama *circuito* se $\varnothing$ começa e acaba na mesma posição. Cada circuito de $\varnothing$ determina uma aplicação $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, onde $f(A)$ é a configuração obtida quando se executa o circuito de $\varnothing$ começando com A. Chamamos F ao conjunto dessas funções. Um *invariante* de F é uma aplicação φ de domínio $\mathscr{C}$, tal que $\varphi(f(A)) = \varphi(A)$. A *órbita* de $A \in \mathscr{C}$ é o conjunto $O_A = \{f(A) : f \in F\}$. Os elementos duma órbita têm todos $\varnothing$ no mesmo local. Os problemas básicos são descobrir invariantes e determinar órbitas.

1. *Mostrem que F é um grupo para a composição funcional. Provem que $O_A = O_B$ se e só se existe $f \in F$ tal que $B = f(A)$, e que órbitas distintas são disjuntas.*

2. *No* puzzle dos 16*, que relação há entre as paridades das permutações A e $f(A)$? O problema de Sam Lloyd tem solução? Quantas órbitas há e quantos elementos tem cada uma?*

(*) O *puzzle* pode generalizar-se a um grafo (simples) com nodos rotulados, um deles com $\varnothing$. Pergunta-se então: *quais são e quantos são os elementos da órbita da configuração dada?*

3. *Respondam às perguntas colocadas em $(^*)$, quando:*

(a) *O grafo é o de 16 nodos da figura.*

(b) *O grafo é o triangular da figura. Generalizem a um grafo triangular com n nodos de lado.*

(c) *O grafo é um ciclo de $2n$ nodos com uma ponte de 1 nodo ligando dois nodos opostos do ciclo.*

(d) *O grafo é o da quarta figura acima.*

4. *No conjunto $\mathscr{C}$ das rotulações dum grafo com $n \geqslant 3$ nodos, há n órbitas. Provem que o grafo é conexo, sem nodos pendentes, e com pelo menos um ciclo ímpar. Será verdadeiro o recíproco?*

RESPOSTAS

1. *Mostrem que F é um grupo para a composição funcional. Provem que $O_A = O_B$ se e só se existe $f \in F$ tal que $B = f(A)$, e que órbitas distintas são disjuntas.*

F é fechado para a composição funcional, pois se $f, g \in F$, então f resulta dun circuito c e g dum circuito d; claro que $f \circ g$ resulta da concatenação dos circuitos c e d. Se c^* é o circuito "reverso" de c (as inversas das jogadas de c executadas pela ordem inversa) então a função associada a c^* é f^{-1}, pelo que F é fechado para a inversão. Claro que a aplicação identidade, id, está em F pois corresponde ao circuito de comprimento 0.

Seja $O_A = O_B$; como $B \in O_B$, vale $B \in O_A$; portanto existe $f \in F$ tal que $B = f(A)$. Reciprocamente, se $B = f(A)$ para algum f, então $A = f^{-1}(B)$, isto é, $A \in O_B$; para qualquer $X \in O_B$ temos $X = g(B)$ para algum g; portanfo $X = g \circ f(A)$, donde $X \in O_A$; provou-se $O_B \subseteq O_A$ e a prova de $O_A \subseteq O_B$ segue do mesmo modo pois $A \in O_B$. Portanto $O_A = O_B$.

Se existe $X \in O_A \cap O_B$, temos $O_X = O_A$ e $O_X = O_B$; portanto $O_A = O_B$. Conclusão: se $O_A \neq O_B$, então $O_A \cap O_B = \varnothing$. $\square$

2. *No* puzzle dos 16*, que relação há entre as paridades das permutações A e $f(A)$? O problema de Sam Lloyd tem solução? Quantas órbitas há e quantos elementos tem cada uma?*

Uma jogada simples executada sobre A faz em A uma troca de dois termos; assim, resulta de A uma permutação de paridade distinta da de A; se sobre A executarmos uma sequência de jogadas simples em número par, resulta daí uma permutação com a mesma paridade de A. No tabuleiro 4×4 todos os circuitos têm comprimentos pares. Portanto A e $f(A)$ têm a mesma paridade. O problema de Sam Lloyd não tem solução, pois a configuração da figura e a permutação 'natural', N, são de paridades distintas.

Para completar a resposta, provamos que a órbita de N é o conjunto $\mathscr{P}$ das permutações pares nas quais $\varnothing$ ocupa a primeira posição. Vimos que $O_N \subseteq \mathscr{P}$. Reciprocamente, seja $\sigma \in \mathscr{P}$. Vamos ver que é possível transformar σ em N, com um elemento de F (isto é, vamos indicar um algoritmo para resolver o *puzzle dos 16*). Com jogadas adequadas é fácil colocar os rótulos $8, 9, \ldots, 15$ nos devidos lugares das duas linhas de baixo. Depois colocam-se $2, 3, 6, 7$ nos seus lugares, sem mexer nos anteriormente colocados. Apenas ficam por colocar $\varnothing, 1, 4, 5$. Mexendo apenas nestes, coloquemos $\varnothing$ na casa $(1, 1)$; fazendo $\varnothing$ descrever ciclos sucessivos nas quatro casas (i, j), $i, j = 1, 2$, ainda é possível colocar 1 na sua casa $(1, 2)$; e sobram apenas os rótulos $4, 5$ que ficam nos lugares $(2, 2)$ e $(2, 1)$; e *têm que ficar nas casas certas*, pois a configuração obtida tem a paridade de σ, igual à de N. Assim sendo, $\sigma \in O_N$.

No conjunto das permutações de n elementos, há $n!/2$ pares. Como as de $\mathscr{P}$ têm $\varnothing$ na primeira posição, $\mathscr{P}$ tem $15!/2$ elementos. O raciocínio acima pode repetir-se para qualquer configuração inicial K, concluindo-se que O_K tem $15!/2$ elementos. Como $\mathscr{C}$ tem $16!$ elementos, e dada a disjunção das órbitas, há $16!/(15!/2) = 32$ órbitas. (Pode também argumentar-se dizendo que há duas órbitas para cada uma das 16 posições de $\varnothing$.)

[...] *quais são e quantos são os elementos da órbita da configuração dada?*

3. (a) *O grafo é o de* 16 *nodos da figura.*

Depois dum circuito de $\varnothing$, os nodos $1, 2, 3, 7, 12, 13, 14, 15$ ficam invariantes. Se colocarmos $\varnothing$ no lugar '7' e, a partir daí o fizermos percorrer uma vez o ciclo γ das posições iniciais de $7, 6, 5, 4, 8, 9, 10, 11$, no sentido direto, os rótulos $6, 5, 4, 8, 9, 10, 11$, farão a seguinte rotação, onde $x \to y$ significa que x passa para o lugar onde estava y: $6 \to 11 \to 10 \to 9 \to 8 \to 4 \to 5 \to 6$. Esta rotação será reiterada k vezes se fizermos $\varnothing$ percorrer k vezes o ciclo γ no sentido direto. Há, pois, 7 elementos na órbita em estudo.

3. (b) *O grafo é o triangular da figura. Generalizem a um grafo triangular com* n *nodos de lado.*

Teorema. *Para o grafo triangular com* n *nodos de lado a órbita em causa consta de todas as configurações possíveis com* $\varnothing$ *no topo.*

Prova. Por indução em n. Para $n = 2$ isso é óbvio, pois um circuito de $\varnothing$ de comprimento 3 troca as posições dos rótulos $1, 2$. Aceitando o teorema para n prova-se para $n + 1$. Com jogadas adequadas, constituindo um circuito de $\varnothing$, é fácil colocar quaisquer $n + 1$ rótulos na última linha do triângulo. Sobra um grafo triangular com n nodos e $\varnothing$ no topo. A prova termina com aplicação d hipótese de indução. $\square$

O grafo triangular com n nodos de lado tem $T_n = \binom{n+1}{2}$ nodos. Existem, pois, $(T_n - 1)!$ rotulações distintas com $\varnothing$ no topo, sendo esse o cardinal da órbita.

3. (c) *O grafo é um ciclo de* $2n$ *nodos com uma ponte de* 1 *nodo ligando dois nodos opostos do ciclo.*

Não consegui encontrar uma solução explícita. Fica em aberto para quem quiser entreter-se.

3. (d) *O grafo é o da quarta figura acima.*

O rótulo 19 é invariante pois está num nodo pendente; podemos pensar que ele não está lá, o que deixa pendente o nodo 18 que, por isso, também é invariante. Pelo mesmo motivo, $20, 21$ são invariantes. O rótulos $14, 15, 16, 17$ podem rodar no conjunto de 4 nodos que inicialmente ocupam e não podem ser transferidos para a parte superior do grafo; há pois 4 modos de colocar $14, 15, 16, 17$.

Quanto à parte superior do grafo (cabeça e orelhas) os rótulos $1, 2, \ldots, 13$ podem sofrer permutações circulares do tipo $1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to 13 \to 1$, por meio do circuito $\delta = (\varnothing, 13, 12, \ldots, 2, 1, \varnothing)$. Se fizermos o circuito $\gamma = (\varnothing, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 1, \varnothing)$, os únicos rótulos que mudam são aqueles que se encontram nas posições originais de 4 e 5; esses dois rótulos sofrem uma transposição. Compondo repetidamente os circuitos γ e δ, podemos transpor quaisquer rótulos que ocupem posições adjacentes em $\{1, \ldots, 13\}$. Portanto, há 13! rotulações distintas das posições $1, \ldots, 13$. Assim, o número de elementos da órbita em estudo é $4 \times 13!$

4. *No conjunto* $\mathscr{C}$ *das rotulações dum grafo com* $n \geqslant 3$ *nodos, há* n *órbitas. Provem que o grafo é conexo, sem nodos pendentes, e com pelo menos um ciclo ímpar. Será verdadeiro o recíproco?*

Para cada nodo x, seja U_x o conjunto de *todas* as configurações com $\varnothing$ no nodo x. Claro que U_x é uma união de órbitas; como os U_x são disjuntos 2-a-2 e há apenas n órbitas, os U_x são essas órbitas.

Por absurdo, admitamos que o grafo é desconexo. Fixemos um nodo z. Existe outro nodo w não conectado a z por um caminho no grafo. Em U_z, $\varnothing$ está em z e nenhum circuito de $\varnothing$ passa em w; portanto o rótulo de w é invariante. Como $n > 2$ há pelo menos dois rótulos distintos de $\varnothing$; existem então pelo menos duas órbitas em U_z, uma com w rotulado duma maneira, outra com w rotulado doutra maneira. Contradição!

Por absurdo, admitamos que o grafo tem um nodo w pendente; tomemos U_z com $z \neq w$. O rótulo de w é invariante; como no caso anterior, U_z tem pelo menos duas órbitas. Contradição!

Lema. *Num grafo em que todos os ciclos são pares, todo o circuito tem comprimento par.*

Prova. Um circuito de comprimento m é uma sucessão de nodos, $\gamma = (v_1, v_2, \ldots, v_m, v_1)$, onde cada nodo é adjacente ao seguinte. Um ciclo é um circuito onde em $v_1, v_2, \ldots, v_m$ não há repetições. Podemos provar o lema por indução em m, aceitando, desde já, a sua veracidade para circuitos de comprimentos $< m$. Se γ é ciclo, então m é par. Se γ não é ciclo, existem $r < s$ tais que $v_r = v_s$. Então $\gamma' = (v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_r)$ e $\gamma'' = (v_1, \ldots, v_{r-1}, v_s, \ldots, v_m, v_1)$ são circuitos de comprimentos $s - r$ e $m - s + r$; por indução, estes números são pares pelo que m é par. $\square$

Por absurdo, admitamos que no grafo todos os ciclos são pares. Fixemos uma órbita U_z. Como os circuitos de $\varnothing$ têm comprimentos pares, as configurações em U_z são permutações pares. Isso deixa de fora as ímpares. Contradição!